Teória pravdepodobnosti

4. Náhodná premenná

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

15. novembra 2015

Pojem náhodnej premennej

Zhruba povedané, pod náhodnou premennou si môžeme predstaviť zobrazenie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, ktoré každej elementárnej udalosti priradí nejakú číselnú hodnotu.

Ak je teda $\omega \in \Omega$, tak náhodná premenná mu priradí hodnotu $X(\omega)$, ktorú nazveme *hodnota náhodnej premennej v bode $\omega \in \Omega$*.

Ku každej náhodnej premennej vieme priradiť niekoľko príbuzných množín, závislých od hodnôt, ktoré náhodná premenná nadobúda.

Pojem náhodnej premennej

Definujeme podmnožinu $A_X \subset \Omega$ výberového priestoru, ktorá obsahuje všetky elementárne javy, ktorým náhodná premenná priraďuje rovnakú hodnotu, teda

$$A_x = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\} = [X = x] \,.$$

Podobne pre každé $x \in \mathbb{R}$ a pre každé pevné $a, b \in \mathbb{R}$ definujeme množiny

$$\begin{aligned} [X < x] &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}. \\ [X \geq x] &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq x\}. \\ [a < X < b] &= \{\omega \in \Omega | a < X(\omega) < b\}. \end{aligned}$$

Definícia náhodnej premennej

Je prirodzené požadovať, aby sme vedeli všetkým vyššie uvedeným množinám priradiť pravdepodobnosť t.j. aby uvedené množiny boli náhodnými udalosťami. Tak dospievame k definícii náhodnej premennej.

Definícia (Náhodná premenná)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Zobrazenie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme *náhodná premenná*, ak pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}.$$

Definícia náhodnej premennej

Definícia vlastne hovorí, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ je vzorom intervalu $(-\infty, x)$ nejaká náhodná udalosť $A = \{\omega : X(\omega) < x\}$, ktorá patrí do σ-algebry $\mathcal{F}$.

Hodnoty $X(\omega)$ nazývame *realizáciami náhodnej premennej X*.

Náhodné premenné je zvykom označovať veľkými písmenami z konca abecedy (teda X, Y, Z) a ich možné hodnoty zodpovedajúcimi malými písmenami x, y, z.

Definícia náhodnej premennej
Príklad

Tento príklad ukazuje súvislosť medzi náhodnou premennou a σ-algebrou, definovanou na Ω.

Zadanie

Uvažujme hod dvomi mincami. Výberový priestor príslušný ku tomuto náhodnému pokusu obsahuje štyri rovnako pravdepodobné elementárne udalosti

$$\Omega = \{(h,h),(h,z),(z,h),(z,z)\},$$

kde h znamená padnutie hlavy a z padnutie znaku. Analyzujme náhodnú premennú X, ktorá každému možnému výsledku priradí počet padnutých znakov.

Definícia náhodnej premennej
Príklad

Náhodná premenná X môže nadobúdať tri hodnoty z množiny $\{0, 1, 2\}$. Môžeme jej priradiť napr. tieto náhodné udalosti

$$
\begin{aligned}
[X < 0] &= \emptyset, \\
[X < 1] &= \{(h, h)\}, \\
[X < 2] &= \{(h, h), (h, z), (z, h)\}, \\
[X < 3] &= \{(h, h), (h, z), (z, h), (z, z)\},
\end{aligned}
$$

Definícia náhodnej premennej

Príklad

Už vieme, že na každom výberovom priestore môžeme definovať dve elementárne σ-algebry.

Prvá obsahuje len množiny $\emptyset$ a Ω, a vzhľadom na túto σ-algebru nie je premenná X náhodnou premennou. (napr. množina $[X < 1]$ nepatrí do tejto σ-algebry.)

Druhou je systém všetkých podmnožín výberového priestoru Ω. Vzhľadom na túto σ-algebru je ale každá premenná X náhodnou premennou.

Pokúsime sa teda zostrojiť neelementárnu σ-algebru tak, aby X bola náhodnou premennou vzhľadom na túto σ-algebru.

Definícia náhodnej premennej
Príklad

Systém množín $[X < 0]$, $[X < 1]$, $[X < 2]$, $[X < 3]$ je treba obohatiť tak, aby vznikla σ-algebra.

Najskôr pridáme doplnkové udalosti $[X < 2]^c = \{(z, z)\}$ a $[X < 1]^c = \{(h, z), (z, h), (z, z)\}$.

Ďalej je treba systém doplniť tak, aby bol uzavretý vzhľadom na všetky zjednotenia množín v ňom obsiahnutých. Je teda treba pridať množinu $\{(h, h), (z, z)\}$, ktorá je zjednotením $[X < 1]$ a $\{(z, z)\}$. Všetky ostatné zjednotenia sú už v systéme obsiahnuté.

Treba ešte pridať doplnkovú udalosť $\{(h, h), (z, z)\}^c$, čo je množina $\{(h, z), (z, h)\}$.

Definícia náhodnej premennej
Príklad

Ľahko overíme, že sme získali neelementárnu σ-algebru.

Pre túto σ-algebru platí

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 = &\{\emptyset, \{(h,h)\}, \{(z,z)\}, \{(h,h),(z,z)\}, \{(h,z),(z,h)\},\\ &\{(h,h),(h,z),(z,h)\}, \{(h,z),(z,h),(z,z)\},\\ &\{(h,h),(h,z),(z,h),(z,z)\}\}.\end{aligned}$$

Definícia náhodnej premennej
Príklad

Ak naopak zavedieme neelementárnu σ-algebru

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 =&\{\emptyset, \{(h,z),(z,h)\}, \{(h,h),(z,z)\},\\ &\{(h,h),(h,z),(z,h),(z,z)\}\}.\end{aligned}$$

Množina $[X < 1]$ ani $[X < 2]$ nie je náhodnou udalosťou vzhľadom ku tejto σ-algebre.

Definícia náhodnej premennej
Príklad

Iným príkladom náhodnej premennej X môže byť doba čakania klienta na obsluhu, ktorá nadobúda hodnoty z uzavretého intervalu $\langle 0, T\rangle$.

Nech x je ľubovoľné reálne číslo z intervalu $\langle 0, T\rangle$. Pretože náhodná premenná X nadobúda hodnoty len z $\langle 0, T\rangle$, je interval $(-\infty, x)$ vzorom intervalu $\langle 0, x)$.

To ale znamená, že množiny $[X < x]$ sú prvkami σ-algebry generovanej systémom intervalov, teda ide o náhodnú premennú.

σ-algebru, generovanú systémom intervalov nazývame *borelovské množiny*.

Rozdelenie náhodných premenných

Definícia

Ak náhodná premenná nadobúda nanajvýš spočítateľne veľa hodnôt, tak hovoríme o *diskrétnej náhodnej premennej*.

Definícia

Ak náhodná premenná nadobúda všetky hodnoty z nejakého (ohraničeného aj neohraničeného) intervalu, tak hovoríme o *spojitej náhodnej premennej*.

Distribučná funkcia

Definícia

Distribučnou funkciou náhodnej premennej X budeme nazývať funkciu $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je určená vzťahom

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left(X < x\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Poznámka

Hodnota distribučnej funkcie má aj svoj význam. $F_X(x)$ udáva pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobúda hodnoty menšie ako x.

Distribučná funkcia

Príkald

Zadanie

Nech A je nejaká náhodná udalosť, ktorá nastáva s pravdepodobnosťou $\mathbb{P}(A) = p$ a s pravdepodobnosťou $1 - p$ nenastane. Definujeme náhodnú premennú I_A takto:

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{udalosť } A \text{ nastala} \\ 0 & \text{udalosť } A \text{ nenastala} \end{cases}$$

Distribučná funkcia

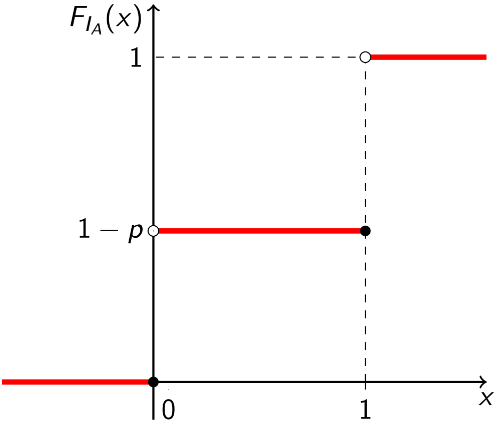
Príkald

Pre distribučnú funkciu tejto náhodnej premennej platí

$$F_{I_A}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Zavedenú náhodnú premennú I_A nazývame *indikátor náhodnej udalosti A*.

Distribučná funkcia
Príkald



Obr. 1: Graf distribučnej funkcie $F_{I_A}(x)$ indikátoru náhodnej udalosti I_A z príkladu.

Distribučná funkcia
Príkald

Zadanie

Uvažujme opäť náhodnú premennú X, ktorá popisuje dobu čakania zákazníka na obsluhu. Táto náhodná premenná môže nadobúdať hodnoty z uzavretého intervalu $\langle 0; T\rangle$. Pri tom je každá doba z tohto intervalu rovnako pravdepodobná.

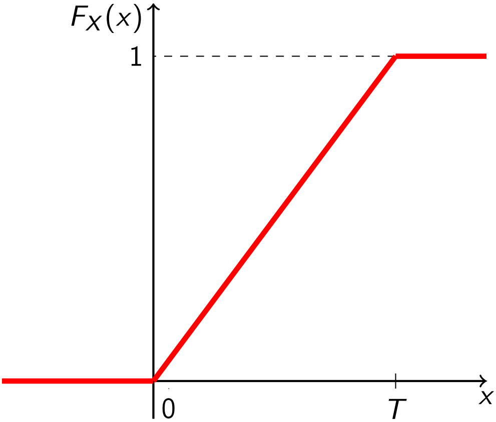
Distribučná funkcia
Príkald

Pre distribučnú funkciu tejto náhodnej premennej platí

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{T} & 0 \le x < T \\ 1 & x \ge T \end{cases}$$

Distribučná funkcia

Príkald



Obr. 2: Graf distribučnej funkcie $F_X(x)$ doby čakania na obsluhu.

Distribučná funkcia
Vlastnosti

Veta

Nech X je náhodná premenná a $F(x)$ jej distribučná funkcia. Funkcia $F(x)$ má tieto vlastnosti:

1. Pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
3. Pre každé dve čísla a a b také, že $a < b$ platí:
$$\mathbb{P}\,(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \tag{2}$$
4. Funkcia $F(x)$ je neklesajúcou funkciou.
5. Funkcia $F(x)$ je spojitá zľava.

Dôkaz

Vlastnosť 1 vyplýva priamo z definície. Pretože $F(x)$ je definovaná ako pravdepodobnosť, musí byť splnená príslušná nerovnosť.

Dôkaz

Vlastnosť 2 je výsledkom jednoduchých úprav:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X < x) &= \mathbb{P}(\emptyset) &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} F(x) &= \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(X < x) &= \mathbb{P}(\Omega) &= 1.
\end{aligned}
$$

Dôkaz

Vlastnosť 3 dokážeme takto:

$$F(b) = \mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(a \leq x < b) = F(a) + \mathbb{P}(a \leq x < b),$$

odkiaľ už vyplýva vzťah (2).

Dôkaz

Teraz dokážeme vlastnosť 4. Predpokladajme, že $x_1 < x_2$ potom náhodná udalosť $A = \{X < x_1\}$ je podmnožinou náhodnej udalosti $B = \{X < x_2\}$ a preto dostávame:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

a teda

$$\mathbb{P}(X < x_1) \leq \mathbb{P}(X < x_2) \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2),$$

čo znamená, že funkcia $F(x)$ je neklesajúca.

Dôkaz

Dokážeme vlastnosť 5. Uvažujme udalosti $A_i = \{x_i \leq X < x\}$, kde $x_i < x_{i+1}, i \in \mathbb{N}$

Potom limitou postupnosti intervalov $\langle x_i; x)$ pre $i \to \infty$ je bod x, a teda limitou udalostí A_i je udalosť nemožná. Preto

$$\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\lim_{i\to\infty} A_i\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Ale
$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(x_i \leq X < x) = \mathbb{P}(X < x) - \mathbb{P}(X < x_i) = F(x) - F(x_i).$
Prechodom k limite dostávame

$$0 = F(x) - \lim_{i\to\infty} F(x_i) \to \lim_{i\to\infty} F(x_i) = F(x),$$

z čoho vyplýva spojitosť $F(x)$ zľava.

Spojitá náhodná premenná

Hustota pravdepodobnosti

Definícia

Náhodnú premennú X nazývame *spojitou náhodnou premennou* ak existuje funkcia f, ktorú nazývame *hustota pravdepodobnosti* taká, že pre jej distribučnú funkciu platí

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Spojitá náhodná premenná
Vlastnosti hustoty pravdepodobnosti

Veta

Nech funkcia f je hustota pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X a F je jej distribučná funkcia. Potom platí

1. $$f(x) = F'(x) \text{ pre každé } x \in \mathbb{R} \text{ v ktorom je funkcia } f \text{ spojitá.} \tag{4}$$

2. $$\mathbb{P}\,(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Spojitá náhodná premenná
Vlastnosti hustoty pravdepodobnosti

Veta

Nech funkcia f je hustota pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X a F je jej distribučná funkcia. Potom platí

3. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4}$$

4. $$f(x) \geq 0 \text{ pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Dôkaz

Tvrdenie 1 vyplýva z definície, derivovaním vzťahu (3).

Tvrdenie 2 je len iným zápisom vzťahu (2). Stačí si uvedomiť, že podľa (3) je $F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ a teda

$$F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz

K dôkazu tvrdenia 3 použijeme vzťah (5), kde položíme $a = -\infty$ a $b = \infty$. Tak dostávame

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}\left(-\infty < X < \infty\right) = \mathbb{P}\left(\Omega\right) = 1.$$

Dôkaz

K dôkazu nezápornosti funkcie hustoty si stačí uvedomiť, že podľa (4) platí

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

$f(x)$ je teda limitou nezápornej funkcie a preto je tiež nezáporná.

Poznámky

Z dokázanej vety vyplýva niekoľko jednoduchých *geometrických* interpretácií vlastností funkcie hustoty.

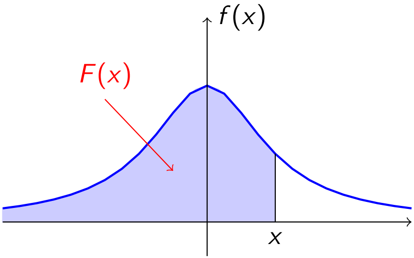
1. Graf funkcie hustoty leží nad osou x alebo na osi x.

2. Pravdepodobnosť $\mathbb{P}(a < X < b)$ je rovná plošnému obsahu útvaru ohraničeného grafom funkcie hustoty, osi x a zvislými priamkami $x = a$ a $x = b$.

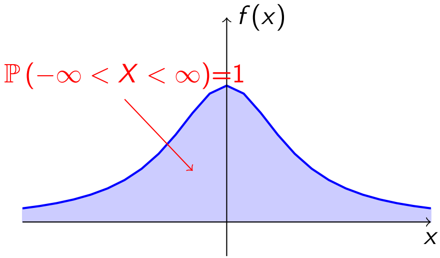
3. Hodnota $F(x)$ distribučnej funkcie v čísle x sa rovná plošnému obsahu plochy vyfarbenej na obrázku 3.

4. Obsah útvaru ohraničeného celým grafom funkcie hustoty f a osou x sa rovná jednej. Viď. obrázok 4.

Obrázky



Obr. 3: Geometrický význam funkčnej hodnoty distribučnej funkcie.



Obr. 4: Plocha ohraničená grafom funkcie hustoty a osou x.

Príklad

Zadanie

Distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X je daná takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ c \cdot x^2 & 0 < x \leq 2, \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

Určme koeficient c, hustotu pravdepodobnosti a pravdepodobnosť $\mathbb{P}\left(0 < X < 1\right)$.

Príklad

Distribučná funkcia $F(x)$ musí byť v bode $x = 2$ spojitá. Preto musí byť splnené

$$F(2) = c \cdot 2^2 = 4c = 1.$$

Odtiaľ vidíme, že platí

$$c = \frac{1}{4}$$

Príklad

Podľa (4) platí

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 2c \cdot x & 0 < x \leq 2, \\ 0 & x > 2. \end{cases}$$

Príklad

Použijeme vzťah (2). Platí

$$\mathbb{P}(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4}.$$

Diskrétna náhodná premenná
Pravdepodobnostná funkcia

Pre diskrétne náhodné premenné neexistuje funkcia hustoty. Namiesto toho zavádzame funkciu

$$p(x) = \mathbb{P}\left(X = x\right), x \in H, \tag{6}$$

kde H je množina hodnôt, ktoré náhodná premenná nadobúda. Zrejme platí

$$\sum_{x \in H} p(x) = 1. \tag{7}$$

Definícia

Funkciu $p(x)$, pri splnení podmienky (7) nazývame *pravdepodobnostná funkcia* náhodnej premennej X.

Diskrétna náhodná premenná
Zadanie a zobrazenie

Na rozdiel od funkcie hustoty má pravdepodobnostná funkcia svoj reálny význam.

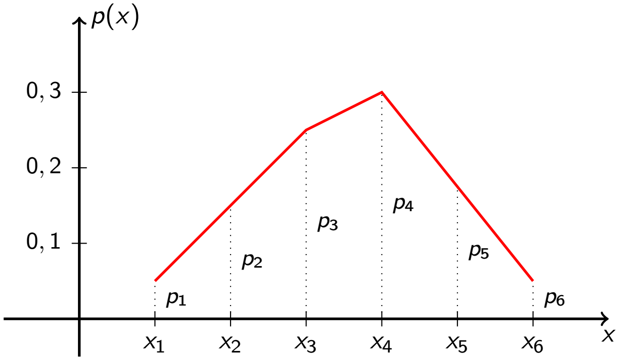
Najčastejšie ju zadávame v tvare tabuľky:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(x)$	$p_1 = \mathbb{P}(X = x_1)$	$p_2 = \mathbb{P}(X = x_2)$	$\cdots$	$p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$

Táto tabuľka je zákonom rozdelenia pravdepodobnosti a voláme ju *tabuľkou rozdelenia pravdepodobnosti*.

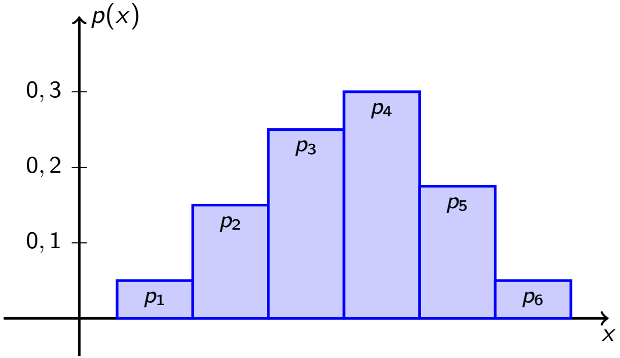
Diskrétna náhodná premenná
Zadanie a zobrazenie

Hodnoty z tabuľky rozdelenia pravdepodobnosti môžeme graficky znázorniť v podobe tzv. *polygónu pravdepodobnosti*.



Diskrétna náhodná premenná
Zadanie a zobrazenie

Hodnoty z tabuľky rozdelenia pravdepodobnosti môžeme graficky znázorniť taktiež ako *histogram* rozdelenia pravdepodobnosti.



Diskrétna náhodná premenná
Vlastnosti pravdepodobnostnej funkcie

Veta

Nech X je diskrétna náhodná premenná s pravdepodobnostnou funkciou $p(x)$ a distribučnou funkciou $F(x)$. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

1. $$p(x) = \lim_{h \to 0^+} F(x+h) - F(x).$$
2. $$F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i), \quad x_i \in H.$$

Diskrétna náhodná premenná

Príklad

Zadanie

Uvažujme hod dvomi hracími kockami, ktorý má 36 rovnako pravdepodobných výsledkov a nech náhodná premenná X je daná ako súčet padnutých bodov na oboch kockách. Určme pravdepodobnostnú a distribučnú funkciu tejto náhodnej premennej.

Diskrétna náhodná premenná
Príklad

Pravdepodobnostná funkcia je daná tabuľkou:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Diskrétna náhodná premenná
Príklad

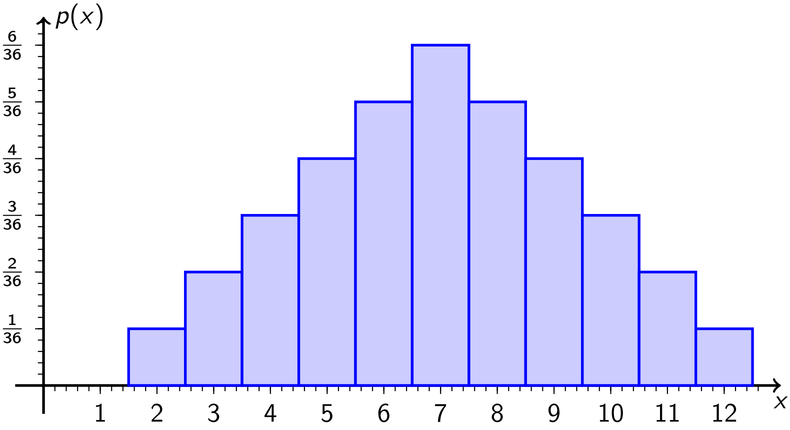
Postupným sčítaním hodnôt v dolnom riadku dostaneme tabuľku distribučnej funkcie:

$x \in$	$(-\infty; 2\rangle$	$(2; 3\rangle$	$(3; 4\rangle$	$(4; 5\rangle$	$(5; 6\rangle$	$(6; 7\rangle$
$F(x)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$

$x \in$	$(7; 8\rangle$	$(8; 9\rangle$	$(9; 10\rangle$	$(10; 11\rangle$	$(11; 12\rangle$	$(12; \infty\rangle$
$F(x)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

Diskrétna náhodná premenná
Príklad

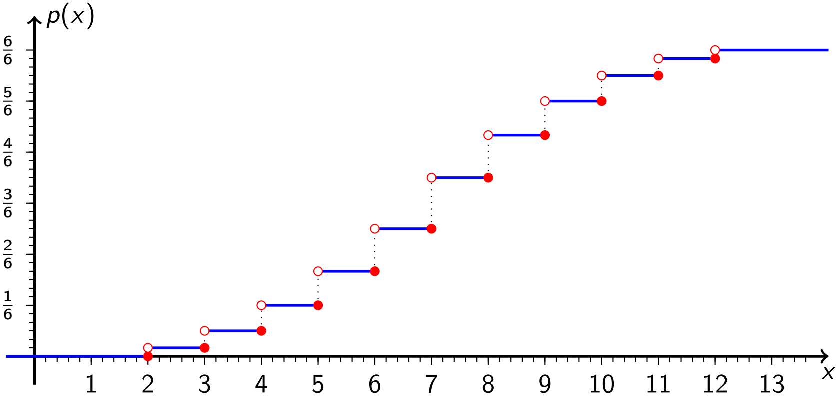
Histogram pravdepodobnostnej funkcie



Diskrétna náhodná premenná

Príklad

Graf distribučnej funkcie



Číselné charakteristiky
Delenie

Čísla, ktoré využívame na získanie ďalších informácií o náhodnej premennej – *číselné charakteristiky rozdelenia*. Delíme ich na:

a) *charakteristiky polohy*, vyjadrujú istý druh „stredu“ rozdelenia, okolo ktorého kolíšu hodnoty náhodnej premennej. **Stredná hodnota, medián, modus**.

b) *charakteristiky variability*, popisujú rozptýlenosť hodnôt okolo strednej hodnoty. **Disperzia, smerodajná odchýlka**.

c) charakteristiky, ktoré poskytujú doplňujúce údaje o rozptýlení hodnôt okolo strednej hodnoty. **Koeficient asymetrie, koeficient špicatosti**.

Číselné charakteristiky

Delenie

Čísla, ktoré využívame na získanie ďalších informácií o náhodnej premennej – *číselné charakteristiky rozdelenia*. Delíme ich na:

Výpočet charakteristík je založený na *momentoch* a *kvantiloch*.

Najfrekventovanejšie charakteristiky sú *momenty*. Delíme ich na

a) začiatočné,
b) centrálne.

Začiatočné momenty

Definícia (Začiatočný moment k-teho rádu)

Nech X je diskrétna náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty x s pravdepodobnosťami $p(x)$, $x \in H$. Potom *začiatočným momentom k-teho rádu* rozumieme hodnotu $\nu_k(X)$ definovanú vzťahom

$$\nu_k(X) = \sum_{x \in H} x^k p(x), \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

ak rad (8) konverguje absolútne.

Začiatočné momenty

Definícia (Začiatočný moment k-teho rádu)

Nech X je spojitá náhodná premenná a $f(x)$ jej hustota pravdepodobnosti. Potom *začiatočným momentom k-teho rádu* rozumieme hodnotu $\nu_k(X)$ definovanú vzťahom

$$\nu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

ak nevlastný integrál v (9) konverguje absolútne.

Stredná hodnota

Najdôležitejším začiatočným momentom je začiatočný moment prvého rádu – *stredná hodnota*.

Je charakteristikou polohy, popisuje miesto na číselnej osi, okolo ktorého náhodne kolíšu hodnoty náhodnej premennej.

Nazývame ju tiež *očakávaná hodnota* alebo *matematická nádej*.

Určíme ju na základe definičného vzťahu (8) resp. (9) pre $k = 1$.

Stredná hodnota

Definícia (Stredná hodnota)

Nech X je diskrétna náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty x s pravdepodobnosťami $p(x)$, $x \in H$. Začiatočný moment prvého rádu $\nu_1(X)$ nazývame *strednou hodnotou* náhodnej premennej X. Označujeme ho $\mathbb{E}(X)$ a vyjadrujeme vzťahom

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in H} x\, p(x). \tag{10}$$

Stredná hodnota

Definícia (Stredná hodnota)

Nech X je spojitá náhodná premenná a $f(x)$ jej hustota pravdepodobnosti. Začiatočný moment prvého rádu $\nu_1(X)$ nazývame *strednou hodnotou* náhodnej premennej X. Označujeme ho $\mathbb{E}(X)$ a vyjadrujeme vzťahom

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Stredná hodnota
Príklad

Zadanie

Hádžeme kockou. Ak nám padne párne číslo, vyhráme toľko eur, koľko padne bodov na kocke a v prípade padnutia nepárneho čísla zodpovedajúcu sumu strácame. Je pre nás táto hra výhodná?

Stredná hodnota
Príklad

Náhodná premenná X nadobúda hodnoty možných výhier.

Teda $x \in H = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6\}$. (Záporné hodnoty označujú prehru.)

Všetky výsledky sú rovnako pravdepodobné, teda $p(x) = \frac{1}{6}$ pre každé $x \in H$.

Pravdepodobnostná tabuľka:

x	-1	2	-3	4	-5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Stredná hodnota
Príklad

Pravdepodobnostná tabuľka:

x	-1	2	-3	4	-5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Strednú hodnotu vypočítame podľa (10)

$$\mathbb{E}(X) = -1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} - 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 0,5.$$

Pretože stredná hodnota $\mathbb{E}(X)$=0,5 je kladná, znamená to, že pri takejto hre pri dlhodobom hraní na jednej hre v priemere získavame 50 centov. Hra je teda pre nás výhodná.

Stredná hodnota
Príklad

Zadanie

Autobusy MHD odchádzajú zo zastávky v päťminútových intervaloch. Cestujúci môže prísť na zastávku v ľubovoľnom okamihu. Aká je stredná doba čakania na odchod autobusu?

Stredná hodnota
Príklad

Náhodná premenná X je spojitá a jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1}{5} & x \in \langle 0; 5 \rangle, \\ 0 & x > 5. \end{cases}$$

Podľa vzťahu (11) pre strednú hodnotu dostávame

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^5 x \, \frac{1}{5} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = 2,5.$$

Stredná hodnota
Vlastnosti

Veta

Nech X je náhodná premenná, $a, b, c \in \mathbb{R}$. potom stredná hodnota náhodnej premennej X má tieto vlastnosti:

1. $\mathbb{E}(c) = c$,
2. $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$,
3. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Stredná hodnota
Dôkaz

Konštantu môžeme považovať za diskrétnu náhodnú premennú, ktorá nadobúda jedinú hodnotu c s pravdepodobnosťou rovnou jednej.

Podľa (10) pre strednú hodnotu platí

$$\mathbb{E}\,(c) = c \cdot 1 = c.$$

To dokazuje tvrdenie 1.

Stredná hodnota
Dôkaz

Ak $c = 0$, tak $cX = 0$ a dostávame prípad 1.

Nech teda $c \neq 0$. Potom, ak X je diskrétna náhodná premenná,tak podľa (10)

$$\mathbb{E}\left(cX\right) = \sum_{x \in H} cx\, p(x) = c \sum_{x \in H} x\, p(x) = c\mathbb{E}\left(X\right).$$

Ak X je spojitá náhodná premenná, tak podľa (11)

$$\mathbb{E}\left(cX\right) = \int_{-\infty}^{\infty} cx\, f(x)\,\mathrm{d}x = c \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = c\mathbb{E}\left(X\right).$$

To dokazuje tvrdenie 2.

Stredná hodnota
Dôkaz

Nech X je diskrétna náhodná premenná,tak podľa (10)

$$\mathbb{E}\,(aX+b)=\sum_{x\in H}(ax+b)\,p(x)=\sum_{x\in H}ax\,p(x)+\sum_{x\in H}b\,p(x)=a\mathbb{E}\,(X)+b.$$

Ak X je spojitá náhodná premenná, tak podľa (11)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(aX+b)&=\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)\,f(x)\,\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,\mathrm{d}x+b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=a\mathbb{E}\,(X)+b.\end{aligned}$$

To dokazuje tvrdenie 3.

Stredná hodnota
Príklad

Priemerná teplota meraná v stupňoch Celsia je na určitom mieste 15°C.

Ak teplotu považujeme za náhodnú premennú C, platí $\mathbb{E}(C) = 15$.

Prevodový vzťah na teplotu vo Fahrenheitovej stupnici je $F = 1.8 \cdot C + 32$.

Pre priemernú hodnotu vo Fahrenheitovej stupnici dostávame podľa tvrdenia 3 predchádzajúcej vety

$$\mathbb{E}(F) = 1.8 \cdot \mathbb{E}(C) + 32 = 1.8 \cdot 15 + 32 = 59^\circ\mathrm{F}.$$

Stredná hodnota
Vlastnosti

Veta

Stredná hodnota odchýlky náhodnej premennej od jej strednej hodnoty je rovná nule.

Stredná hodnota
Dôkaz

Využijeme vlastnosť 3 z predchádzajúcej vety.

Aplikujeme na náhodnú premennú $X - \mathbb{E}(X)$. Dostávame

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0.$$

Stredná hodnota
Príklad

Uvažujme náhodnú premennú X, ktorej funkcia hustoty je tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Pretože integrál

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

je divergentný, stredná hodnota náhodnej premennej X neexistuje.

Stredná hodnota
Markovova nerovnosť

Veta (Markov)

Nech X je nezáporná náhodná premenná so strednou hodnotou μ a nech a je ľubovoľné kladné číslo. Potom platí

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}. \tag{12}$$

Stredná hodnota
Markovova nerovnosť – dôkaz

Dokážeme len pre spojitú náhodnú premennú s funkciou hustoty $f(x)$. Platí

$$\begin{aligned}\mu = \int_0^\infty x\, f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a x\, f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty x\, f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_a^\infty x\, f(x)\,\mathrm{d}x \geq a \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = a\,\mathbb{P}\,(X \geq a)\,.\end{aligned}$$

Odtiaľ už priamo vyplýva tvrdenie vety.

Stredná hodnota
Príklad

Zadanie

Stredná rýchlosť vetra pri zemi je na istom mieste 20 km/hod. Odhadnime pravdepodobnosť, že rýchlosť vetra na tomto mieste prevýši 75 km/hod.

Stredná hodnota
Príklad

Rýchlosť vetra je reprezentovaná náhodnou premennou X, podľa zadania platí $\mathbb{E}(X) = 20$.

S využitím (12) dostávame

$$\mathbb{P}(X > 75) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{75} = \frac{20}{75} = 0,27.$$

Stredná hodnota

Metóda chvostových pravdepodobností

Veta

Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty $0, 1, 2, \ldots$. Potom platí

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)\,. \tag{13}$$

Stredná hodnota

Dôkaz

Stačí si uvedomiť, že pre strednú hodnotu náhodnej premennej, ktorá nadobúda len hodnoty $0, 1, 2, \dots$ platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= p(1) + 2p(2) + 3p(3) + \cdots \\
&= [p(1) + p(2) + \cdots] + [p(2) + p(3) + \cdots] + \\
&\quad + [p(3) + p(4) + \cdots] + \cdots \\
&= \mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X > 1) + \mathbb{P}(X > 2) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) \,.
\end{aligned}$$

Stredná hodnota
Príklad

Zadanie

Predpokladajme, že pri hode mincou je pravdepodobnosť padnutia hlavy p a pravdepodobnosť padnutia znaku $1 - p$. Mincou budeme hádzať tak dlho, kým sa v sérii neobjaví prvá hlava. Koľko hodov do objavenia prvej hlavy môžeme v priemere očakávať?

Stredná hodnota
Príklad

Nech náhodná premenná X označuje počet hodov do padnutia prvej hlavy. Potom $X > n$ jednoducho znamená, že pri prvých n hodoch padol znak. Je teda $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$. Preto za pomoci (13)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

Centrálne momenty

Definícia (Centrálny moment k-teho rádu)

Nech X je diskrétna náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty x s pravdepodobnosťami $p(x)$, $x \in H$. Potom *centrálnym momentom k-teho rádu* rozumieme hodnotu $\mu_k(X)$ definovanú vzťahom

$$\mu_k(X) = \sum_{x \in H} (x - \mathbb{E}(X))^k p(x), \; k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

ak rad (14) konverguje absolútne.

Centrálne momenty

Definícia (Centrálny moment k-teho rádu)

Nech X je spojitá náhodná premenná a $f(x)$ jej hustota pravdepodobnosti. Potom *centrálnymm momentom k-teho rádu* rozumieme hodnotu $\mu_k(X)$ definovanú vzťahom

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^k f(x)\,\mathrm{d}x, \ k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

ak nevlastný integrál v (15) konverguje absolútne.

Disperzia, rozptyl

Najdôležitejším centrálnym momentom je centrálny moment druhého rádu – *rozptyl*, alebo *disperzia*.

Je charakteristikou variability, popisuje rozptýlenosť hodnôt náhodnej premennej, okolo jej strednej hodnoty. Je teda mierou premenlivosti náhodnej premennej.

Určíme ju na základe definičného vzťahu (14) resp. (15) pre $k = 2$.

Rozptyl

Definícia (Disperzia, Rozptyl)

Nech X je diskrétna náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty x s pravdepodobnosťami $p(x)$, $x \in H$. Centrálny moment druhého rádu $\mu_2(X)$ nazývame *rozptyl* alebo *disperzia* náhodnej premennej X. Označujeme ho $\mathbb{D}(X)$ a vyjadrujeme vzťahom

$$\mathbb{D}(X) = \sum_{x \in H} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, p(x). \tag{16}$$

Rozptyl

Definícia (Disperzia, Rozptyl)

Nech X je spojitá náhodná premenná a $f(x)$ jej hustota pravdepodobnosti. Centrálny moment druhého rádu $\mu_2(X)$ nazývame *rozptyl* alebo *disperzia* náhodnej premennej X. Označujeme ho $\mathbb{D}(X)$ a vyjadrujeme vzťahom

$$\mathbb{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Rozptyl

Veta

Ak existujú začiatočné momenty prvého a druhého rádu náhodnej premennej X, tak platí vzťah

$$\mathbb{D}\,(X) = \nu_2(X) - \nu_1^2(X). \tag{18}$$

Dôkaz

Vetu dokážeme napr. pre spojitú náhodnú premennú.

Podľa (17) je

$$\mu_2(X) = \mathbb{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Upravíme integrand a použijeme vzťahy

$$\nu_1(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \nu_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz

Dostávame

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\mathbb{E}(X) \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x + \\
&\quad + \mathbb{E}^2(X) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \nu_2(X) - 2\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}^2(X) = \nu_2(X) - \nu_1^2(X).
\end{aligned}
$$

Smerodajná odchýlka

Definícia (Smerodajná odchýlka)

Druhú odmocninu z rozptylu náhodnej premennej X nazývame *smerodajná odchýlka* alebo *stredná kvadratická odchýlka* tejto premennej a označujeme ju $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{D}(X)}. \tag{19}$$

Smerodajná odchýlka

Poznámka

Ak má náhodná premenná X nulovú disperziu $\mathbb{D}(X) = 0$, tak platí $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$. Táto tzv. *degenerovaná* náhodná premenná nadobúda iba jednu hodnotu a náhodnosť sa tak stráca.

Poznámka

V prípade, že náhodná premenná X sa meria v nejakých jednotkách (napr. v metroch), tak rozptyl má rozmer vo štvorcoch týchto jednotiek (napr. v metroch štvorcových). Preto sa v praxi používa smerodajná odchýlka, ktorej rozmer je v rovnakých jednotkách ako pôvodná náhodná premenná.

Rozptyl
Vlastnosti

Veta

Nech X je náhodná premenná, $a, b \in \mathbb{R}$. Potom rozptyl $\mathbb{D}(X)$ má tieto vlastnosti:

a) $\mathbb{D}(a){=}0$,

b) $\mathbb{D}(aX) = a^2\mathbb{D}(X)$,

c) $\mathbb{D}(a+X) = \mathbb{D}(X)$,

d) $\mathbb{D}(aX+b) = a^2\mathbb{D}(X)$.

Dôkaz

Dokážeme rovno vlastnosť 4. Podľa (18) a vlastností strednej hodnoty platí:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\left(aX+b\right) &= \mathbb{E}\left((ax+b)^2\right) - \left[\mathbb{E}\left(aX+b\right)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left(a^2X^2 + 2abX + b^2\right) - \left[\mathbb{E}\left(aX+b\right)\right]^2 \\
&= a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2ab\mathbb{E}\left(X\right) + b^2 - b^2 - 2ab\mathbb{E}\left(X\right) - a^2\mathbb{E}^2(X) \\
&= a^2\left[\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}^2(X)\right] = a^2\mathbb{D}\left(X\right).
\end{aligned}$$

Rozptyl
Príklad

Vráťme sa ku príkladu

Zadanie

Hádžeme kockou. Ak nám padne párne číslo, vyhráme toľko eur, koľko padne bodov na kocke a v prípade padnutia nepárneho čísla zodpovedajúcu sumu strácame. Je pre nás táto hra výhodná?

Rozptyl
Príklad

Náhodná premenná X nadobúda hodnoty možných výhier.

Teda $x \in H = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6\}$. (Záporné hodnoty označujú prehru.)

Všetky výsledky sú rovnako pravdepodobné, teda $p(x) = \frac{1}{6}$ pre každé $x \in H$.

Pravdepodobnostná tabuľka:

x	-1	2	-3	4	-5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Rozptyl
Príklad

Už sme zistili, že

$$\mathbb{E}(X) = 0,5.$$

Aká je však spoľahlivosť úspešného výsledku?

K tomu je potrebné analyzovať premenlivosť výhier, teda stanoviť rozptyl náhodnej premennej X.

Rozptyl
Príklad

Pravdepodobnostná tabuľka:

x	-1	2	-3	4	-5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\mathbb{E}(X) = 0.5$, teda

$$\mathbb{D}(X) = \frac{1}{6} \cdot [(-1-0,5)^2 + (2-0,5)^2 + \cdots + (6-0,5)^2]$$
$$\approx 3,46.$$

Rozptyl a stredná hodnota
Príklad

Zadanie

Nech náhodná premenná sa riadi rozdelením pravdepodobnosti s funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1}{5} & x \in \langle 0; 5 \rangle, \\ 0 & x > 5. \end{cases}$$

S využitím vlastností strednej hodnoty a disperzie treba určiť

1. $\mathbb{D}(X)$,
2. $\mathbb{E}(X+4)$,
3. $\mathbb{E}\left(2X^2+X+1\right)$,
4. $\mathbb{D}(2X+4)$.

Rozptyl a stredná hodnota
Príklad

1. Už skôr sme zistili, že $\mathbb{E}(X)$=2,5. Podľa (17) pre rozptyl dostávame:

$$\mathbb{D}(X) = \int_0^5 \frac{1}{5}(x-2,5)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left[\frac{(x-2,5)^3}{3}\right]_0^5 = \frac{25}{12}.$$

Rozptyl a stredná hodnota
Príklad

2. Z tretej vlastnosti strednej hodnoty a z poznatku, že $\mathbb{E}(X)$=2,5 dostávame:

$$\mathbb{E}(X+4) = \mathbb{E}(X) + 4 = 2,5 + 4 = 6,5.$$

Rozptyl a stredná hodnota
Príklad

3. Podobne z tretej vlastnosti strednej hodnoty máme:

$$\mathbb{E}\left(2X^2 + X + 1\right) = 2\mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}\left(X\right) + 1.$$

Treba určiť $\mathbb{E}\left(X^2\right)$, teda príslušný začiatočný moment druhého rádu. Platí

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_0^5 \frac{1}{5} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{25}{3}.$$

Teda

$$\mathbb{E}\left(2X^2 + X + 1\right) = 2\frac{25}{3} + 2,5 + 1 = \frac{121}{6}.$$

Rozptyl a stredná hodnota
Príklad

4. V bode 1. sme zistili, že $\mathbb{D}(X) = \frac{25}{12}$.

Podľa vlastnosti d) disperzie dostávame

$$\mathbb{D}(2X+4) = 4 \cdot \mathbb{D}(X) = 4 \cdot \frac{25}{12} = \frac{25}{3}.$$

Rozptyl môže zavádzať

Poznámka

Môže sa stať, že hodnoty náhodnej premennej sú koncentrované veľmi blízko určitej hodnoty, no napriek tomu je disperzia veľmi vysoká. To vzbudzuje dojem veľkej neistoty v očakávaniach, akú hodnotu náhodná premenná nadobudne.
Nech n je pevné a veľké prirodzené číslo. Uvažujme náhodnú premennú X, ktorej pravdepodobnostná funkcia má hodnoty $p(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ a $p(n) = \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n}$. Ľahko overíme, že je $\mathbb{E}(X)$=1 a $\mathbb{E}\left(X^2\right) = n$. Preto $\mathbb{D}(X) = n - 1$, čo je pre veľké hodnoty n taktiež veľké. Avšak $\mathbb{P}(X = 0) \approx 1$.
V skutočnostu tu teda prakticky niet žiadnej neistoty.

Štandardizácia (normovanie)

Definícia

Hovoríme, že náhodná premenná U je *normovaná* alebo *štandardná náhodná premenná* ak pre ňu platí

$$\mathbb{E}(U) = 0, \quad \mathbb{D}(U) = 1.$$

Štandardizácia (normovanie)

Definícia

Hovoríme, že náhodná premenná U je *normovaná* alebo *štandardná náhodná premenná* ak pre ňu platí

$$\mathbb{E}(U) = 0, \quad \mathbb{D}(U) = 1.$$

Veta

Nech X je náhodná premenná, pre ktorú existuje stredná hodnota $\mathbb{E}(X)$ a disprezia $\mathbb{D}(X) \neq 0$. Potom náhodná premenná

$$U = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \tag{20}$$

je normovaná náhodná premenná.

Štandardizácia (normovanie)

Dôkaz

Využijeme vlastnosti sttrednej hodnoty a disperzie. Platí

$$\mathbb{E}\,(U) = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}\,(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}\mathbb{E}\,(X - \mathbb{E}\,(X))$$
$$= \frac{1}{\sigma(X)}(\mathbb{E}\,(X) - \mathbb{E}\,(X)) = 0.$$

$$\mathbb{D}\,(U) = \mathbb{D}\left(\frac{X - \mathbb{E}\,(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma^2(X)}\mathbb{D}\,(X - \mathbb{E}\,(X))$$
$$= \frac{1}{\sigma^2(X)}\mathbb{D}\,(X) = 1.$$

Čebyševova nerovnosť

Veta (Čebyšev)

Pre každú náhodnú premennú so strednou hodnotou $\mathbb{E}(X)$ a disperziou $\mathbb{D}(X)$ a pre ľubovoľné kladné číslo k platí

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k) \leq \frac{\mathbb{D}(X)}{k^2}, \tag{21}$$

resp.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < k) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}(X)}{k^2}. \tag{22}$$

Čebyševova nerovnosť
Dôkaz

Zrejme

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}\left(X\right)| \geq k\right) = \mathbb{P}\left(\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 \geq k^2\right)\right) ,$$

a s použitím Markovovej nerovnosti (12) na nezápornú náhodnú premennú $(X - \mathbb{E}\left(X\right))^2$ a pre $a = k^2$ dostávame

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}\left(X\right)| \geq k\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\right)}{a} = \frac{\mathbb{D}\left(X\right)}{k^2}.$$

Druhé tvrdenie vyplýva z prvého, využitím vety o pravdepodobnosti doplnkovej udalosti.

Čebyševova nerovnosť

Príklad

Zadanie

O náhodnej premennej X vieme, že jej stredná hodnota $\mathbb{E}(X)=3$ a jej počiatočný moment druhého rádu je $\mathbb{E}\left(X^2\right)=13$. Odhadnime pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobudne hodnoty z intervalu $(-2; 8)$.

Čebyševova nerovnosť
Príklad

Stredná hodnota a rozptyl náhodnej premennej X sú $\mathbb{E}(x)$=3 a $\mathbb{D}(X)$=13-9=4.

Chceme určiť pravdepodobnosť $\mathbb{P}(-2 < X < 8) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < 5)$. Podľa (22) dostávame

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < 5) \geq 1 - \frac{4}{25} = 0,84.$$

Centrálne a začiatočné momenty

Veta

Nech existuje centrálny moment k-teho rádu a začiatočné momenty až do rádu k náhodnej premennej X, $k \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mu_k(X) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \nu_i^i(X) \nu_{k-i}(X), \tag{23}$$

kde $\nu_0(X) = 1$.

Centrálne a začiatočné momenty

Dôkaz

Tvar centrálneho momentu k-teho rádu náhodnej premennej X odvodíme pomocou binomickej vety $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

$$\mu_k(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^k\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} \mathbb{E}^i(X) \cdot X^{k-i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}^i(X) \cdot X^{k-i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} \nu_1^i(X) \nu_{k-i}(X).$$

Centrálne a začiatočné momenty

Pre centrálne momenty prvých štyroch rádov môžeme špeciálne písať

$$\mu_1(X) = 0 \tag{24}$$
$$\mu_2(X) = \nu_2(X) - \nu_1^2(X) \tag{25}$$
$$\mu_3(X) = \nu_3(X) - 3\nu_2(X)\nu_1(X) + 2\nu_1^3(X) \tag{26}$$
$$\mu_4(X) = \nu_4(X) - 4\nu_3(X)\nu_1(X) + 6\nu_2(X)\nu_1^2(X) - 3\nu_1^4(X) \tag{27}$$

Koeficient asymetrie

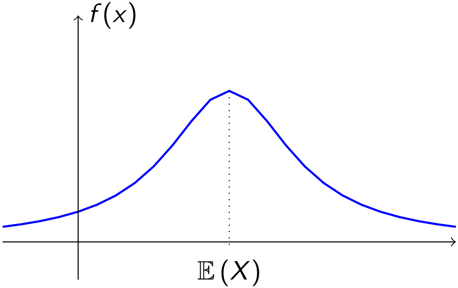
Definícia (Koeficient asymetrie)

Podiel centrálneho momentu tretieho rádu a tretej mocniny smerodajnej odchýlky náhodnej premennej X sa nazýva *koeficient asymetrie* alebo *šikmosť* rozdelenia. Označujeme ho $\rho(X)$, platí

$$\rho(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = \frac{\mu_3(X)}{\mathbb{D}^{\frac{3}{2}}(X)}. \tag{28}$$

Koeficient asymetrie

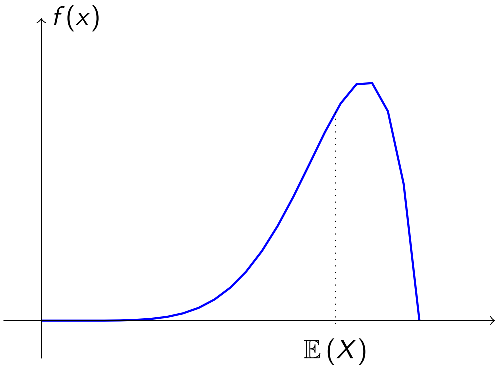
Symetrické rozdelenie má koeficient asymetrie $\rho(X) = 0$.(Naopak, ak $\rho(X) = 0$, nemusí byť ešte rozdelenie symetrické.)



Obr. 5: Symetrické rozdelenie pravdepodobnosti, $\rho(X) = 0$.

Koeficient asymetrie

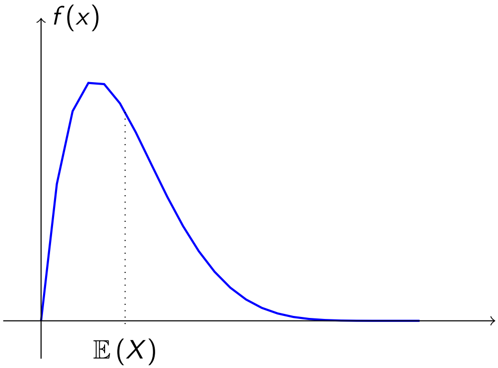
O *ľavostrannej asymetrii* hovoríme, pri rozdelení pretiahnutejšom doľava, vtedy $\rho(X) > 0$.



Obr. 5: Ľavo šikmé rozdelenie pravdepodobnosti, $\rho(X) > 0$.

Koeficient asymetrie

O *pravostrannej asymetrii* hovoríme, pri rozdelení pretiahnutejšom doprava, vtedy $\rho(X) < 0$.



Obr. 5: Pravo šikmé rozdelenie pravdepodobnosti, $\rho(X) < 0$.

Koeficient špicatosti

Definícia (Koeficient špicatosti)

Koeficient špicatosti alebo tiež *exces*, ktorý označujeme ako $\varepsilon(X)$, je definovaný vzťahom:

$$\varepsilon(X) = \frac{\mu_4(X)}{\mathbb{D}^2(X)} - 3. \tag{29}$$

Kvantily
Kvantilová funkcia

Definícia (Kvantilová funkcia)

Nech $F(x)$ je distribučná funkcia náhodnej premennej X. Funkciu F^{-1} nazývame *kvantilovou funkciou* ak:

$$F^{-1}(p) = \inf\{x; F(X) \geq p\}, \quad 0 < p < 1. \tag{30}$$

Hodnoty $F^{-1}(p)$ sa nazývajú *100p%-né kvantily* a označujú sa x_p.

Poznámka

Ak je distribučná funkcia rastúca a spojitá, tak F^{-1} je inverzná funkcia k F a kvantily sa určujú zo vzťahu $F(x_p) = p$.

Kvantily

V praxi sa používajú najmä kvantily spojitých náhodných premenných. Špecifickým prípadom kvantilov je *medián*.

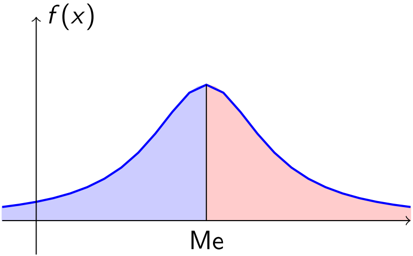
Medián je kvantilovou charakteristikou, ktorá vyjadruje 50%-ný kvantil.

Medián je teda hodnota, ktorá rozdelí interval možných hodnôt náhodnej premennej na dva rovnako pravdepodobné intervaly.

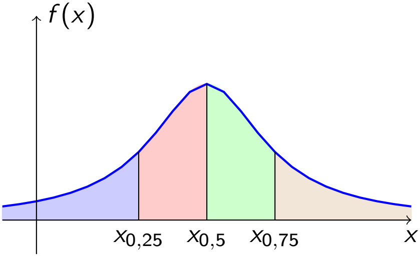
Pre medián, ktorý označujeme Me platí

$$\mathbb{P}(X < \mathrm{Me}) = \mathbb{P}(X > \mathrm{Me}) = \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Obrázky



Obr. 6: Geometrický význam mediánu.



Obr. 7: Geometrický význam kvantilov.

Príklad

Zadanie

Náhodná premenná x má hustotu pravdepodobnosti tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 5\,\mathrm{e}^{-5x} & x > 0 \end{cases}$$

(tzv. exponenciálne rozdelenie). Vypočítajme medián.

Príklad

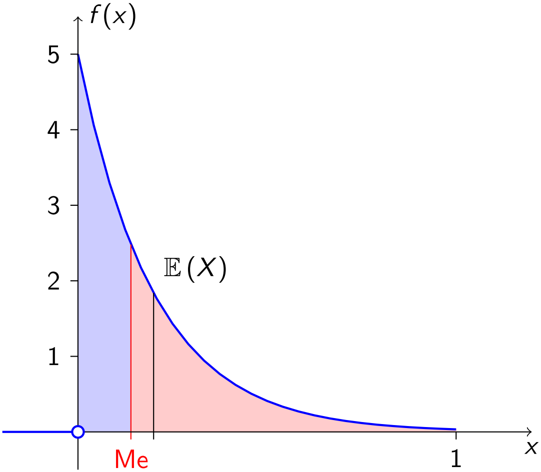
Pre výpočet využijeme vzťah (31), zapísaný pomocou funkcie hustoty. Teda

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{Me}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{Me}}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Dostávame tak

$$\begin{aligned} 5\int_{0}^{\mathrm{Me}} \mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{5}\left[\mathrm{e}^{-5x}\right]_{0}^{\mathrm{Me}} &= \frac{1}{2} \\ \mathrm{e}^{-5\,\mathrm{Me}} &= \frac{1}{2} \\ \mathrm{Me} &= \frac{\ln 2}{5} \approx 0,139. \end{aligned}$$

Príklad



Obr. 8: Medián exponenciálneho rozdelenia.

Modus

Definícia (Modus)

Nech X je diskrétna náhodná premenná. *Modus* Moje jej najpravdepodobnejšia hodnota, teda pre každé $x \in H$ platí

$$p(\mathrm{Mo}) \geq p(x)$$

.

Definícia (Modus)

Nech X je spojitá náhodná premenná. *Modus* Moje hodnota, kde hustota pravdepodobnosti nadobúda svoje maximum, teda pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\mathrm{Mo}) \geq f(x)$$

.

Modus
Príklad

Zadanie

Náhodná premenná X má hustotu pravdepodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{3}{4}(x-2)(4-x) & x \in \langle 2; 4 \rangle \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

Určme modus.

Modus
Príklad

Hustota je nenulová iba na intervale $(2;4)$ a je spojitá. Modus môže nadobudnúť iba v stacionárnom bode, ktorý padne do intervalu $\langle 2;4\rangle$.

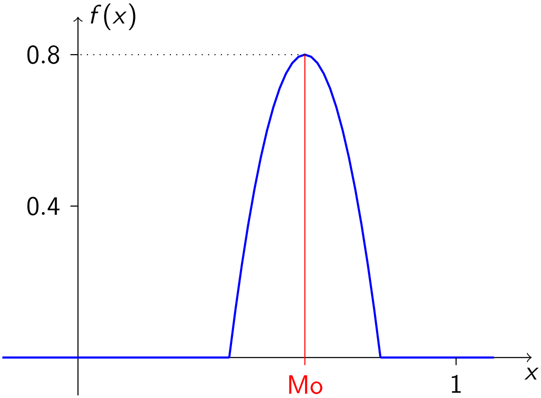
$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{3}{4}(6-2x) \\ \tfrac{3}{4}(6-2x) &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Overíme, že ide o maximum

$$f''(x) = -1,5 \ \Rightarrow \ f''(3) = -1,5 < 0.$$

Teda funkcia f má v bode $x = 3$ lokálne maximum a teda Mo=3.

Modus
Príklad



Obr. 9: Modus rozdelenia.