Teória pravdepodobnosti

3. Opakované pokusy

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

15. novembra 2015

Hromadnosť náhodných pokusov

V čom je podstata pravdepodobnostného ohodnotenia náhodných udalostí?

Pri viacnásobnom opakovaní náhodného pokusu sa budú pravdepodobnejšie náhodné udalosti vyskytovať častejšie.

Hromadnosť náhodných pokusov

V čom je podstata pravdepodobnostného ohodnotenia náhodných udalostí?

Pri viacnásobnom opakovaní náhodného pokusu sa budú pravdepodobnejšie náhodné udalosti vyskytovať častejšie.

Základom teórie pravdepodobnosti je preto hromadnosť náhodných pokusov, t.j. možnosť opakovať ich ľubovoľne veľakrát pri rovnakých podmienkach.

Hromadnosť náhodných pokusov

V čom je podstata pravdepodobnostného ohodnotenia náhodných udalostí?

Pri viacnásobnom opakovaní náhodného pokusu sa budú pravdepodobnejšie náhodné udalosti vyskytovať častejšie.

Základom teórie pravdepodobnosti je preto hromadnosť náhodných pokusov, t.j. možnosť opakovať ich ľubovoľne veľakrát pri rovnakých podmienkach.

V tejto prednáške sa preto venujeme problematike výskytu jednotlivých alternatívnych výsledkov v sérii opakovaní náhodného pokusu.

Rozdelenie opakovaných pokusov

Budeme rozlišovať:

1. Nezávislé **opakované pokusy.** Pri týchto pokusoch je výsledok každého opakovania nezávislý od výsledku predchádzajúcich opakovaní pokusu.

Rozdelenie opakovaných pokusov

Budeme rozlišovať:

1. **Nezávislé opakované pokusy.** Pri týchto pokusoch je výsledok každého opakovania nezávislý od výsledku predchádzajúcich opakovaní pokusu.
2. **Závislé opakované pokusy.** Pri týchto pokusoch sa môže pravdepodobnosť jednotlivých výsledkov meniť v závislosti od výsledku pokusov predchádzajúcich.

Opakované pokusy
Urnové modely

Závislé a nezávislé opakované pokusy často reprezentujeme pomocou tzv. urnových modelov.

Základný princíp je v tom, že vyťahujeme guľôčky z urny, ktorá obsahuje určitý počet guľôčok, z ktorých sú niektoré čierne a niektoré biele.

Náhodný pokus predstavuje jedno vytiahnutie guľôčky z urny.

Pri nezávislých opakovaniach sa guľôčka po pozretí farby vráti naspäť do urny. Pri závislých opakovaniach sa naopak guľôčka do urny nevracia.

Nezávislé opakované pokusy

Budeme analyzovať také opakovania, pri ktorých sa pravdepodobnosť sledovaných výsledkov nemení.

Presnejšie, zaujíma nás výskyt náhodnej udalosti A, pričom jej pravdepodobnosť v jednotlivých pokusoch je $\mathbb{P}(A) = p$.

Nezávislé opakované pokusy

Bernoulliho vzorec

Veta (Bernoulli)

Nech pravdepodobnosť náhodnej udalosti A je v každom pokuse $\mathbb{P}(A) = p$. Potom pravdepodobnosť $P_{n,k}$ toho, že v sérii n opakovaní náhodného pokusu nastane náhodná udalosť A práve k-krát $(0 \leq k \leq n)$ je rovná

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{kde} \quad q = 1 - p. \tag{1}$$

Bernoulliho vzorec
Dôkaz

Označme A_i náhodnú udalosť, že v i-tom pokuse nastane sledovaná udalosť A a B_k náhodnú udalosť, že v sérii n opakovaní nastala udalosť A práve k-krát. Náhodnú udalosť B_k vyjadríme takto:

$$\begin{aligned} B_k &= (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c) \cup \\ &\cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k^c \cap A_{k+1} \cap A_{k+2}^c \cap \cdots \cap A_n^c) \cup \ldots \\ &(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-k-1}^c \cap A_{n-k} \cap A_{n-k+1}^c \cap A_{n-k+2} \cap \cdots \cap A_n) \cup \ldots \\ &\cdots \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-k}^c \cap A_{n-k+1} \cap A_{n-k+2} \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned}$$

Bernoulliho vzorec
Dôkaz

Podľa predpokladov sú opakovania pokusov nezávislé. Preto sú nezávislé aj náhodné udalosti A_i a A_i^c.

Preto je pravdepodobnosť súčinu takýchto udalostí rovná súčinu

$$p^k(1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}.$$

Bernoulliho vzorec
Dôkaz

Ostáva určiť, koľko je takýchto možných súčinov náhodných udalostí vo vyjadrení náhodnej udalosti B_k.

To je jednoduchá kombinatorická úloha, nakoľko ide o počet kombinácií k náhodných udalostí A_i vyberaných z celej množiny n náhodných udalostí A_i (zvyšných $n-k$ miest potom obsadíme náhodnými udalosťami A_i^c). Tých je $\binom{n}{k}$. Preto

$$\mathbb{P}(B_k) = P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Zadanie

Automatický sústruh vyrobí jednu súčiastku za 3 minúty, pričom pravdepodobnosť, že vyrobí nepodarok je 0,05. Určme pravdepodobnosť, že za hodinu vyrobí:

a) práve dve,

b) nanajvýš dve,

nepodarkové súčiastky.

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Najskôr určíme, že sústruh vyrobí za hodinu $\frac{60}{3} = 20$ súčiastok.

Tento počet predstavuje súčasne aj počet 20 opakovaní pokusu.

Podľa zadania je pravdepodobnosť vyrobenia nepodarku rovná $p = 0,05$

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Pre riešenie úlohy a) máme $k = 2$.

Hľadanú pravdepodobnosť určíme podľa Bernouilliho vzorca (1).

Tak dostávame výsledok

$$P_{20,2} = \binom{20}{2} \cdot (0,05)^2 \cdot (0,95)^{18} = 0,1887.$$

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Pre určenie pravdepodobnosti z úlohy b) musíme ešte určiť pravdepodobnosti $P_{20,1}$ a $P_{20,0}$.

Podľa Bernouilliho vzorca (1) platí

$$\begin{aligned} P_{20,1} &= \binom{20}{1} \cdot (0,05)^1 \cdot (0,95)^{19} = 0,3774, \\ P_{20,0} &= \binom{20}{0} \cdot (0,05)^0 \cdot (0,95)^{20} = 0,3585. \end{aligned}$$

Hľadanú pravdepodobnosť náhodnej udalosti B=„nanajvýš dve z vyrobených súčiastok sú nepodarky“ určíme ako súčet

$$\mathbb{P}(B) = P_{20,2} + P_{20,1} + P_{20,0} = 0,9246.$$

Nezávislé opakované pokusy

Príklad

Zadanie

Pravdepodobnosť, že žiarovka vydrží svietiť 1 200 hodín je 0,8. Na schodišti sa nachádza 5 žiaroviek. Aká je pravdepodobnosť, že po 1 200 hodinách bude na schodišti svietiť aspoň jedna žiarovka?

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Označme ako A náhodnú udalosť „žiarovka svieti“.

Hľadanú pravdepodobnosť určíme pomocou doplnkovej udalosti A^c=„žiarovka nesvieti“.

Podľa zadania je $\mathbb{P}(A)=0{,}8$, preto $\mathbb{P}(A^c)=0{,}2$.

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Ak požadujeme, aby aspoň jedna žiarovka svietila, ide o doplnkovú udalosť k náhodnej udalosti, že žiadna žiarovka nesvieti.

Túto pravdepodobnosť určíme podľa Bernoulliho vzorca (1).

$$P_{5,0} = \binom{5}{0} \cdot (\mathbb{P}(A))^0 \cdot (\mathbb{P}(A^c))^5 = (0,2)^5.$$

Pravdepodobnosť náhodnej udalosti B, že aspoň jedna žiarovka svieti je potom

$$\mathbb{P}(B) = 1 - P_{5,0} = 1 - (0,2)^5 = 0,99968.$$

Nezávislé opakované pokusy

Vplyv pravdepodobnosti sledovanej udalosti

Porovnajme si výsledky dvoch sérií nezávislých opakovaných pokusov, ktoré sa budú odlišovať pravdepodobnosťou výskytu sledovanej náhodnej udalosti v jednotlivých pokusoch.

Prvou nech je séria opakovaní hodu mincou, pri ktorej sledujeme pravdepodobnostné pomery počtu padnutí hlavy.

Druhou je séria hodov kockou, pričom sledujeme pravdepodobnostné pomery počtu padnutí šesťky.

Pre určitosť predpokladajme, že pokusy opakujeme 10-krát.

Nezávislé opakované pokusy
Vplyv pravdepodobnosti sledovanej udalosti

Pre pravdepodobnosti padnutia k hláv, $k = 0, 1, \ldots, 10$ platí

$$P_{10,0} = P_{10,10} = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0,00098,$$

$$P_{10,1} = P_{10,9} = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0,00977,$$

$$P_{10,2} = P_{10,8} = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,04395,$$

$$P_{10,3} = P_{10,7} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,11719,$$

$$P_{10,4} = P_{10,6} = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,20508,$$

$$P_{10,5} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 0,24609.$$

Nezávislé opakované pokusy

Vplyv pravdepodobnosti sledovanej udalosti

Pre pravdepodobnosti padnutia k šestiek, $k = 0, 1, \dots, 10$ máme

$$P_{10,0} = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{0} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,16151, \quad P_{10,1} = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9} = 0,32301,$$

$$P_{10,2} = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8} = 0,29071, \quad P_{10,3} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{7} = 0,15504,$$

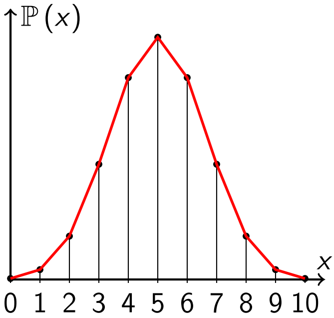
$$P_{10,4} = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6} = 0,05427, \quad P_{10,5} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5} = 0,01302,$$

$$P_{10,6} = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4} = 0,00217, \quad P_{10,7} = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{7} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3} = 0,00025,$$

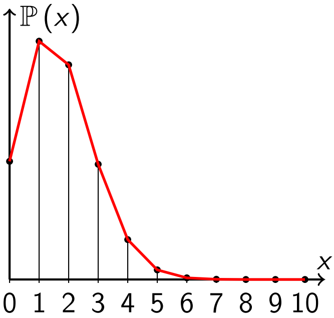
$$P_{10,8} = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2} = 2 \cdot 10^{-6}, \quad P_{10,9} = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{9} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1} = 8 \cdot 10^{-7}$$

$$P_{10,10} = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{0} = 1,65 \cdot 10^{-8}.$$

Nezávislé opakované pokusy
Vplyv pravdepodobnosti sledovanej udalosti



Obr.: Graf pravdepodobnosti počtu padnutia hláv pri 10-násobnom opakovaní hodu mincou. Pravdepodobnosti sú symetrické vzhľadom na maximálnu hodnotu.



Obr.: Graf pravdepodobnosti počtu padnutých šestiek pri 10-násobnom opakovaní hodu kockou. Asymetria pravdepodobností vzhľadom na maximálnu hodnotu je tu dobre viditeľná.

Nezávislé opakované pokusy

Najpravdepodobnejší počet výskytov

Vzhľadom na predchádzajúcu ukážku má zrejme zmysel klásť si otázku:

Aký je najpravdepodobnejší počet výskytov náhodnej udalosti A s pravdepodobnosťou p v sérii n nezávislých opakovaných pokusov?

Nezávislé opakované pokusy
Najpravdepodobnejší počet výskytov

Označme hľadaný počet ako k_0 a berme do úvahy dve susedné pravdepodobnosti $P_{n,k}$ a $P_{n,k-1}$.

Prepokladajme, že je $P_{n,k-1} \leq P_{n,k}$ a teda platí $\frac{P_{n,k}}{P_{n,k-1}} \geq 1$.

Ak jednotlivé pravdepodobnosti rozpíšeme podľa (1) tak máme:

$$\begin{aligned} \frac{P_{n,k}}{P_{n,k-1}} &= \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1}} \\ &= \frac{(n-k+1)p}{qk} \geq 1. \end{aligned}$$

Nezávislé opakované pokusy
Najpravdepodobnejší počet výskytov

Z poslednej nerovnosti dostávame:

$$\begin{aligned}(n-k+1)p &\geq kq,\\ np-kp+p &\geq kq,\\ np+p &\geq kq+kp,\\ np+p &\geq k.\end{aligned}$$

Ak je k_0 najpravdepodobnejšia hodnota, musí byť $P_{n,k_0-1} \leq P_{n,k_0}$ a teda

$$k_0 \leq p(n+1).$$

Nezávislé opakované pokusy
Najpravdepodobnejší počet výskytov

Zoberme do úvahy ďalšie dve susedné pravdepodobnosti $P_{n,k}$ a $P_{n,k+1}$.

Prepokladajme opäť, že je $P_{n,k+1} \leq P_{n,k}$, čo je splnené predovšetkým pre najpravdepodobnejšiu hodnotu k_0.

Analogicky ako v predchádzajúcom prípade by sme overili, že platí

$$k_0 \geq p(n+1) - 1.$$

Nezávislé opakované pokusy
Najpravdepodobnejší počet výskytov

Ak zhrnieme obidva výsledky, tak zistíme, že pre najpravdepodobnejší počet výskytov k_0 náhodnej udalosti platí

$$p(n+1) - 1 \leq k_0 \leq p(n+1).$$

Ako najpravdepodobnejší počet teda stanovíme celé čísla, vyhovujúce týmto nerovnostiam.

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Zadanie

Študent má na skúške odpovedať na test, ktorý obsahuje 50 otázok a ku každej otázke sú priradené štyri alternatívy odpovede, z ktorých je len jedna odpoveď správna. Aký je najpravdepodobnejší počet správne zodpovedaných otázok, ak študent látku vôbec neovláda a odpovede vyberá čisto náhodne?

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Označme ako A náhodnú udalosť „študent odpovie na otázku správne“.

Zo zadania vyplýva, že $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$.

Test obsahuje 50 otázok, čo zodpovedá počtu opakovaní.

Podľa odvodenej nerovnosti platí

$$k_0 \in \langle (50+1) \cdot 0,25 - 1; (50+1) \cdot 0,25 \rangle,$$

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Platí teda

$$k_0 \in \langle 11,75; 12,75 \rangle.$$

V tomto intervale leží jediné celé číslo, teda najpravdepodobnejší počet správnych odpovedí je 12.

Nezávislé opakované pokusy

Príklad

Zadanie

Automatický sústruh vyrobí jednu súčiastku za 3 minúty, pričom pravdepodobnosť vyrobenia nepodarku je 0,05. Aký je najpravdepodobnejší počet vyrobených nepodarkov počas jednej 8 hodinovej smeny?

Nezávislé opakované pokusy
Príklad

Pre náhodnú udalosť A=„vyrobí sa nepodarok" platí $\mathbb{P}(A) = p = 0,05$.

Počet opakovaní náhodného pokusu určíme ako počet vyrobených súčiastok počas 8 hodín, teda $n = 8 \cdot 20 = 160$.

Podľa odvodenej nerovnosti pre najpravdepodobnejší počet platí

$$k_0 \in \langle (160+1) \cdot 0,05 - 1; (160+1) \cdot 0,05 \rangle,$$

teda

$$k_0 \in \langle 7,05; 8,05 \rangle \Rightarrow k_0 = 8.$$

Nezávislé opakované pokusy
Počet opakovaní

Otázka

Koľkokrát je potrebné náhodný pokus opakovať, aby sa náhodná udalosť A s pravdepodobnosťou $\mathbb{P}(A) = p$ vyskytla aspoň raz, a to s pravdepodobnosťou aspoň α?

Nezávislé opakované pokusy
Počet opakovaní

Pravdepodobnosť, že náhodná udalosť A sa vyskytne v sérii n opakovaní aspoň raz určíme pomocou doplnkovej udalosti ako hodnotu $1 - P_{n,0}$.

Táto pravdepodobnosť má byť aspoň α, teda má byť splnená nerovnosť

$$1 - P_{n,0} \geq \alpha.$$

Zrejme je $P_{n,0} = (1 - p)^n$.

Nezávislé opakované pokusy
Počet opakovaní

$$
\begin{aligned}
1-(1-p)^n &\geq \alpha \\
1-\alpha &\geq (1-p)^n \\
\ln(1-\alpha) &\geq n\cdot\ln(1-p) \\
n &\geq \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}.
\end{aligned}
$$
[1]

Potrebný počet opakovaní teda určíme ako najmenšie celé číslo vyhovujúce odvodenej nerovnosti.

[1] Tu si treba uvedomiť, že je $p \in (0;1)$ a teda $1-p<1$, čo znamená, že je $\ln(1-p)<0$ a preto sa pri poslednej úprave znak nerovnosti otočí.

Počet opakovaní
Príklad

Zadanie

Koľkokrát je potrebné hodiť kockou, aby pravdepodobnosť padnutia aspoň jednej šesťky bola aspoň $\frac{5}{6}$?

Počet opakovaní
Príklad

Pre pravdepodobnosť náhodnej udalosti A=„na kocke padlo šesť bodov“ platí $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$.

Požadovaná hladina pravdepodobnosti padnutia aspoň jednej šesťky je $\alpha = \frac{5}{6}$.

Podľa odvodeného výsledku dostávame

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{6}}{\ln \frac{5}{6}} = 9,82.$$

Je teda potrebné vykonať aspoň 10 hodov.

Polynomický vzorec

Doteraz sme sa venovali situácii s dvomi možnými výsledkami náhodného pokusu.

Úvahy, ktoré sme vykonali pri odvodení Bernoulliho vzorca (1) však môžeme analogicky zopakovať v situácii, kedy pripúšťame viacero možných výsledkov náhodného pokusu.

Polynomický vzorec

Veta (Polynomický vzorec)

Nech náhodné udalosti $A_1, \dots, A_k$ tvoria úplný systém udalostí a nech sú dané ich pravdepodobnosti $\mathbb{P}(A_i) = p_i$, $i = 1, \dots, k$. Nech sú tieto pravdepodobnosti v každom pokuse rovnaké. Potom pravdepodobnosť $P_{n,n_1,\dots,n_k}$ toho, že v sérii n opakovaní náhodného pokusu nastane náhodná udalosť A_i práve n_i-krát, $i = 1, \dots, k$, pričom $n_1 + \dots + n_k = n$, je daná vzorcom

$$P_{n,n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}. \tag{2}$$

Polynomický vzorec
Príklad

Zadanie

V osudí sa nachádza 5 bielych, 4 modré, 3 červené, 2 zelené a 1 čierna guľôčka. Pätnásťkrát vytiahneme vždy po jednej guľôčke, zaznamenáme jej farby a vrátime ju späť do osudia. Určte pravdepodobnosť, že bielu guľôčku vyberieme 5-krát, modrú 4-krát, červenú 3-krát, zelenú 2-krát a čiernu 1-krát.

Polynomický vzorec
Príklad

Náhodný pokus má celkovo 5 možných výsledkov. Pre ich pravdepodobnosti platí:

A_1=„vytiahnutá guľôčka je biela“, $\mathbb{P}(A_1) = p_1 = \frac{1}{3}$,
A_2=„vytiahnutá guľôčka je modrá“, $\mathbb{P}(A_2) = p_2 = \frac{4}{15}$,
A_3=„vytiahnutá guľôčka je červená“, $\mathbb{P}(A_3) = p_3 = \frac{1}{5}$,
A_4=„vytiahnutá guľôčka je zelená“, $\mathbb{P}(A_4) = p_4 = \frac{2}{15}$,
A_5=„vytiahnutá guľôčka je čierna“, $\mathbb{P}(A_5) = p_5 = \frac{1}{15}$,

Polynomický vzorec
Príklad

Pre hľadanú pravdepodobnosť podľa (2) dostávame

$$\begin{aligned} P_{15,5,4,3,2,1} &= \frac{15!}{5!4!3!2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{4}{15}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{2}{15}\right)^2\left(\frac{1}{15}\right) \\ &= 0,0075. \end{aligned}$$

Závislé opakované pokusy

Uvažujeme situáciu, kedy je daných m predmetov, spomedzi ktorých má k predmetov nejakú vlastnosť a zvyšných $m - k$ predmetov túto vlastnosť nemá.

Závislé opakované pokusy

Uvažujeme situáciu, kedy je daných m predmetov, spomedzi ktorých má k predmetov nejakú vlastnosť a zvyšných $m-k$ predmetov túto vlastnosť nemá.

Náhodne vyberieme $n, n \leq m$ predmetov.

Závislé opakované pokusy

Uvažujeme situáciu, kedy je daných m predmetov, spomedzi ktorých má k predmetov nejakú vlastnosť a zvyšných $m-k$ predmetov túto vlastnosť nemá.

Náhodne vyberieme $n, n \leq m$ predmetov.

Aká je pravdepodobnosť náhodnej udalosti A_j, že medzi n vybratými predmetmi bude práve $j \leq k$ predmetov so sledovanou vlastnosťou?

Závislé opakované pokusy

Zrejme všetkých možností, ako vybrať n predmetov spomedzi m predmetov je $\binom{m}{n}$.

Závislé opakované pokusy

Zrejme všetkých možností, ako vybrať n predmetov spomedzi m predmetov je $\binom{m}{n}$.

Vo výbere má byť práve j predmetov spomedzi k predmetov s požadovanou vlastnosťou. Pre takéto výbery máme $\binom{k}{j}$ možností.

Závislé opakované pokusy

Zrejme všetkých možností, ako vybrať n predmetov spomedzi m predmetov je $\binom{m}{n}$.

Vo výbere má byť práve j predmetov spomedzi k predmetov s požadovanou vlastnosťou. Pre takéto výbery máme $\binom{k}{j}$ možností.

Zvyšných $n-j$ predmetov vyberáme spomedzi $m-k$ predmetov, ktoré nemajú požadovanú vlastnosť. To nám dáva $\binom{m-k}{n-j}$ možností.

Závislé opakované pokusy
Hypergeometrický vzorec

Veta (Hypergeometrický vzorec)

Nech je daných m predmetov, z ktorých k, $0 \leq k \leq m$ má určitú vlastnosť. Z celkového množstva m predmetov náhodne vyberáme n predmetov. Nech náhodná udalosť A_j znamená, že práve j z vybraných predmetov, $0 \leq j \leq \min\{k, n\}$ má túto vlastnosť. Potom platí

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{\binom{k}{j} \cdot \binom{m-k}{n-j}}{\binom{m}{n}}. \tag{3}$$

Závislé opakované pokusy
Príklad

Zadanie

Cukrovar dodáva do obchodnej siete práškový cukor, ktorý je balený do kilogramových sáčkov. Za vyhovujúci sa považuje sáčok, ktorého hmotnosť sa pohybuje od 997 g do 1 003 g. Vo vyexpedovanej zásielke 6 000 sáčkov sa nachádza 700 nevyhovujúcich sáčkov. Aká je pravdepodobnosť, že medzi 35 náhodne vybratými sáčkami bude aspoň 5 sáčkov s nevyhovujúcou hmotnosťou?

Závislé opakované pokusy
Príklad

Náhodná udalosť A, že v zásielke je aspoň 5 nevyhovujúcich sáčkov je doplnkovou udalosťou k náhodnej udalosti A^c, že v zásielke sú nanajvýš štyri nevyhovujúce sáčky.

Náhodná udalosť A^c je zjednotením $A^c = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, kde A_i=„práve i sáčkov má nevyhovujúcu hmotnosť“, $i = 0, \ldots, 4$.

Udalosti A_i sú po dvoch nezlučiteľné.

Preto platí

$$\mathbb{P}\left(A^c\right) = \sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}\left(A_i\right).$$

Pravdepodobnosti $\mathbb{P}\left(A_i\right)$ určíme podľa (3).

Závislé opakované pokusy

Príklad

$$\mathbb{P}(A_0) = \frac{\binom{700}{0}\binom{5\,300}{35}}{\binom{6\,000}{35}} = \frac{\frac{700!}{0!700!}\cdot\frac{5\,300!}{35!5\,265!}}{\frac{6\,000!}{35!5\,965!}} = 0,01284.$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{700}{1}\binom{5\,300}{34}}{\binom{6\,000}{35}} = \frac{\frac{700!}{1!699!}\cdot\frac{5\,300!}{34!5\,266!}}{\frac{6\,000!}{35!5\,965!}} = 0,05975.$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{700}{2}\binom{5\,300}{33}}{\binom{6\,000}{35}} = \frac{\frac{700!}{2!698!}\cdot\frac{5\,300!}{33!5\,267!}}{\frac{6\,000!}{35!5\,965!}} = 0,13480.$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{\binom{700}{3}\binom{5\,300}{32}}{\binom{6\,000}{35}} = \frac{\frac{700!}{3!697!}\cdot\frac{5\,300!}{32!5\,268!}}{\frac{6\,000!}{35!5\,965!}} = 0,19645.$$

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{\binom{700}{4}\binom{5\,300}{31}}{\binom{6\,000}{35}} = \frac{\frac{700!}{4!696!}\cdot\frac{5\,300!}{31!5\,269!}}{\frac{6\,000!}{35!5\,965!}} = 0,20792.$$

Závislé opakované pokusy
Príklad

Pre hľadanú pravdepodobnosť tak dostávame

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4)) \\
&= 1 - (0,01284 + 0,05975 + 0,13480 + 0,19645 + 0,20792) \\
&= 1 - 0,61176 \\
&= 0,38824.
\end{aligned}$$

Závislé opakované pokusy

Poznámka

Aj hypergeometrický vzorec je možné zovšeobecniť na prípad viacerých možných výsledkov. Máme m predmetov, z ktorých m_1 má prvú vlastnosť, m_2 má druhú vlastnosť atď., až m_r má r-tú vlastnosť, pričom platí $m_1 + \cdots + m_r = m$. Pre pravdepodobnosť, že medzi n náhodne vybratými predmetmi bude mať práve n_1 predmetov prvú vlastnosť, n_2 predmetov druhú vlastnosť atď, až n_r predmetov r-tú vlastnosť, pri čom $0 \leq n_i \leq m_i, 1 = 1, \ldots, r$ a $n_1 + \cdots + n_r = n$ platí

$$\mathbb{P}\left(A_{n_1, n_2, \ldots, n_r}\right) = \frac{\binom{m_1}{n_1}\binom{m_2}{n_2}\cdots\binom{m_r}{n_r}}{\binom{m}{n}}. \tag{4}$$

Závislé opakované pokusy
Príklad

Zadanie

V osudí sa nachádza 5 bielych, 4 modré, 3 červené, 2 zelené a 1 čierna guľôčka. Náhodne vyberieme 5 guľôčok. Aká je pravdepodobnosť, že každá bude mať inú farbu?

Závislé opakované pokusy
Príklad

V osudí je celkom $m = 15$ guľôčok.

Z toho je $m_1 = 5$, $m_2 = 4$, $m_3 = 3$, $m_4 = 2$ a $m_5 = 1$.

Celkovo vyberáme $n = 5$ guľôčok.

Platí pri tom $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 1$.

Závislé opakované pokusy
Príklad

Podľa (4) dostávame

$$\mathbb{P}\left(A_{5,1,1,1,1,1}\right) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{15}{5}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\frac{15!}{5!10!}} = 0,04.$$