

# Komplexná analýza

## Derivácia funkcie komplexnej premennej

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a Operačnej Analýzy  
Fakulta Riadenia a Informatiky  
Žilinská Univerzita v Žiline

26. marca 2020

## Cauchy–Riemannove vzťahy

Nech  $u(x, y), v(x, y)$  sú funkcie diferencovateľné na  $G \subset \mathbb{C}$ ,  
 $f$  funkcia definovaná na  $G$ , taká, že  $\operatorname{Re} f = u(x, y)$  a  $\operatorname{Im} f = v(x, y)$ .  
 $f$  je holomorfná práve vtedy, ak  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  spĺňajú  
Cauchy–Riemannove vzťahy:

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y) \quad \text{a} \quad u'_y(x, y) = -v'_x(x, y).$$

**Nezabúdajte, že musia platiť obidva Cauchy–Riemannove vzťahy.**

# Derivácia komplexnej funkcie

Na základe Cauchy–Riemannových vzťahov pre deriváciu komplexnej funkcie  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  platí:

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) \quad \text{resp.} \quad f'(z) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y).$$

## Príklad

Rozhodnite, v ktorých bodoch existujú derivácie danej funkcie a určte ich.

a)  $f(z) = \bar{z}$ ,

b)  $f(z) = |z|^2$ ,

c)  $f(z) = e^z$

d)  $f(z) = x^2 - y^2 + 2 \cdot i \cdot xy$ , kde  $z = x + iy$ .

## Príklad

Rozhodnite, či existuje holomorfná funkcia  $f$ , definovaná na  $\mathbb{C} - \{0\}$  taká, že:

$$\operatorname{Re}f(z) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

# Príklady

Rozhodnite, či existuje holomorfná funkcia  $f$ , definovaná na  $M \subset \mathbb{C}$  taká, že:

- 1  $\operatorname{Re} f(z) = \sin(x+1) \cdot (e^y + e^{-y})$ , kde  $M = \mathbb{C}$ ,
- 2  $\operatorname{Im} f(z) = e^{x+1} \cdot \sin y$ , kde  $M = \mathbb{C}$ ,
- 3  $\operatorname{Re} f(z) = \ln((x+1)^2 + y^2)$ , kde  $M = \mathbb{C} - \{-1\}$ ,
- 4  $\operatorname{Im} f(z) = 2xy - y$ , kde  $M = \mathbb{C}$ ,
- 5  $\operatorname{Re} f(z) = x - \frac{x}{x^2+y^2}$ , kde  $M = \mathbb{C} - \{0\}$ ,
- 6  $\operatorname{Im} f(z) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$ , kde  $M = \mathbb{C} - \{0\}$ ,
- 7  $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - y^2 + x^2$ , kde  $M = \mathbb{C} - \{0\}$ ,
- 8  $\operatorname{Im} f(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 2xy$ , kde  $M = \mathbb{C} - \{0\}$ ,
- 9  $\operatorname{Re} f(z) = \frac{y^2+x^2+x}{y^2+x^2+2x+1}$ , kde  $M = \mathbb{C} - \{-1\}$ ,
- 10  $\operatorname{Im} f(z) = \frac{-2y}{y^2+x^2-2x+1}$ , kde  $M = \mathbb{C} - \{1\}$ .