

Nekonečné rady

Fourierove rady

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a Operačnej Analýzy
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

17. marca 2020

Skalárny súčin funkcií

Skalárny súčin, Ortogonalita, norma funkcie

Definícia (Skalárny súčin funkcií)

Nech f, g sú funkcie integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

nazývame **skalárnym súčinom** funkcií f, g .

Skalárny súčin funkcií

Skalárny súčin, Ortogonalita, norma funkcie

Definícia (Skalárny súčin funkcií)

Nech f, g sú funkcie integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

nazývame **skalárnym súčinom** funkcií f, g .

Funkcie f, g sa nazývajú **ortogonálne** (na intervale $\langle a, b \rangle$) práve vtedy ak $(f, g) = 0$.

Skalárny súčin funkcií

Skalárny súčin, Ortogonalita, norma funkcie

Definícia (Skalárny súčin funkcií)

Nech f, g sú funkcie integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

nazývame **skalárnym súčinom** funkcií f, g .

Funkcie f, g sa nazývajú **ortogonálne** (na intervale $\langle a, b \rangle$) práve vtedy ak $(f, g) = 0$.

Definícia (Norma a normovaná funkcia)

Nech f je funkcia integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. **Normou funkcie** nazývame číslo $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Funkcia sa nazýva **normovaná** ak $\|f\| = 1$.

Ortogonalný systém funkcií

Ortogonalný a ortonormálny systém funkcií

Definícia (Ortogonalný systém funkcií)

Nech $\{\varphi_n\}$ je konečná alebo spočítateľná postupnosť funkcií integrovateľných na intervale $\langle a, b \rangle$. Táto postupnosť sa nazýva **ortogonalný systém funkcií** práve vtedy, ak každé dve funkcie $\varphi_m, \varphi_n, m \neq n$ sú ortogonálne a každá funkcia φ_n má kladnú normu.

Ortogonalný systém funkcií

Ortogonalný a ortonormálny systém funkcií

Definícia (Ortogonalný systém funkcií)

Nech $\{\varphi_n\}$ je konečná alebo spočítateľná postupnosť funkcií integrovateľných na intervale $\langle a, b \rangle$. Táto postupnosť sa nazýva **ortogonalný systém funkcií** práve vtedy, ak každé dve funkcie $\varphi_m, \varphi_n, m \neq n$ sú ortogonálne a každá funkcia φ_n má kladnú normu.

Táto postupnosť funkcií sa nazýva **ortonormálna**, ak je ortogonálna a každá funkcia je normovaná.

Ortogonalný systém funkcií

Ortogonalný a ortonormálny systém funkcií

Definícia (Ortogonalný systém funkcií)

Nech $\{\varphi_n\}$ je konečná alebo spočítateľná postupnosť funkcií integrovateľných na intervale $\langle a, b \rangle$. Táto postupnosť sa nazýva **ortogonalný systém funkcií** práve vtedy, ak každé dve funkcie $\varphi_m, \varphi_n, m \neq n$ sú ortogonálne a každá funkcia φ_n má kladnú normu.

Táto postupnosť funkcií sa nazýva **ortonormálna**, ak je ortogonálna a každá funkcia je normovaná.

Postupnosť $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna, práve vtedy ak

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 0 & \text{pre } m \neq n \\ 1 & \text{pre } m = n \end{cases}$$

Trigonometrický systém

Ortogonalita trigonometrického systému a jeho ortonormalizácia

Úloha 1

Overte, že tzv. **trigonometrický systém funkcií**

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

je ortogonalný na ľubovoľnom intervale dĺžky 2π .

Úloha 2

Ku trigonometrickému systému funkcií

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

zostrojte systém, ktorý bude ortonormálny.

Fourierov rad

Fourierov rad všeobecne

Veta

Nech $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna postupnosť funkcií na intervale $\langle a, b \rangle$, $\{c_n\}$ postupnosť reálnych čísel. Nech rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

na intervale $\langle a, b \rangle$ rovnomerne konverguje k funkcii f . Potom pre hodnoty c_n platí

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \quad (1)$$

Fourierov rad

Fourierov rad všeobecne

Definícia (Fourierov rad)

Nech $\{\varphi_n\}$ je ortogonalna postupnosť funkcií na intervale $\langle a, b \rangle$, f funkcia integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Čísla c_n dané vzťahom (1) nazývame **Fourierove koeficienty** funkcie f vzhľadom na ortogonalný systém $\{\varphi_n\}$ a rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

kde c_n sú Fourierove koeficienty nazývame **Fourierov rad** funkcie f vzhľadom na ortogonalný systém $\{\varphi_n\}$.

Fourierov rad

Fourierov rad vzhľadom k trigonometrickému systému

Ortonormálny trigonometrický systém

V ďalšom nás budú zaujímať len Fourierove rady vzhľadom na ortonormálnu postupnosť (poznáme z úlohy 2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots \\ \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Fourierov rad

Fourierov rad vzhľadom k trigonometrickému systému

Fourierov rad funkcie

Fourierov rad ľubovoľnej funkcie integrovateľnej na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ má vzhľadom na systém (2) tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde a_n, b_n sú Fourierove koeficienty, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, & n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, & n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Poznámka

Výsledok zrejme platí pre ľubovoľný interval $\langle c, c + 2\pi \rangle$ dĺžky 2π .

Príklady

Rozviňte do Fourierovho radu funkcie:

1 $f(x) = x$ na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$,

2 $f(x) = x^2$ na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$,

3 $f(x) = e^x$ na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$,

4 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ -1 & x \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$

5 $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \langle -\pi, -\frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ -1 & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$

Fourierov rad

Fourierov rad párnej a nepárnej funkcie

Veta

Nech f je funkcia integrovateľná na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$. Ak je táto funkcia párna, tak jej Fourierov rad má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

kde $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$.

Ak je táto funkcia nepárna, tak jej Fourierov rad má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

kde $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

Príklady

Na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozviňte do Fourierovho radu funkcie:

1 $f(x) = |x|,$

2 $f(x) = x^2,$

3 $f(x) = e^{|x|},$

4 $f(x) = 1 - \frac{|x|}{\pi},$

5 $f(x) = |\sin x|.$

Párne a nepárne rozšírenie

Sínusový a kosínusový rad

Definícia (Párne a nepárne rozšírenie funkcie)

Nech f je funkcia integrovateľná na $\langle 0, \pi \rangle$ $[(0, \pi)]$. Ak pre $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$ kladieme $f(x) = f(-x)$ [$f(x) = -f(-x), f(0) = 0$], tak povieme, že sme zostrojili **párne (nepárne)** rozšírenie funkcie f na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Párne a nepárne rozšírenie

Sínusový a kosínusový rad

Definícia (Párne a nepárne rozšírenie funkcie)

Nech f je funkcia integrovateľná na $\langle 0, \pi \rangle$ $[(0, \pi)]$. Ak pre $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$ kladieme $f(x) = f(-x)$ [$f(x) = -f(-x), f(0) = 0$], tak povieme, že sme zostrojili **párne (nepárne)** rozšírenie funkcie f na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Definícia (Kosínusový a sínusový rad funkcie)

Fourierov rad párneho (nepárneho) rozšírenia funkcie f nazývame **kosínusovým (sínusovým)** radom funkcie f na intervale $\langle 0, \pi \rangle$.

Príklady

Nasledujúce funkcie rozviňte na intervale $\langle 0, \pi \rangle$ do sínusového a kosínusového radu

1 $f(x) = x,$

2 $f(x) = x^2,$

3 $f(x) = \sin \frac{x}{2},$

4 $f(x) = \cos \frac{x}{2},$

5 $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & x \in \langle \frac{\pi}{2}, 0\pi \rangle \end{cases}$

Fourierov rad

Rozvoj funkcie s periódou $p \neq 2\pi$

Transformácia periodickej funkcie na funkciu s periódou 2π

Nech f je periodická funkcia s periódou $p = 2h$, integrovateľná na intervale $\langle -h, h \rangle$. Potom funkcia $g(t) = f\left(\frac{h}{\pi}x\right)$ je periodická s periódou 2π .

Funkciu g je možné známym spôsobom rozvinúť do Fourierovho radu na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$. Spätnou transformáciou $x = \frac{\pi}{h}t$ získame Fourierov rad funkcie f na intervale $\langle -h, h \rangle$.

Fourierov rad

Rozvoj funkcie s periódou $p \neq 2\pi$

Fourierov rad funkcie s periódou $p \neq 2\pi$

Fourierov rad funkcie f na intervale $\langle -h, h \rangle$ má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{h} x + b_n \sin \frac{n\pi}{h} x \right),$$

kde Fourierove koeficienty sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(x) \cos \frac{n\pi}{h} x \, dx, & n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(x) \sin \frac{n\pi}{h} x \, dx, & n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Poznámka

Výsledok zrejme platí pre ľubovoľný interval $\langle c, c + 2h \rangle$ dĺžky $2h$.

Príklady

Určte Fourierov rozvoj funkcie

1 $f(x) = x$ na intervale $\langle -1, 1 \rangle$,

2 $f(x) = x$ na intervale $\langle 0, 2 \rangle$,

3 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ -1 & x \in \langle -1, 0 \rangle \end{cases}$

Rozviňte nasledujúce funkcie do sínusového a kosínusového radu:

1 $f(x) = x$ na intervale $\langle 0, 2 \rangle$,

2 $f(x) = x$ na intervale $\langle 0, 1 \rangle$,

3 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ -1 & x \in \langle 1, 2 \rangle \end{cases}$