Komplexná analýza

Komplexné čísla

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a Operačnej Analýzy
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

24. marca 2020

Komplexné číslo

Definícia (Komplexné číslo)

Pod **komplexným číslom** budeme rozumieť číslo v tvare

$$z = x + \mathrm{i}y.$$

Komplexné číslo

Definícia (Komplexné číslo)

Pod **komplexným číslom** budeme rozumieť číslo v tvare

$$z = x + \mathrm{i}y.$$

Poznámka

i je symbol, pre ktorý platí

$$\mathrm{i}^2 = -1 \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i} \quad \mathrm{i}^4 = 1.$$

i nazývame **imaginárne číslo**. Všeobecne platí

$$\mathrm{i}^{4n} = 1 \quad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i} \quad \mathrm{i}^{4n+2} = -1 \quad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}.$$

Komplexné číslo

Definícia (Komplexné číslo)

Pod **komplexným číslom** budeme rozumieť číslo v tvare

$$z = x + \mathrm{i}y.$$

Poznámka

Ak $z = x + \mathrm{i}y$, tak:
x nazývame **reálnou časťou** z a označujeme $x = \operatorname{Re} z$,
y nazývame **imaginárnou časťou** z a označujeme $y = \operatorname{Im} z$,

Príklady

1. Nech $\operatorname{Re} z = x$ a $\operatorname{Im} z = y$. Ukážte, že
$$\frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}.$$

2. Nech $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ a $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. Určte
$$\operatorname{Re} \frac{z_1}{z_2}, \quad \operatorname{Im} \frac{z_1}{z_2}.$$

Príklady

Určte reálnu a imaginárnu časť čísla z ak platí:

a) $z = \frac{1}{1-\mathrm{i}}$,

b) $z = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3$,

c) $z = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$,

d) $z = \left(\frac{\mathrm{i}^5+2}{\mathrm{i}^{19}+1}\right)^2$,

e) $z = \frac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^3}$.

Modul a argument komplexného čísla

Nech pre komplexné číslo platí $\operatorname{Re} z = x$ a $\operatorname{Im} z = y$, t.j. $z = x + iy$.

Definícia (Modul (absolútna hodnota))

Modul (absolútnu hodnotu) komplexného čísla definujeme vzťahom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Modul a argument komplexného čísla

Nech pre komplexné číslo platí $\operatorname{Re} z = x$ a $\operatorname{Im} z = y$, t.j. $z = x + iy$.

Definícia (Modul (absolútna hodnota))

Modul (absolútnu hodnotu) komplexného čísla definujeme vzťahom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definícia (Argument)

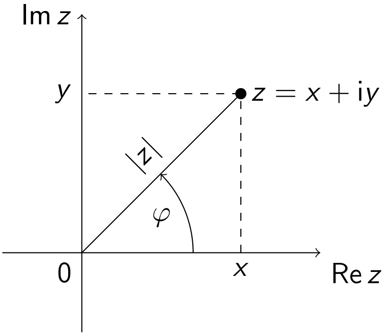
Argumentom komplexného čísla $z \neq 0$ rozumieme každé číslo φ, ktoré spĺňa rovnosti:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Označujeme ho $\arg z$

Gaussova rovina

Geometrický význam modulu a argumentu



Každému číslu $z = x + \mathrm{i}y$ priradíme jednoznačne bod roviny E_2.

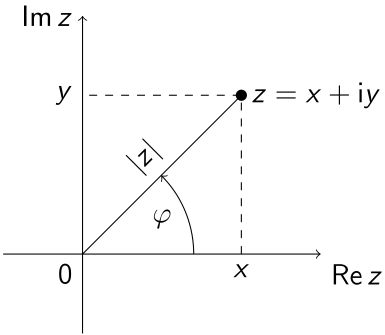
Os x je reálna os a os y je os imaginárna.

$|z|$ predstavuje vzdialenosť bodu $x + \mathrm{i}y$ od počiatku.

POZOR: Argument má nekonečne veľa hodnôt $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Gaussova rovina

Geometrický význam modulu a argumentu

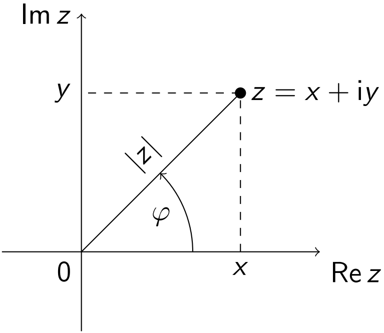


Hlavný argument

Pre každé $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ existuje jediné $\varphi \in \arg z$, také, že $-\pi < \varphi \leq \pi$. Túto hodnotu φ nazývame **hlavnou hodnotou argumentu** čísla z a označujeme $\operatorname{Arg} z$.

Gaussova rovina

Geometrický význam modulu a argumentu

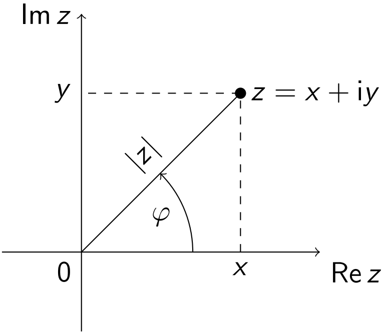


Geometricky pre $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ znamená hlavný argument $\operatorname{Arg} z$ uhol $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$, ktorý zviera kladná reálna polos s priamkou spájajúcou začiatok súradnicového systému s bodom z.

$\arg z$ potom značí množinu všetkých takýchto uhlov.

Kanonický tvar komplexného čísla

Goniometrický tvar komplexného čísla



Ak je $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, tak
$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ a $\sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$.

Pre $z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im}$ z teda máme

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Toto vyjadrenie nazývame **kanonický** alebo **goniometrický** tvar čísla z.

Príklady

Dokážte, že pre komplexné čísla z_1 a z_2 platí:

1. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
2. $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \pmod{2\pi}$,
3. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg} \dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \pmod{2\pi}$.

Určte moduly a argumenty komplexnýxh čísel

1. $z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,
2. $z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$,
3. $z = (1+\mathrm{i})^8(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{-6}$,
4. $z = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}$.

Riešenie rovnice $z^n = z_0$

Ak $z_0 = 0$, je zrejme jediným riešením rovnice $z = 0$.

Nech je teda $z_0 \neq 0$, potom môžeme písať
$z_0 = |z_0|(\cos\varphi_0 + \mathrm{i}\sin\varphi_0)$, kde $\varphi_0 \in \arg z_0$. Ak tiež zapíšeme
$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, tak máme

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi).$$

Odtiaľ dostávame

$$|z| = \sqrt[n]{|z_0|},$$

a treba určiť všetky φ, pre ktoré platí $\cos n\varphi = \cos\varphi_0$ a
$\sin n\varphi = \sin\varphi_0$.

Riešenie rovnice $z^n = z_0$

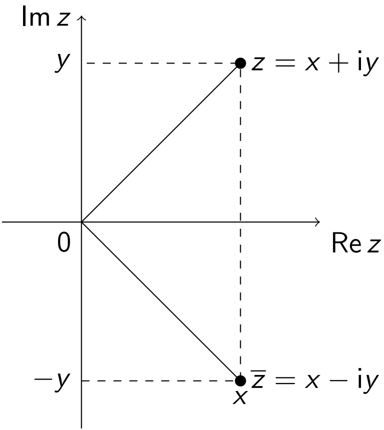
Jednou hodnotou je zrejme $\varphi = \frac{\varphi_0}{n}$ a množina všetkých hodnôt φ má tvar $\left\{ \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Rovnica $z^n = z_0$ má teda pre $z_0 \neq 0$ celkom n rôznych riešení

$$\sqrt[n]{|z_0|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right),$$

kde $\varphi_0 \in \arg z_0$ a $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Komplexne združené čísla



Definícia

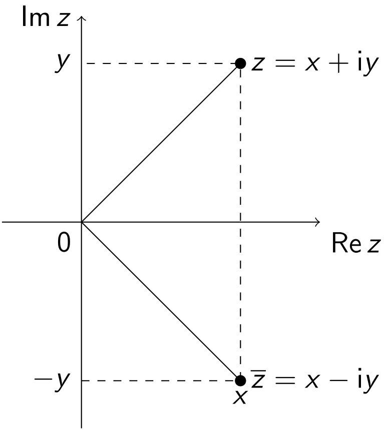
Komplexne združené číslo ku komplexnému číslu $z = x + \mathrm{i}y$ označujeme ako $\overline{z}$ a definujeme vzťahom

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y.$$

Geometrický význam

Obrazy komplexne združených čísel v Gaussovej rovine sú symetrické podľa reálnej osi.

Komplexne združené čísla



Platia vzťahy

1. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$,
2. $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z$,
3. $\mathrm{Re}\,z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$,
4. $\mathrm{Im}\,z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$,
5. $\overline{(\overline{z})} = z$,
6. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
7. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Príklady

Geometricky popíšte množiny bodov Gaussovej roviny, ktoré vyhovujú nerovnostiam:

1. $\operatorname{Re} z > 0$,
2. $\operatorname{Im} z \leq 1$,
3. $|\operatorname{Re} z| < 1$,
4. $|\operatorname{Im} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1$,
5. $|z| \leq 1$,
6. $|z - \mathrm{i}| > 1$,
7. $0 < |z + \mathrm{i}| < 2$,
8. $|\pi - \operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{4}$.

Príklady

Geometricky popíšte množiny bodov Gaussovej roviny, ktoré vyhovujú nerovnostiam:

1. $\operatorname{Im}(z+\mathrm{i}) \geq \operatorname{Re}(z-1)$,
2. $\operatorname{Im} \frac{z}{\mathrm{i}} \geq 1 - \operatorname{Re}(z+1)$,
3. $|\operatorname{Im}(z+\mathrm{i})| < |\operatorname{Re}(z+1)|$,
4. $\frac{\pi}{6} < |\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg} \overline{z}| < \frac{\pi}{4}$,
5. $\operatorname{Im} \frac{z}{\overline{z}} \geq 1$.

Príklady

Nech z_1 a z_2 sú pevne zvolené body Gaussovej roviny. Geometricky popíšte body, ktoré vyhovujú vzťahom:

1. $|z - z_1| = |z - z_2|$,
2. $|z - 1| = |\operatorname{Re} z|$.

Určte krivky v Gaussovej rovine, dané rovnicami:

1. $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
2. $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0$,
3. $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$,
4. $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z + \mathrm{i}) < \frac{\pi}{2}$.

Príklady

Určte krivky v Gaussovej rovine, dané rovnicami:

1. $\left|\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right| = a, \; a \in \mathbb{R}, \; a > 0,$
2. $\operatorname{Re} \frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{a}, \; a \in \mathbb{R}, \; a > 0,$
3. $\operatorname{Im} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{a}, \; a \in \mathbb{R}, \; a > 0,$
4. $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z \cdot \mathrm{i}) < \frac{\pi}{2},$
5. $\operatorname{Re} \frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{2}.$

Exponenciálny tvar komplexného čísla

Eulerove vzťahy

Komplexné číslo $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ môžeme zapísať v **exponenciálnom tvare**:

$$z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,.$$

Eulerove vzťahy

Platí

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}.$$

Príklady

Dokážte rovnosti:

1. $\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \dfrac{\sin\left[\frac{1}{2}(n+1)\theta\right]}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin\frac{n\theta}{2}$,
2. $(1 + \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^{2n} = (2\cos\frac{\alpha}{2})^{2n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha n}$.

Funkcie komplexnej premennej

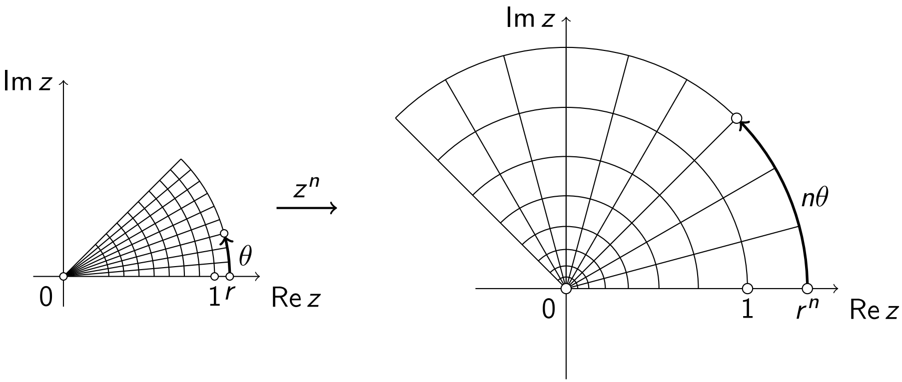
Mocninová funkcia s kladným celočíselným exponentom

Definícia (Mocninová funkcia)

Pod **mocninovou funkciou** s kladným celočíselným exponentom rozumieme zobrazenie $z \to w = z^n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Ak píšeme $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, tak dostávame $w = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$. Geometricky to v Gaussovej rovine znamená, že modul je umocnený na n a argument je vynásobený n.

Funkcie komplexnej premennej
Mocninová funkcia s kladným celočíselným exponentom



Funkcie komplexnej premennej
Exponenciálna funkcia

Z reálneho obnoru je známy rozvoj funkcie e^x do mocninového radu $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$. Tento rozvoj využijeme pri rozšírení definície exponenciálnej funkcie do komplexného oboru.

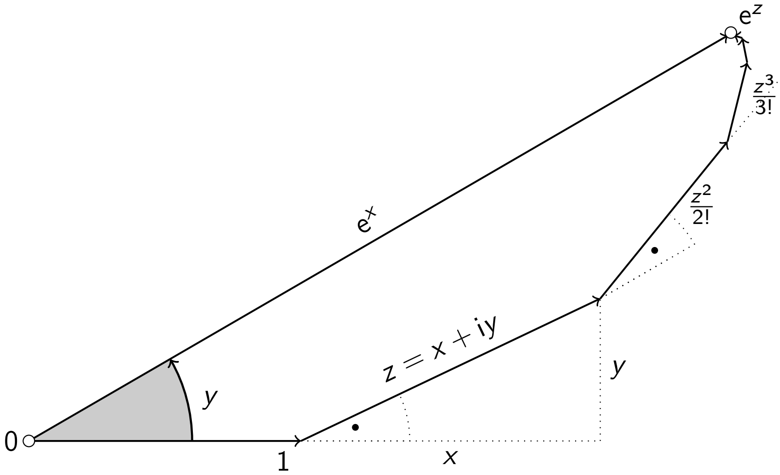
Definícia (Exponenciálna funkcia)

Pod **exponenciálnou funkciou** komplexnej premennej z rozumieme zobrazenie $z \to w = \exp(z)$, určené mocninovým radom

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Namiesto $\exp z$ budeme rovnako ako v reálnom obore písať e^z.

Funkcie komplexnej premennej
Exponenciálna funkcia



Funkcie komplexnej premennej
Exponenciálna funkcia:Príklady

Vypočítajte hodnoty:

1. $e^{i\frac{\pi}{2}}$,
2. $e^{-i\frac{\pi}{2}}$,
3. $e^{i\pi}$.

Určte reálnu a imaginárnu časť:

1. $e^{2+i\frac{\pi}{3}}$,
2. $e^{1-i\frac{\pi}{6}}$,
3. funkcie e^{z}.

Ukážte, že funkcia e^{z} je periodická s periódou $2\pi i$.

Funkcie komplexnej premennej

Vlastnosti transformácie $w = e^z$

Surjektivita

Nech $w = u + iv \in \mathbb{C} - \{0\}$. Ak je $y \in \arg w$, tak platí $w = |w|\, e^{iy}$. Pretože $|w| \in \mathbb{R}, |w| > 0$, existuje práve jedno $x \in \mathbb{R}$ také, že $e^x = |w|$ a platí $x = \ln |w|$. Potom pre $z = x + iy$ platí

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = |w| \cdot e^{iy} = w.$$

Celkom je teda zobrazenie $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ surjektívne.

Funkcie komplexnej premennej

Vlastnosti transformácie $w = e^z$

Zobrazenie priamok rovnobežných s reálnou osou

Priamka rovnobežná s reálnou osou má zrejme rovnicu $y = y_0$. Ak položíme $w = e^{x+iy_0}$, tak platí $y_0 \in \arg w$. Obrazy w teda ležia na takej polpriamke vychádzajúcej z počiatku, na ktorej ležia body s argumentom y_0. Pretože navyše $|e^{x+iy_0}| = e^x$, nadobúda pre $x \in \mathbb{R}$ všetky kladné hodnoty, tak obrazom priamky rovnobežnej s reálnou osou je celá uvedená polpriamka.

Funkcie komplexnej premennej

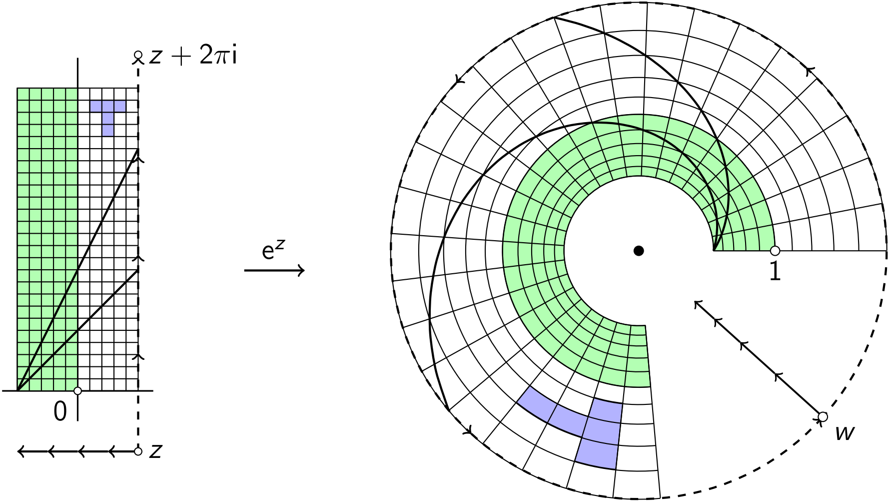
Vlastnosti transformácie $w = e^z$

Zobrazenie priamok rovnobežných s imaginárnou osou

Priamka rovnobežná s imaginárnou osou má zrejme rovnicu $x = x_0$. Ak položíme $w = e^{x_0 + iy}$, tak platí $|w| = e^{x_0}$. Obrazy w teda ležia na kružnici so stredom v počiatku a s polomerom e^{x_0}. Pretože navyše $\operatorname{Arg} | e^{x_0+iy} | = y$, je obrazom ľubovoľnej polouzavretej úsečky dĺžky 2π, ležiacej na priamke $x = x_0$ celá uvedená kružnica.

Funkcie komplexnej premennej

Exponenciálna funkcia – transformácia komplexnej roviny



Funkcie komplexnej premennej
Funkcie sínus a kosínus

Podobne ako pri exponenciálnej funkcii definujeme aj funkcie sínus a kosínus v komplexnom obore mocninovýmu radmi.

Definícia (Funkcia sínus)

Pod funkciou **sínus** komplexnej premennej z rozumieme zobrazenie $z \to w = \sin z$, určené mocninovým radom

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Funkcie komplexnej premennej
Funkcie sínus a kosínus

Podobne ako pri exponenciálnej funkcii definujeme aj funkcie sínus a kosínus v komplexnom obore mocninovýmu radmi.

Definícia (Funkcia kosínus)

Pod funkciou **kosínus** komplexnej premennej z rozumieme zobrazenie $z \to w = \cos z$, určené mocninovým radom

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Funkcie komplexnej premennej
Funkcie sínus a kosínus:Príklady

Určte reálnu a imaginárnu časť:

1. Funkcie $\sin z$,
2. Funkcie $\cos z$,

Určte z také, že:

1. $\sin z = 5$,
2. $\cos z = -3\mathrm{i}$.

Určte funkčné hodnoty:

1. $\sin(1 + \mathrm{i})$,
2. $\cos(-1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{4})$.

Funkcia sínus

Transformácia priamky $y = y_0$

Pretože platí

$$\operatorname{Re}\sin z = \sin x \cosh y \text{ a } \operatorname{Im}\sin z = \cos x \sinh y,$$

priamka $y = y_0$ sa transformuje na elipsu

$$u = \cosh y_0 \sin x, \; v = \sinh y_0 \cos x,$$

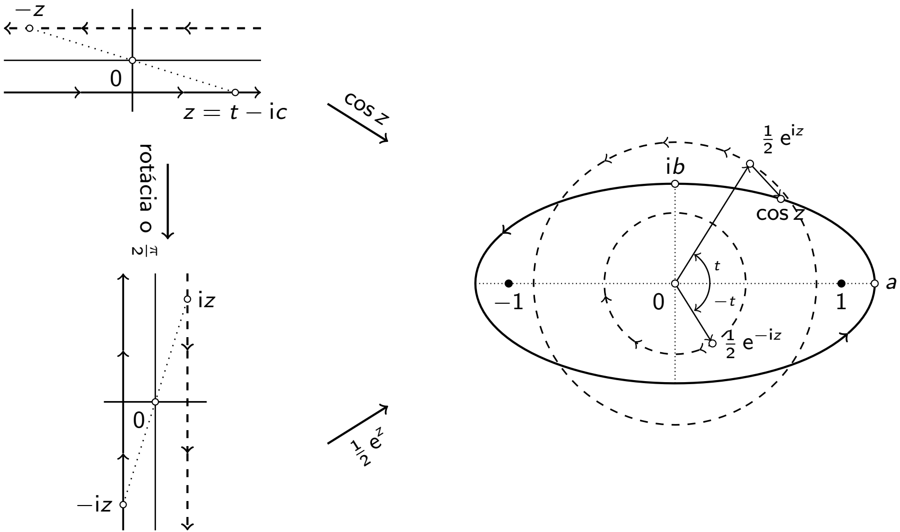
kde $u = \operatorname{Re} w$ a $v = \operatorname{Im} w$.

Táto elipsa má ohniská v bodoch 1 a -1 a obrazom ľubovoľnej úsečky dĺžky 2π ležiacej na priamke $y = y_0$ je celá takáto elipsa.

V prípade y_0 táto elipsa degeneruje na úsečku $\langle -1, 1\rangle$.

Funkcia sínus

Vlastnosti transformácie $w = \sin z$



Funkcie komplexnej premennej
Logaritmická funkcia

Definícia (Logaritmus komplexného čísla)

Pod **logaritmom** komplexného čísla z rozumieme množinu

$$\ln z = \{w \in \mathbb{C}, \mathrm{e}^w = z\}.$$

Platí

$$\ln z = \{w : w = \ln |z| + \mathrm{i}\alpha, \alpha \in \arg z\}.$$

Funkcie komplexnej premennej

Logaritmická funkcia

Definícia (Logaritmus komplexného čísla)

Pod **logaritmom** komplexného čísla z rozumieme množinu

$$\ln z = \{w \in \mathbb{C}, e^w = z\}.$$

Platí

$$\ln z = \{w : w = \ln|z| + i\alpha, \alpha \in \arg z\}.$$

Hlavná časť logaritmu

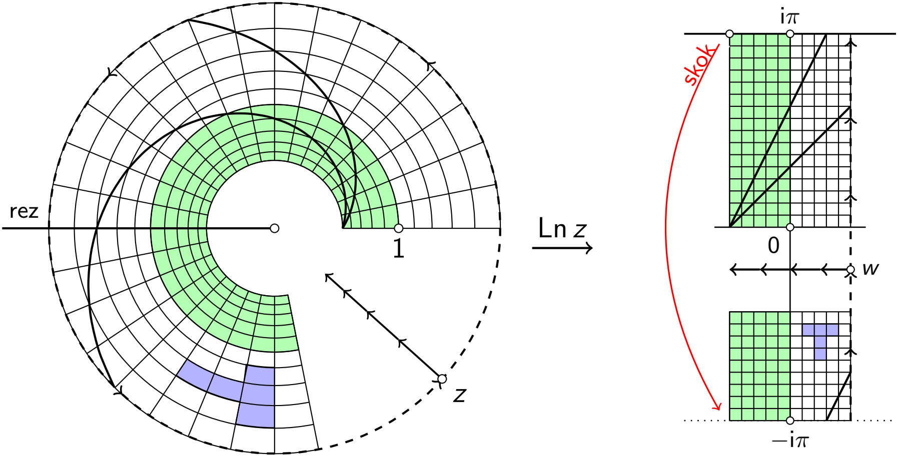
Hlavnú časť logaritmu komplexného čísla definujeme ako funkciu

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\alpha,$$

kde $\alpha = \operatorname{Arg} z$.

Funkcie komplexnej premennej

Logaritmická funkcia – transformácia komplexnej roviny



Funkcie komplexnej premennej

Logaritmická funkcia:Príklady

Určte hodnoty $\ln z$ a $\operatorname{Ln} z$, ak:

1. $z = \mathrm{i}$,
2. $z = -2$,
3. $z = 1 + \mathrm{i}$,
4. $z = 2 + 3\mathrm{i}$.

Funkcie komplexnej premennej
Všeobecná mocnina

Definícia (Mocnina so všeobecným exponentom)

Nech a je ľubovoľné komplexné číslo, $a \neq 0$. **Mocninovú funkciu** a^z definujeme ako
$$a^z = \{e^{z\xi}, \ \xi \in \ln a\}.$$

Funkcie komplexnej premennej

Všeobecná mocnina

Definícia (Mocnina so všeobecným exponentom)

Nech a je ľubovoľné komplexné číslo, $a \neq 0$. **Mocninovú funkciu** a^z definujeme ako

$$a^z = \{e^{z\xi},\ \xi \in \ln a\}.$$

Ak z množiny $\ln a$ zvolíme $\operatorname{Ln} a$, tak dostaneme hlavnú časť všeobecnej mocniny.

Hlavná časť mocninovej funkcie

Hlavnú časť všeobecnej mocninovej funkcie komplexného čísla definujeme ako funkciu

$$a^z\big|_h = e^{z \cdot \operatorname{Ln} a}.$$

Funkcie komplexnej premennej
Všeobecná mocnina:Príklady

Určte hodnoty a^z a $a^z|_h$:

1. $(-1)^{\sqrt{2}}$,
2. i^{i},
3. $z = (1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$.