Nekonečné rady

Funkčné rady

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a Operačnej Analýzy
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

16. marca 2020

Postupnosť funkcií

Bodová konvergencia a obor konvergencie

Definícia (Bodová konvergencia)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií. Hovoríme, že postupnosť $f_n(x)$ bodovo konverguje na množine $M \subseteq \bigcap D(f_n)$ k funkcii $f(x)$ ak:

Postupnosť funkcií

Bodová konvergencia a obor konvergencie

Definícia (Bodová konvergencia)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií. Hovoríme, že postupnosť $f_n(x)$ bodovo konverguje na množine $M \subseteq \bigcap D(f_n)$ k funkcii $f(x)$ ak: $\forall x \in M$ a $\forall \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n \geq n_0$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Postupnosť funkcií

Bodová konvergencia a obor konvergencie

Definícia (Bodová konvergencia)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií. Hovoríme, že postupnosť $f_n(x)$ bodovo konverguje na množine $M \subseteq \bigcap D(f_n)$ k funkcii $f(x)$ ak:
$\forall x \in M$ a $\forall \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n \geq n_0$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Píšeme $\lim f_n(x) = f(x)$ pre $x \in M$ alebo $f_n \to f$ na M.

Postupnosť funkcií

Bodová konvergencia a obor konvergencie

Definícia (Bodová konvergencia)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií. Hovoríme, že postupnosť $f_n(x)$ bodovo konverguje na množine $M \subseteq \bigcap D(f_n)$ k funkcii $f(x)$ ak: $\forall x \in M$ a $\forall \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n \geq n_0$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Píšeme $\lim f_n(x) = f(x)$ pre $x \in M$ alebo $f_n \to f$ na M.

Definícia (Obor konvergencie)

Ak M je množina všetkých hodnôt z $\bigcap D(f_n)$, pre ktoré postupnosť $f_n(x)$ konverguje, tak ju nazývame obor konvergencie.

Príklady

1. Určte obor konvergencie postupnosti $\{x^n\}$. Zobrazte niekoľko členov a odhadnite limitnú funkciu.
2. Nech $f_n(x) = (1 - x^2)^n$. Určte obor konvergencie, zobrazte niekoľko členov a odhadnite limitnú funkciu.
3. Nech $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$. Určte obor konvergencie, zobrazte niekoľko členov a odhadnite limitnú funkciu.
4. Nech $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(nx)$. Určte obor konvergencie, zobrazte niekoľko členov a odhadnite limitnú funkciu.
5. Nech $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Určte obor konvergencie, zobrazte niekoľko členov a odhadnite limitnú funkciu.

Postupnosť funkcií

Rovnomerná konvergencia postupnosti funkcií

Definícia (Rovnomerná konvergencia)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií. Hovoríme, že postupnosť $f_n(x)$ konverguje na množine $M \subseteq \bigcap D(f_n)$ rovnomerne k funkcii $f(x)$ ak:

Postupnosť funkcií

Rovnomerná konvergencia postupnosti funkcií

Definícia (Rovnomerná konvergencia)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií. Hovoríme, že postupnosť $f_n(x)$ konverguje na množine $M \subseteq \bigcap D(f_n)$ rovnomerne k funkcii $f(x)$ ak: $\forall \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n \geq n_0$ a $\forall x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Postupnosť funkcií

Rovnomerná konvergencia postupnosti funkcií

Definícia (Rovnomerná konvergencia)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií. Hovoríme, že postupnosť $f_n(x)$ konverguje na množine $M \subseteq \bigcap D(f_n)$ rovnomerne k funkcii $f(x)$ ak: $\forall \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n \geq n_0$ a $\forall x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na M.

Postupnosť funkcií

Rovnomerná konvergencia postupnosti funkcií

Definícia (Rovnomerná konvergencia)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií. Hovoríme, že postupnosť $f_n(x)$ konverguje na množine $M \subseteq \bigcap D(f_n)$ rovnomerne k funkcii $f(x)$ ak: $\forall \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n \geq n_0$ a $\forall x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na M.

V čom je rozdiel bodová $\Leftrightarrow$ rovnomerná konvergencia

Bodová: $\forall x \in M$ a $\forall \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow n = n(x, \varepsilon)$, teda pre každé x iné n_0.

Rovnomerná:$\forall \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow n = n(\varepsilon)$ a platí $\forall x \in M$. Teda jednotné n_0 spoločné pre všetky x.

Príklady

1. Ukážte, že postupnosť $\{x^n\}$ konverguje bodovo, ale nie rovnomerne.
2. Nech $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, x > 0$. Potom $\lim f_n(x) = 0$ Ukážte, že táto konvergencia je rovnomerná na $\langle a, \infty)$ pre každé $a > 0$, ale nie na $(0, \infty)$.
3. Nech $f_n(x) = x + \frac{1}{n} \sin x, x \in (-\infty, \infty)$. Ukážte, že $f_n \rightrightarrows x$.
4. Nech $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$. Rozhodnite o konvergencii na intervaloch $\langle 0, 1\rangle$ a $\langle 1, 2\rangle$.

Súčet nekonečného funkčného radu

Definícia (Bodová konvergencia funkčného radu)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií, $M \subseteq \bigcap D(f_n)$. Pre $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bodovo konverguje na množine M a má súčet $s(x)$ ak na množine M platí $s_n(x) \to s(x)$.

Súčet nekonečného funkčného radu

Definícia (Bodová konvergencia funkčného radu)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií, $M \subseteq \bigcap D(f_n)$. Pre $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bodovo konverguje na množine M a má súčet $s(x)$ ak na množine M platí $s_n(x) \to s(x)$.

Oborom konvergencie nazývame množinu $M \subseteq D = \bigcap D(f_n)$, $M = \{x \in D, \sum f_n(x) \quad \text{konverguje}\}$.

Súčet nekonečného funkčného radu

Definícia (Bodová konvergencia funkčného radu)

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií, $M \subseteq \bigcap D(f_n)$. Pre $n \in \mathbb{N}$ položme $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$. Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bodovo konverguje na množine M a má súčet $s(x)$ ak na množine M platí $s_n(x) \to s(x)$.

Oborom konvergencie nazývame množinu $M \subseteq D = \bigcap D(f_n)$,
$M = \{x \in D, \sum f_n(x) \quad \text{konverguje}\}$.

Definícia (Rovnomerná konvergencia funkčného radu)

Hovoríme, že rad $\sum f_n(x)$ konverguje rovnomerne ku svojmu súčtu, ak pre postupnosť čiastočných súčtov platí $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$.

Príklady

1. Nájdite obor konvergencie funkčného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.
2. Vyšetrite obor konvergencie funkčného radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.
3. Vyšetrite obor konvergencie funkčného radu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.
4. Určte obor konvergencie funkčného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.
5. Určte obor konvergencie funkčného radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$.

Príklady

Určte obor konvergencie funkčného radu:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}.$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}.$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$$
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$$

Príklady

Určte obor konvergencie funkčného radu:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n.$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}.$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

Kritériá rovnomernej konvergencie

Weirstrassovo kritérium

Weirstrassovo kritérium

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií, $M \subseteq \bigcap D(f_n)$. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$. Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak funkčný rad $\sum f_n(x)$ konverguje absolútne a rovnomerne na M.

Kritériá rovnomernej konvergencie

Weirstrassovo kritérium

Weirstrassovo kritérium

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií, $M \subseteq \bigcap D(f_n)$. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$. Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak funkčný rad $\sum f_n(x)$ konverguje absolútne a rovnomerne na M.

Poznámka

Nekonečný funkčný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolútne na M, ak na M konverguje funkčný rad $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Príklady

Vyšetrite konvergenciu radov

1. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cdot \sin nx$, kde $|q| < 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. (Tzv. Riemannova dzéta funkcia $\zeta(x)$).
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ na intervale $\langle \frac{1}{2}, 2\rangle$.

Príklady

Vyšetrite konvergenciu radov

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, na intervale $\langle -1, 1\rangle$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, na intervale $\langle -1, 1\rangle$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2 n^2}}{n^2}$, pre $x \in \mathbb{R}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, na intervale $\langle 0, \infty)$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, pre $x \in \mathbb{R}$.

Kritériá rovnomernej konvergencie

Dirichletovo kritérium

Dirichletovo kritérium

Nech $f_n(x)$ a $g_n(x)$ sú postupnosti funkcií, $M \subseteq \bigcap D(f_n) \cap \bigcap D(g_n)$. Nech postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum f_n(x)$ je rovnomerne ohraničená na M a postupnosť $g_n(x)$ je monotónna a $g_n \rightrightarrows 0$ na M. Potom rad $\sum g_n(x) f_n(x)$ konverguje rovnomerne na M.

Poznámka

Postupnosť funkcií $f_n(x)$ nazývame, že je:

rovnomerne ohraničená na M, ak $\exists k \in \mathbb{R}^+$ také, že $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq k$,

nerastúca (neklesajúca) na M, ak číselná postupnosť $\{f_n(x)\}$ je nerastúca (neklesajúca) $\forall x \in M$.

Kritériá rovnomernej konvergencie

Dirichletovo kritérium

Dirichletovo kritérium

Nech $f_n(x)$ a $g_n(x)$ sú postupnosti funkcií, $M \subseteq \bigcap D(f_n) \cap \bigcap D(g_n)$. Nech postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum f_n(x)$ je rovnomerne ohraničená na M a postupnosť $g_n(x)$ je monotónna a $g_n \rightrightarrows 0$ na M. Potom rad $\sum g_n(x) f_n(x)$ konverguje rovnomerne na M.

Dôsledok

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií a postupnosť jej čiastočných súčtov je rovnomerne ohraničená na M. Nech $\{a_n\}$ je monotónna číselná postupnosť, taká, že $\lim a_n = 0$. Potom rad $\sum a_n f_n(x)$ konverguje na M rovnomerne.

Príklady

1. Ukážte, že rad
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$
konverguje rovnomerne na $\langle \delta, 2\pi - \delta \rangle$, kde $0 < \delta < \pi$.
2. Rozhodnite o rovnomernej konvergencii radu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}},$$
ak $x \in \langle 0, \infty)$.

Vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov

Zachovanie spojitosti

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií a nech $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($\sum f_n(x) \rightrightarrows s(x)$) na intervale J, $x_0 \in J$. Ak všetky $f_n(x)$ sú všetky spojité v bode x_0 resp. na intervale J, tak aj funkcia $f(x)$, $(s(x))$ je spojitá v bode x_0 resp. na intervale J.

Príklady:

Postupnosti

1. $f_n(x) = x^n, x \in \langle 0, 1\rangle$.
2. $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(nx)$, $x \in \mathbb{R}$.

Funkcie $f_n(x)$ sú spojité, ale ich limita spojitá nie je.

Vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov

Limitný prechod za integračným znakom

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií a nech $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($\sum f_n(x) \rightrightarrows s(x)$) na intervale $\langle a, b\rangle$, $x_0 \in J$ a nech funkcie $f_n(x)$ sú integrovateľné na $\langle a, b\rangle$. Potom je aj funkcia $f(x)$ ($s(x)$) integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

resp.

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov

Limitný prechod za integračným znakom

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií a nech $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(\sum f_n(x) \rightrightarrows s(x))$ na intervale $\langle a, b\rangle$, $x_0 \in J$ a nech funkcie $f_n(x)$ sú integrovateľné na $\langle a, b\rangle$. Potom je aj funkcia $f(x)$ $(s(x))$ integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

resp.

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Význam

Rovnomerne konvergentú postupnosť resp. rad je možné integrovať člen po člene.

Príklady

1. Je daná postupnosť funkcií $f_n(x) = 2nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Určte $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x$. Výsledky porovnajte.
2. Určte súčet radu $\sum \frac{1}{n2^n}$.
   (Návod: Uvážte, že $\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^n}{n} + C$.)
3. Vypočítajte určitý integrál $\int_0^{2\pi} s(x)\,\mathrm{d}x$, kde funkcia

$$s(x) = 1 + \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 2x + \cdots + \frac{1}{3^n}\cos nx + \cdots .$$

Vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov

Derivovanie člen po člene

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií, ktoré majú na otvorenom intervale J derivácie $f_n'(x)$. Nech postupnosť $f_n(x)$ (rad $\sum f_n(x) = s(x)$) konverguje na intervale J, a nech na J rovnomerne konverguje postupnosť $f_n'(x)$ (rad $\sum f_n'(x)$). Potom funkcia $f(x) = \lim f_n(x)$ $(s(x))$ má na intervale J deriváciu a platí

$$f'(x) = (\lim f_n(x))' = \lim f_n'(x),$$

resp.

$$s'(x) = \left(\sum f_n(x)\right) = \sum f_n'(x).$$

Vlastnosti rovnomerne konvergentných postupností a radov

Derivovanie člen po člene

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií, ktoré majú na otvorenom intervale J derivácie $f_n'(x)$. Nech postupnosť $f_n(x)$ (rad $\sum f_n(x) = s(x)$) konverguje na intervale J, a nech na J rovnomerne konverguje postupnosť $f_n'(x)$ (rad $\sum f_n'(x)$). Potom funkcia $f(x) = \lim f_n(x)$ $(s(x))$ má na intervale J deriváciu a platí

$$f'(x) = (\lim f_n(x))' = \lim f_n'(x),$$

resp.

$$s'(x) = \left(\sum f_n(x)\right) = \sum f_n'(x).$$

Význam

Rovnomerne konvergentú postupnosť resp. rad je možné derivovať člen po člene.

Príklady

1. Určte súčet radu $\sum \frac{n}{4^n}$.
   (Návod: Uvážte, že $(x^n)' = nx^{n-1}$.)
2. Ukážte, že funkcia

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

   je diferencovateľná na $(-\infty, \infty)$.
3. Nájdite obor konvergencie a súčet radu $\sum n^2 x^n$.

Mocninový (potenčný) rad

Definícia (Mocninový rad)

Nech $\{a_n\}$ je postupnosť, $x_0 \in \mathbb{R}$. Mocninovým (potenčným) radom so stredom x_0 a koeficientmi a_n nazývame funkčný rad v tvare

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Poznámka

Špeciálne, pre $x_0 = 0$ máme rad $\sum a_n x^n$. Pretože jednoduchou substitúciou $x - x_0 = z$ je možné mocninový rad s ľubovoľným stredom previesť na mocninový rad so stredom v začiatku, budeme sa ďalej zaoberať iba radmi tvaru $\sum a_n x^n$.

Obor konvergencie mocninového radu

Veta

Nech $\sum a_n x^n$ je mocninový rad a nech

$$a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ak je $a = 0$, rad konverguje pre každé $x \in \mathbb{R}$ (hovoríme, že rad vždy konverguje).
Ak je $a = \infty$, rad diverguje pre každé $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ (hovoríme, že rad vždy diverguje).
Ak je $0 < a < \infty$, rad absolútne konverguje pre $|x| < \frac{1}{a}$ a diverguje pre $|x| > \frac{1}{a}$.
Číslo $r = \frac{1}{a}$ nazývame polomer konvergencie a interval $(-r, r)$ konvergenčný interval.

Príklady

Určte polomer konvergencie radu

1. $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$,
2. $\sum \frac{x^n}{(n+1)5^n}$,
3. $\sum (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$, kde $p \in \mathbb{R}$,
4. $\sum 2^n x^{2n}$,
5. $\sum \frac{x^n}{n}$,
6. $\sum \frac{2^n}{n^2} x^n$,
7. $\sum \frac{nx^n}{n!}$.

Príklady

Určte polomer konvergencie a obor konvergencie radu

1. $\sum \frac{n+1}{n} x^n$,
2. $\sum \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}$,
3. $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$,
4. $\sum \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$,
5. $\sum \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$,
6. $\sum \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$,
7. $\sum n^2 x^n$.

Vlastnosti mocninových radov

Veta

Nech mocninový rad $\sum a_n x^n$ má polomer konvergencie $r > 0$. Potom tento rad konverguje rovnomerne na každom uzavretom podintervale $\langle -\rho, \rho \rangle$ intervalu $(-r, r)$.

Dôsledky

Pre mocninový rad s polomerom konvergencie $r > 0$ platí:

1. $\int_a^b \sum a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum \int_a^b a_n x^n \,\mathrm{d}x$,kde $\langle a, b \rangle \subset (-r, r)$.
2. $(\sum a_n x^n)' = \sum (a_n x^n)' = \sum n a_n x^{n-1}$.

Príklady

1. Vyjadrite funkciu $\ln(1+x)$ ako mocninový rad a s jeho pomocou vyjadrite súčet Leibnitzovho radu $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$
2. Určte polomer konvergencie a súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.
3. Určte polomer konvergencie a súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

Príklady

Určte polomer konvergencie a súčet radu

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n,$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1},$$

Taylorov rad

Definícia (Taylorov rad)

Nech $f(x)$ je funkcia, ktorá má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ derivácie všetkých rádov. Pod Taylorovým radom tejto funkcie v bode x_0 rozumieme mocninový rad

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots ,$$

tj. rad

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ak je $x_0 = 0$, hovoríme o Maclaurinovom rade,ktorý má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Taylorov rad

Konvergencia Taylorovho radu

Definícia (Taylorov zvyšok)

Taylorovým zvyškom nazývame funkciu $R_n(x)$, pre ktorú platí

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{kde} \quad \xi \in J, \xi \neq x, x_0.$$

Veta

Nech funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ derivácie všetkých rádov. Taylorov rad funkcie f v bode x_0 konverguje na nejakom intervale J obsahujúcom bod x_0 k funkcii f:

a) Práve vtedy ak pre postupnosť Taylorových zvyškov platí $\lim R_n = 0$ na J.

b) Postupnosť derivácií $f^{(n)}$ je rovnomerne ohraničená na J.

Príklady

Nájdite Maclaurinov rad elementárnych funkcií:

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
4. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1).$
5. $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad x \in (-1,1)$ kde $a \in \mathbb{R}$ a číslo

$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$ je binomický koeficient.

Príklady

Rozviňte do Maclaurinovho radu a určte obor konvergencie:

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
3. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
4. $f(x) = e^{-x^2}$.

Rozviňte doTaylorovho radu funkcie:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ v bode $x_0 = -2$.
2. $f(x) = \sin\frac{x\pi}{4}$ v bode $x_0 = 2$.

Príklady

1. Určte hodnoty:
   a) $\sin 18^\circ$ s chybou menšou než 10^{-4}.
   b) $\sqrt[5]{250}$ s chybou menšou než 10^{-3}.
2. Koľko členov rozvoja nasledujúcich funkcií je treba vypočítať, aby sme určili $\ln 2$ s chybou menšou než 10^{-5}
   a) $\ln(x+1)$.
   b) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
3. Určte súčet mocninových radov:
   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{2^n n!} x^n$.

Príklady

S použitím Tayrovho radu

1. Určte hodnoty:
   a) siedmej derivácie $f : y = \frac{x}{1+x^2}$ v bode 0,
   b) piatej derivácie $f : y = x^2 \sqrt[4]{1+x}$ v bode 0,
   c) desiatej derivácie $f : y = x^6 \cdot e^x$ v bode 0.
2. Vypočítajte limity:
   a) $\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$,
   b) $\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$.
3. Vypočítajte integrály
   a) $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$,
   b) $\int \frac{e^x}{x^2}\, dx$,
   c) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$,
   d) $\int_0^x \sqrt{1+t^3}\, dt$.