Teória pravdepodobnosti

8. Funkcie náhodných premenných

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

18. novembra 2015

Funkcia náhodnej premennej
Motivácia

Pretože náhodná premenná je reálnou funkciou a zložením dvoch funkcií získame inú funkciu, má zmysel uvažovať o náhodnej premennej $Y = g(X)$, kde g je nejaká reálna funkcia definovaná na $\mathbb{R}$.

Dostávame tak novú náhodnú premennú, ktorej zákony rozdelenia budeme analyzovať

Typickým príkladom môže byť napr. potreba transformácie jednotiek merania, pri prechode z jednej krajiny do druhej.

Funkcia náhodnej premennej
Príklad - diskrétny prípad

Lineárna transformácia náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná so známou distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = aX + b$, kde $a \neq 0$ a b sú dané konštanty.
Ak je X diskrétna, tak ľahko nájdeme pravdepodobnostnú funkciu p_Y náhodnej premennej Y:

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(aX + b = y)$$
$$= \mathbb{P}\left(X = \frac{y-b}{a}\right) = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Inak, ak x je prípustná hodnota X, t.j. $p_X(x) \neq 0$, tak $p_Y(y) = p_X(x)$, kde $y = ax + b$.

Funkcia náhodnej premennej

Príklad - spojitý prípad

Lineárna transformácia náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná so známou distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = aX + b$, kde $a \neq 0$ a b sú dané konštanty.
Ak je X spojitá, tak musíme transformovať distribučnú funkciu[a]. Pre $a > 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(aX + b \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \end{aligned}$$

Pre $a < 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(aX + b \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \end{aligned}$$

[a] Hustota nemá význam „pravdepodobnosti“

Funkcia náhodnej premennej
Príklad - spojitý prípad

Lineárna transformácia náhodnej premennej

Nech X je spojitá a má hustotu f_X. Potom F_X je diferencovateľná a platí $f_X = F_X'$. Potom je aj F_Y diferencovateľná a pretože Y je tiež spojitá, tak platí:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{|a|} F_X'\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Funkcia náhodnej premennej

Výsledky teraz zovšeobecníme. Najskôr sa venujeme prípadu, kedy je Y invertovateľnou funkciou náhodnej premennej X.

Veta

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = g(X)$, kde g je injektívna funkcia na $\mathbb{R}$.

Ak X je diskrétna, tak pravdepodobnostná funkcia p_Y náhodnej premennej Y je daná vzťahom

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X\left(g^{-1}(y)\right) & \text{ak } \exists x \in H(X)\ y = g(x) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{1}$$

Funkcia náhodnej premennej

Výsledky teraz zovšeobecníme. Najskôr sa venujeme prípadu, kedy je Y invertovateľnou funkciou náhodnej premennej X.

Veta

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = g(X)$, kde g je injektívna funkcia na $\mathbb{R}$.

Ak X je ľubovoľného typu a g je rastúca, tak distribučná funkcia F_Y náhodnej premennej Y je daná vzťahom

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{ak } y < g(x)\ \forall x \in H(X) \\ F_X\left(g^{-1}(y)\right) & \text{ak } \exists x \in H(X)\ y = g(x) \\ 1 & \text{ak } y > g(x)\ \forall x \in H(X). \end{cases} \tag{1}$$

Funkcia náhodnej premennej

Výsledky teraz zovšeobecníme. Najskôr sa venujeme prípadu, kedy je Y invertovateľnou funkciou náhodnej premennej X.

Veta

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = g(X)$, kde g je injektívna funkcia na $\mathbb{R}$.

Ak X je ľubovoľného typu a g je klesajúca, tak distribučná funkcia F_Y náhodnej premennej Y je daná vzťahom

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{ak } y < g(x)\ \forall x \in H(X) \\ 1 - \lim\limits_{t \to y^+} F_X\left(g^{-1}(t)\right) & \text{ak } \exists x \in H(X)\ y = g(x) \\ 1 & \text{ak } y > g(x)\ \forall x \in H(X). \end{cases} \tag{1}$$

Funkcia náhodnej premennej

Výsledky teraz zovšeobecníme. Najskôr sa venujeme prípadu, kedy je Y invertovateľnou funkciou náhodnej premennej X.

Veta

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = g(X)$, kde g je injektívna funkcia na $\mathbb{R}$.

Ak X je spojitá a má hustotu f_X, g je diferencovateľná a navyše injektívna, tak Y má hustotu f_Y a platí

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y)\right| = \frac{f_X(x)}{g'(x)} & \exists x \in H(X)\ y = g(x) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{1}$$

Funkcia náhodnej premennej
Príklad

Štvorec binomickej náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s binomickým rozdelením $X \sim \mathrm{Bin}\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Položme $Y = X^2$ a určme jej pravdepodobnostnú funkciu.

Funkcia náhodnej premennej
Príklad

Štvorec binomickej náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s binomickým rozdelením $X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Položme $Y = X^2$ a určme jej pravdepodobnostnú funkciu.

Pravdepodobnostnú funkciu p_Y zistíme z tabuľky:

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9
$p_X(x) = p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Funkcia náhodnej premennej
Príklad

Štvorec rovnomernej náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením $X \sim \mathrm{Ro}\,(1,3)$. Položme $Y = X^2$ a určme jej funkciu hustoty.

Funkcia náhodnej premennej

Príklad

Štvorec rovnomernej náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením $X \sim \text{Ro}\,(1,3)$. Položme $Y = X^2$ a určme jej funkciu hustoty.

Pre hustotu náhodnej premennej X platí

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in \langle 1; 3 \rangle \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Funkcia $g(X) = X^2$ je pre X kladné injektívna, a tak

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(Y < y\right) = \mathbb{P}\left(X^2 < y\right) = \mathbb{P}\left(X < \sqrt{y}\right) = F_X(\sqrt{y})$$

Funkcia náhodnej premennej

Príklad

Štvorec rovnomernej náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením $X \sim \mathrm{Ro}\,(1,3)$. Položme $Y = X^2$ a určme jej funkciu hustoty.

Derivovaním potom dostávame

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_X(\sqrt{y})}{\mathrm{d}y} = f_X(\sqrt{y})\frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y}$$

a odtiaľ

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{4\sqrt{y}} & y \in \langle 1; 9\rangle \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Rovnaký výsledok by sme dostali aj priamym dosadením do posledného vzťahu z predchádzajúcej vety.

Generovanie náhodných čísiel

Predchádzajúca veta poskytuje návod na generovanie náhodných čísiel.

Väčšina počítačov disponuje generátorom náhodných (presnejšie pseudonáhodných) čísiel, ktorý však generuje náhodné hodnoty, ktoré sú rovnomerne rozdelené na intervale $\langle 0; 1\rangle$.

Často ale potrebujeme generovať náhodné čísla s určitým rozdelením, čo si vyžaduje transformovanie rovnomerne rozdelenej náhodnej premennej na nové hodnoty s požadovaným rozdelením.

Generovanie náhodných čísiel

Predpokladajme, že chceme generovať náhodné čísla zodpovedajúce spojitému rozdeleniu s distribučnou funkciou F, kde F je rastúca.

Potom F má rastúcu inverznú funkciu F^{-1} na $\langle 0; 1 \rangle$, ktorú použijeme ako transformačnú funkciu g.

Ak teda položíme $Y = F^{-1}(X)$, kde $X \sim \mathrm{Ro}\,(0, 1)$, tak podľa vety dostávame

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\,(Y < y) = \mathbb{P}\left(F^{-1}(X) < y\right) = \mathbb{P}\,(X < F(y)) = F(y).$$

Posledný krok vyplýva zo skutočnosti, že pre $X \sim \mathrm{Ro}\,(0, 1)$ na $\langle 0; 1 \rangle$ platí $\mathbb{P}\,(X < x) = x$.

Generovanie náhodných čísiel

Generovanie náhodných čísiel s daným rozdelením

Ak sú teda $x_1, x_2, \ldots$ náhodné čísla, ktoré sú rovnomerne rozdelené na intervale $\langle 0; 1\rangle$, tak čísla $y_1 = F^{-1}(x_1), y_2 = F^{-1}(x_2), \ldots$ sú náhodné čísla, ktorých rozdelenie je dané distribučnou funkciou F.

Funkcia náhodnej premennej
Príklad

Štvorec náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X. Položme $Y = X^2$ a určme jej pravdepodobnostnú funkciu resp. hustotu.

Funkcia náhodnej premennej
Príklad

Štvorec náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X. Položme $Y = X^2$ a určme jej pravdepodobnostnú funkciu resp. hustotu.

Ak X je diskrétna, dostaneme pravdepodobnostnú funkciu

$$p_Y(y) = \mathbb{P}\left(X^2 = y\right) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(X = \pm\sqrt{y}\right) = p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y}) & y > 0 \\ \mathbb{P}\left(X = 0\right) = p_X(0) & y = 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Funkcia náhodnej premennej
Príklad

Štvorec náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X. Položme $Y = X^2$ a určme jej pravdepodobnostnú funkciu resp. hustotu.

Ak X je spojitá, dostaneme pre distribučnú funkciu F_Y

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(X^2 < y\right) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\right) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Funkcia náhodnej premennej
Príklad

Štvorec náhodnej premennej

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X. Položme $Y = X^2$ a určme jej pravdepodobnostnú funkciu resp. hustotu.

Ak X je spojitá a má hustotu f_X, tak derivovaním predchádzajúceho výsledku dostaneme

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Funkcia náhodnej premennej, všeobecný prípad

Veta

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = g(X)$, kde g je ľubovoľná funkcia na $\mathbb{R}$. Označme $g^{-1}(A)$ vzor množiny $A \subseteq \mathbb{R}$ pri zobrazení g, $g^{-1}(A) = \{x : g(x) \in A\}$.

Ak X je diskrétna, tak pravdepodobnostná funkcia p_Y náhodnej premennej Y je daná vzťahom

$$p_Y(y) = \begin{cases} \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} p_X(x) & \text{ak } \exists x \in H(X)\ y = g(x) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{2}$$

Funkcia náhodnej premennej, všeobecný prípad

Veta

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = g(X)$, kde g je ľubovoľná funkcia na $\mathbb{R}$. Označme $g^{-1}(A)$ vzor množiny $A \subseteq \mathbb{R}$ pri zobrazení g, $g^{-1}(A) = \{x : g(x) \in A\}$.

Ak X je spojitá a má hustotu f, a I je interval v $\mathbb{R}$, tak pre g také, že $\{X \in g^{-1}(I)\}$ je udalosť platí

$$\mathbb{P}\left(Y \in I\right) = \int_{x:g(x)\in I} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x:x\in g^{-1}(I)} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Funkcia náhodnej premennej, všeobecný prípad

Veta

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = g(X)$, kde g je ľubovoľná funkcia na $\mathbb{R}$. Označme $g^{-1}(A)$ vzor množiny $A \subseteq \mathbb{R}$ pri zobrazení g, $g^{-1}(A) = \{x : g(x) \in A\}$.

Ak X je ľubovoľného typu, tak distribučná funkcia F_Y náhodnej premennej Y je určená rozdelením X vzťahom

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty; y\rangle)\right), \tag{2}$$

pričom g je taká funkcia, že $g^{-1}((-\infty; y\rangle)$ je udalosť.

Funkcia náhodnej premennej, všeobecný prípad

Veta

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a definujme novú náhodnú premennú $Y = g(X)$, kde g je ľubovoľná funkcia na $\mathbb{R}$. Označme $g^{-1}(A)$ vzor množiny $A \subseteq \mathbb{R}$ pri zobrazení g, $g^{-1}(A) = \{x : g(x) \in A\}$.

Ak X je spojitá a má hustotu f_X, g je diferencovateľná a navyše je množina $g^{-1}(\{y\})$ pre každé $y \in \mathbb{R}$ nanajvýš spočítateľná a $g'(x) \neq 0$ na $g^{-1}(\{y\})$, tak Y má funkciu hustoty f_Y danú vzťahom

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{g^{-1}(\{y\})} \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} & \exists x \in H(X)\ y = g(x) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{2}$$

Funkcia náhodného vektora

Všeobecne je možné definovať funkciu n-premenných, ktorá n-tici reálnych čísel priradí nejakú hodnotu z $\mathbb{R}$.

Ak funkciu aplikujeme na n-rozmerný náhodný vektor, výsledkom je nová náhodná premenná.

Ak $(X_1, \dots, X_n)$ je náhodný vektor, hľadáme rozdelenie náhodnej premennej $Y = f(X_1, \dots, X_n)$, resp. náhodného vektora $(Y_1, \dots, Y_n) = (f_1(X_1, \dots, X_n), \dots, f_n(X_1, \dots, X_n))$.

Funkcia náhodného vektora

Diskrétny prípad

Veta

Nech $(X_1, \dots, X_n)$ je diskrétny náhodný vektor s pravdepodobnostnou funkciou $p_X(x_1, \dots, x_n)$ a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borelovská funkcia[a]. Pre pravdepodobnostnú funkciu $p_Y(y)$ náhodnej premennej $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ platí

$$p_Y(y) = \sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in g^{-1}(y)} p_X(x_1, \dots, x_n). \tag{3}$$

[a] Teda vzorom borelovskej množiny je borelovská množina.

Funkcia náhodného vektora

Spojitý prípad

Veta

Nech $(X_1, \ldots, X_n)$ je spojitý náhodný vektor so združenou hustotou $f_X(x_1, \ldots, x_n)$ a združenou distribučnou funkciou $F_X(x_1, \ldots, x_n)$ a nech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je borelovská funkcia[a]. Pre distribučnú funkciu $F_Y(y)$ a hustotu $f_Y(y)$ náhodnej premennej $Y = g(X_1, \ldots, X_n)$ platí

$$F_Y(y) = \underset{S(y)}{\int \cdots \int} f_X(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{4}$$

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}, \tag{5}$$

kde $S(y) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \ldots, x_n) \leq y\}$.

[a] Teda vzorom borelovskej množiny je borelovská množina.

Funkcia náhodného vektora
Príklad

Rozdelenie súčtu súradníc bodu

Nech náhodné body (X, Y) sú rovnomerne rozdelené v jednotkovom štvorci $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Určme rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $Z = X + Y$.

Funkcia náhodného vektora
Príklad

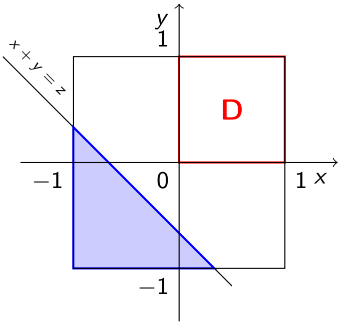
Podľa vety máme

$$F_Z(z) = \mathbb{P}\left(X + Y < z\right) = \iint\limits_{\{x+y<z\}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\{x+y<z\}\cap D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

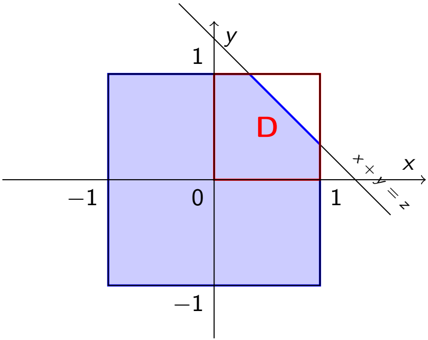
$F_Z(z)$ je teda rovná ploche tej časti štvorca D, ktorá leží pod priamkou $x + y = z$ na obrázku 1 resp. 2.

Funkcia náhodného vektora

Príklad



Obr. 1: Oblasť $\{x + y < z\} \cap D$ ak $z < 0$.



Obr. 2: Oblasť $\{x + y < z\} \cap D$ ak $z > 0$.

Funkcia náhodného vektora
Príklad

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{z^2}{2} & 0 < z \leq 1 \\ 1 - \left[\frac{(2-z)^2}{2}\right] & 1 < z \leq 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$

a pre hustotu platí

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ z & 0 < z \leq 1 \\ 2 - z & 1 < z \leq 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases}$$

Rozdelenie súčtu náhodných premenných

Veta (O konvolúcii)

Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné nech X má hustotu f_X a Y má hustotu f_Y. Potom náhodná premenná $Z = X + Y$ má hustotu

$$f_Z(z) = \int f_X(x) f_Y(z - x)\, \mathrm{d}x. \tag{6}$$

Rozdelenie súčtu náhodných premenných
Dôkaz

Vzhľadom na nezávislosť pre združenú funkciu hustoty náhodných premenných X a Y platí $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Ak na funkciu $f(x, y)$ aplikujeme (4) a následne (5), tak dostaneme tvrdenie vety.

Treba si uvedomiť, že pre integračnú oblasť S platí
$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < z\}$.

Rozdelenie súčtu náhodných premenných

Dôkaz

$$\begin{aligned} F_Z(z) = \mathbb{P}(Z < z) = \mathbb{P}(X + Y < z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot F_Y(z-x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Hustotu určíme derivovaním podľa z:

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot F_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

Rozdelenie súčtu náhodných premenných
Príklad

Zadanie

Nech náhodné premenné X a Y sú nezávislé a obe majú exponenciálne rozdelenie s parametrom λ, teda ich hustota je daná vzťahom

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Nájdime hustotu náhodnej premennej $Z = X + Y$.

Rozdelenie súčtu náhodných premenných

Riešenie

Podľa (6) dostávame

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_X(z-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(z-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda z} \int_0^{z} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda z}\,z. \end{aligned}$$

To je hustota gama rozdelenia s parametrami 2 a λ.

Štvorec normálneho rozdelenia

Zadanie

Nech náhodná premenná X má normálne rozdelenie N(0,1), teda jej hustota má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Nájdime hustotu náhodnej premennej $Y = X^2$.

Štvorec normálneho rozdelenia

Riešenie

Označíme distribučnú funkciu náhodnej premennej Y ako $G(y)$. Je zrejme, že $G(y) = 0$ ak $y \leq 0$. Riešime teda pre prípad $y > 0$. Dostávame:

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbb{P}\left(Y < y\right) = \mathbb{P}\left(X^2 < y\right) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\right) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1, \end{aligned}$$

pretože $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Štvorec normálneho rozdelenia
Riešenie

Derivovaním dostávame:

$$g(y) = G'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\varphi\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\,.$$

Definícia

Rozdelenie náhodnej premennej Y sa nazýva *χ^2 rozdelenie s jedným stupňom voľnosti*[a] a označuje sa $\chi^2(1)$. Zapisujeme $Y \sim \chi^2(1)$

[a] Čítame chí-kvadrát rozdelenie.

Rozdelenie chí-kvadrát

Nech náhodné premenné X_i, $i = 1, \ldots, n$ sú nezávislé a majú rozdelenie N(0,1). Určíme rozdelenie náhodnej premennej $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$. Už vieme, že pre $n = 1$ je

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0.$$

Ďalej postupujeme indukciu. Predpokladajme, že pre súčet n náhodných premenných platí

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Určíme $f_{n+1}(x)$.

Rozdelenie chí-kvadrát

Tak dostávame konvolúciu

$$f_{n+1}(z) = \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(z-x)}} \mathrm{e}^{-\frac{z-x}{2}} \,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot (z-x)^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^z x^{\frac{n}{2}-1} \cdot (z-x)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Rozdelenie chí-kvadrát

Ak využijeme vlastnosť $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ tak máme

$$f_{n+1}(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$
$$= \frac{e^{-\frac{z}{2}} \cdot z^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Indukciou sme teda odvodili funkciu hustoty rozdelenia chí-kvadrát v zmysle nasledovnej definície.

Rozdelenie chí-kvadrát

Definícia (Rozdelenie $\chi^2(n)$, chí-kvadrát s n stupňami voľnosti)

Hovoríme, že náhodná premenná X má *rozdelenie chí-kvadrát s n stupňami voľnosti* a píšeme $X \sim \chi^2(n)$ ak jej hustota má tvar

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x > 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Studentovo t-rozdelenie

Nech náhodná premenná X má rozdelenie N(0,1) a náhodná premenná Y má rozdelenie $\chi^2(n)$, a nech náhodné premenné X a Y sú nezávislé. Položme $U = \sqrt{\frac{Y}{n}}$ a vyšetríme rozdelenie náhodnej premennej $Z = \frac{X}{U}$.

Vieme, že Y má hustotu

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{y}{2}}\, y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad y > 0.$$

preto $U = \sqrt{\frac{Y}{n}}$ má hustotu

$$f_U(u) = \frac{n^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{nu^2}{2}}\, u^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad u > 0.$$

Studentovo t-rozdelenie

Podľa predpokladu sú náhodné premenné X a Y nezávislé, preto ich združená hustota bude súčinom marginálnych hustôt.

Využijeme z cvičení odvodený vzťah pre hustotu podielu dvoch nezávislých náhodných premenných

$$f_{\frac{X}{Y}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(yz) f_Y(y) |y| \, \mathrm{d}y.$$

Tak postupne dostávame výsledok.

Studentovo t-rozdelenie

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2y^2}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{ny^2}{2}}\,y^{n-1}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(z^2+n)y^2}{2}}\,y^n\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)2^{\frac{n-1}{2}}}{(n+z^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \\
&= \frac{n^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(n+z^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Studentovo t-rozdelenie

Odvodili sme teda hustotu tzv. t-rozdelenia.

Definícia (Studentovo t-rozdelenie)

Hovoríme, že náhodná premenná X sa riadi *Studentovým t-rozdelením s n stupňami voľnosti*, kde $n \in \mathbb{N}$, a zapisujeme $X \sim t(n)$ ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Fisherovo F-rozdelenie

Nech náhodné premenné X_1 a X_2 sú nezávislé a X_1 má rozdelenie $\chi^2(n_1)$ a x_2 má rozdelenie $\chi^2(n_2)$. Položme

$$Z = \frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}}$$

a zaujíma nás rozdelenie náhodnej premennej Z.

Fisherovo F-rozdelenie

Náhodné premenné X_1 a X_2 majú hustoty

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) 2^{\frac{n_1}{2}}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0,$$

a

$$f_{X_2}(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right) 2^{\frac{n_2}{2}}} y^{\frac{n_2}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, \quad x > 0.$$

Pretože sú nezávislé, ich združená funkcia hustoty má tvar

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(xy) &= \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) 2^{\frac{n_1}{2}}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right) \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right) 2^{\frac{n_2}{2}}} y^{\frac{n_2}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right) 2^{\frac{n_1+n_2}{2}}} x^{\frac{n_1}{2}-1} y^{\frac{n_2}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, \; x, y > 0. \end{aligned}$$

Fisherovo F-rozdelenie

Určme teraz distribučnú funkciu náhodnej premennej $\frac{X_1}{X_2}$. Platí

$$F_{\frac{X_1}{X_2}}(z) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1}{X_2} < z\right) = \mathbb{P}\left(X_1 < zX_2\right).$$

Integrovaním podľa x a potom podľa y dostávame

$$\mathbb{P}\left(X_1 < zX_2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)2^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \cdot \\ \cdot \int_0^{\infty}\left(\int_0^{zy} x^{\frac{n_1}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\right) y^{\frac{n_2}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y.$$

Fisherovo F-rozdelenie

Derivovaním predchádzajúceho integrálu podľa x a prechodom derivácie za prvý integrál dostávame

$$f_{\frac{X_1}{X_2}}(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)2^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\int_0^\infty \left[(yz)^{\frac{n_1}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{yz}{2}}\,y\right] y^{\frac{n_2}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{z^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)2^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\int_0^\infty y^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{z+1}{2}y}\,\mathrm{d}y.$$

Fisherovo F-rozdelenie

Pripomeňme, že funkcia

$$f(y) = \frac{\left(\frac{z+1}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}\right)} y^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{z+1}{2}y},$$

je funkciou hustoty Gama rozdelenia s parametrami $a = \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2}$ a $\delta = \frac{z}{2}$. Preto $\int_0^\infty f(y)\,\mathrm{d}y = 1$.Tak dostávame

$$\begin{aligned} f_{\frac{X_1}{X_2}}(z) &= \frac{z^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)2^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}\right)}{\left(\frac{z+1}{2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{z^{\frac{n_1}{2}-1}}{(z+1)^{\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}}}. \end{aligned}$$

Fisherovo F-rozdelenie

Odtiaľ máme

$$f_Z(z) = f_{\frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}}}(z) = f_{\frac{n_2}{n_1}\frac{X_1}{X_2}} = \frac{n_1}{n_2} f_{\frac{X_1}{X_2}}\left(\frac{n_1}{n_2}z\right)$$

$$= \frac{n_1}{n_2}\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}z\right)^{\left(\frac{n_1}{2}\right)-1}}{\left(\frac{n_1}{n_2}z+1\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} z^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)(n_2+n_1z)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}.$$

Fisherovo F-rozdelenie

Po úprave môžeme definovať

Definícia (Fisherovo rozdelenie F)

Náhodná premenná X sa riadi *Fisherovým F-rozdelením* $\mathrm{F}(n_1, n_2)$ s n_1 a n_2 stupňami voľnosti, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Zapisujeme $X \sim \mathrm{F}(n_1, n_2)$.