Teória pravdepodobnosti

2. Podmienená pravdepodobnosť

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

15. novembra 2015

Definícia podmienenej pravdepodobnosti

Zaoberáme sa problémom určenia pravdepodobnosti nejakej náhodnej udalosti, pričom je známa doplňujúca informácia, týkajúca sa výskytu inej náhodnej udalosti, ktorá môže túto pravdepodobnosť ovplyvniť.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti

Zaoberáme sa problémom určenia pravdepodobnosti nejakej náhodnej udalosti, pričom je známa doplňujúca informácia, týkajúca sa výskytu inej náhodnej udalosti, ktorá môže túto pravdepodobnosť ovplyvniť.

Definícia (Podmienená pravdepodobnosť)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a A a B náhodné udalosti a $\mathbb{P}(B) > 0$. Potom *pravdepodobnosťou udalosti A podmienenou udalosťou B* nazývame podiel

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Definícia podmienenej pravdepodobnosti

Poznámka

Podmienená pravdepodobnosť $\mathbb{P}(A|B)$, definovaná vzťahom (1) je pri pevnej podmieňujúcej náhodnej udalosti B pravdepodobnosťou v zmysle axiomatickej definície pravdepodobnosti.

Na overenie stačí dokázať, že podmienená pravdepodobnosť vyhovuje všetkým trom podmienkam z axiomatickej definície pravdepodobnosti.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti

Dôkaz vlastnosti (1)

Podľa predpokladu je $\mathbb{P}(B) > 0$ a v čitateli zlomku je pravdepodobnosť, pre ktorú platí $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B)$. Pre podmienenú pravdepodobnosť podľa definície máme

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq 0.$$

Podmienená pravdepodobnosť teda spĺňa podmienku (1) z axiomatickej definície pravdepodobnosti.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti
Dôkaz vlastnosti (2)

Ak zvolíme $A = \Omega$ tak pre pravdepodobnosť $\mathbb{P}(\Omega|B)$ zrejme platí

$$\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

To potvrdzuje platnosť podmienky (2) z axiomatickej definície pravdepodobnosti.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti
Dôkaz vlastnosti (3)

Nech $A_1, A_2, \ldots$ je ľubovoľná postupnosť po dvoch nezlučiteľných náhodných udalostí. Potom platí

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i | B),
\end{aligned}
$$

čo potvrdzuje platnosť podmienky (3) z axiomatickej definície pravdepodobnosti.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti

Príklad

Zadanie

Podľa úmrtnostných tabuliek mužov SR za rok 2011[a] sa zo 100 000 detí dožije veku 30 rokov 97 977 a veku 65 rokov sa dožije 73 595. Určme pravdepodobnosť, že muž, ktorý sa dožil veku 30 rokov sa dožije aj veku 65 rokov.

[a] Zdroj: http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=33032

Definícia podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Označme si ako A_{30} náhodnú udalosť, že sa vybraný muž dožije veku 30 rokov a A_{65} podobne označuje náhodnú udalosť, že sa dožije 65 rokov. Chceme určiť podmienenú pravdepodobnosť $\mathbb{P}(A_{65}|A_{30})$.
Podľa vzťahu (1) máme

$$\mathbb{P}(A_{65}|A_{30}) = \frac{\mathbb{P}(A_{65} \cap A_{30})}{\mathbb{P}(A_{30})}.$$

Ak si uvedomíme, že $A_{65} \cap A_{30} = A_{65}$, tak pre hľadanú pravdepodobnosť dostávame

$$\mathbb{P}(A_{65}|A_{30}) = \frac{0,73595}{0,97977} = 0,75115.$$

Definícia podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Zadanie

V rodine sú dve deti. Určme pravdepodobnosť, že obe deti sú chlapci, ak vieme, že jedno z detí je chlapec.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Výberový priestor je v tomto prípade tvorený usporiadanými dvojicami $\Omega = \{(ch, ch), (ch, d), (d, ch), (d, d)\}$, kde ch znamená, že dieťa je chlapec a d že dieťa je dievča. Usporiadanú dvojicu potom interpretujeme tak, že prvý z dvojice sa narodil skôr.

Nech teraz A označuje náhodnú udalosť „obe deti sú chlapci“, teda $A = \{(ch, ch)\}$, a B náhodnú udalosť „aspoň jedno dieťa je chlapec“, teda $B = \{(ch, ch), (ch, d), (d, ch)\}$. Pre ich pravdepodobnosti zrejme platí $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ a $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$. Nás však zaujíma podmienená pravdepodobnosť $\mathbb{P}(A|B)$.

Podľa (1) dostávame

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Definícia podmienenej pravdepodobnosti

Príklad

Poznámka

Všimnime si, ako môže byť niekedy zradná intuícia. Tá by nám totiž našepkávala, že ak už v rodine je jeden chlapec, tak pri druhom dieťati sú vyrovnané šance pre obe pohlavia a teda pravdepodobnosť, že obaja sú chlapci je jedna polovica. Ako vidíme, skutočnosť je iná.

Pokúste sa sami vysvetliť, kde sa pri predchádzajúcom intuitívnom postupe dopúšťame chyby, ktorá nás privedie ku nesprávnemu výsledku.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti

Veta

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor, A a B náhodné udalosti s kladnými pravdepodobnosťami.

1. Platí
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) . \tag{2}$$
2. Platí $\mathbb{P}(A|\Omega) = \mathbb{P}(A)$.
3. Ak $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sú po dvoch disjunktné náhodné udalosti, tak platí
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i | B\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i|B) . \tag{3}$$

Dôkaz:

Tvrdenie číslo 1 vyplýva priamo z definície podmienenej pravdepodobnosti.

Dôkaz:

Tvrdenie číslo 1 vyplýva priamo z definície podmienenej pravdepodobnosti.

Pre každú náhodnú udalosť A platí

$$\mathbb{P}(A|\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{1} = \mathbb{P}(A),$$

čo dokazuje tvrdenie 2.

Dôkaz:

Označme $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Potom $C \cap B = \bigcup_{i=1}^{n}(C_i \cap B)$. Pretože náhodné udalosti $C_i \cap B$ sú po dvoch nezlučiteľné, tak z aditívnosti pravdepodobnosti dostávame, že $\mathbb{P}(C \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i \cap B)$. Preto platí

$$\mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(C_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i|B).$$

To dokazuje tvrdenie 3.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti

Veta (O násobení pravdepodobností)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor, a nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú náhodné udalosti také, že $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. Potom platí

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right). \tag{4}$$

Dôkaz:

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú náhodné udalosti také, že $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$ a nech $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Zrejme platí $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ a teda aj $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \geq 0$, takže všetky podmienené pravdepodobnosti na pravej strane rovnice existujú.

Ďalej pokračujeme matematickou indukciou.

Dôkaz:

Pre $n = 1$ je tvrdenie zrejmé. Dostaneme totiž

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$$

Dôkaz:

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n a že $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$. Podľa definície podmienenej pravdepodobnosti (1) vyplýva

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_{n+1} | \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Ak rozpíšeme pravdepodobnosť $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$ podľa indukčného predpokladu, dostaneme tvrdenie vety.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Zadanie

Detská skladanka obsahuje 12 kociek, ktoré majú na každej strane časť jedného zo šiestich obrázkov. Na zostavenie obrázku je potrebné každú kocku položiť na správne miesto, potom ju obrátiť správnou stranou smerom nahor a nakoniec ju otočiť do správnej polohy. Skúmajme pravdepodobnosť, že pri náhodnom uložení kociek bude zostavený niektorý obrázok.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Označme

- A náhodná udalosť, že každá kocka je uložená na svojom mieste,
- B náhodná udalosť, že každá kocka je obrátená tak, že je na všetkých vidieť časť rovnakého obrázka,
- C náhodná udalosť, že každá kocka je otočená do správnej polohy.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Kocky je možné rozmiestniť celkovo 12! spôsobmi, preto je $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{12!}$

Na každej z 12-tich kociek môžeme na hornej strane vidieť jeden zo šiestich obrázkov, čo dáva dohromady 6^{12} možností. Obrázkov je 6 a tak platí $\mathbb{P}(B|A) = \frac{6}{6^{12}}$.

Každú z kociek je možné otočiť do jednej zo štyroch polôh, čo nám pri 12-tich kockách dáva 4^{12} možností, z ktorých len jedna je správna. Preto $\mathbb{P}(C|A \cap B) = \frac{1}{4^{12}}$.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Pre pravdepodobnosť že pri náhodnom zložení bude správne poskladaný niektorý obrázok potom podľa vety o násobení pravdepodobností dostávame:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(C|A \cap B) \\ &= \frac{1}{12!} \cdot \frac{6}{6^{12}} \cdot \frac{1}{4^{12}} \\ &= 3,43 \cdot 10^{-25}.\end{aligned}$$

Nezávislosť náhodných udalostí

Definícia (Nezávislé udalosti)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor, A a B sú náhodné udalosti také, že $\mathbb{P}(A) > 0$ a $\mathbb{P}(B) > 0$. Hovoríme, že náhodné udalosti A a B sú *nezávislé*, ak platí

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A). \tag{5}$$

Poznámka

Vzťah nezávislosti náhodných udalostí je zrejme symetrický, pre nezávislé udalosti teda platí aj

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Nezávislosť náhodných udalostí

Veta (O pravdepodobnosti súčinu nezávislých udalostí)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor, A a B sú náhodné udalosti také, že $\mathbb{P}(A) > 0$ a $\mathbb{P}(B) > 0$. Potom náhodné udalosti A a B sú nezávislé, práve vtedy, ak platí

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)\,. \tag{6}$$

Dôkaz:

Prepokladajme, že náhodné udalosti A a B sú nezávislé. Potom podľa definície platí $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ a podľa (4) je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Dôkaz:

Nech teraz naopak platí $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Po dosadení do (1) dostávame

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A),$$

a náhodné udalosti sú teda nezávislé.

Nezávislosť náhodných udalostí

Poznámka

Definíciu nezávislosti náhodných udalostí môžeme prirodzeným spôsobom zovšeobecniť na ľubovoľný počet náhodných udalostí. Využijeme pri tom nutnú a postačujúcu podmienku (6) nezávislosti z predchádzajúcej vety. Povieme, že náhodné udalosti $A_1, A_2, \ldots$ sú *nezávislé*, ak pre ľubovoľnú množinu indexov J platí:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)\,. \tag{7}$$

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti

Príklad

Zadanie

Na večierku sa zúčastní r osôb. Predpokladajme, že ich narodeniny sú rovnako pravdepodobné ktorýkoľvek deň v roku.[a] Taktiež predpokladajme, že pravdepodobnosti, že určitá osoba má narodeniny v určitý deň sú nezávislé. Určme pravdepodobnosť, že na večierku sa zúčastnia dve osoby, ktoré majú narodeniny v ten istý deň.

[a] Pre zjednodušenie uvažujme, že rok má 365 dní, ignorujúc pri tom prestupné roky.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Osoby na večierku si očíslujme číslami od 1 po r a zaveďme si náhodné udalosti $A_{i,j}$, pre $i \in \{1, \ldots, r\}$ a $j \in \{1, \ldots, 365\}$, ktoré definujeme ako „osoba i má narodeniny v deň j“.

Platí $\mathbb{P}(A_{i,j}) = \frac{1}{365}$.

Pravdepodobnosť náhodnej udalosti B, že dve osoby majú narodeniny v ten istý deň určíme pomocou pravdepodobnosti doplnkovej udalosti B^c, teda že žiadni dvaja návštevníci nemajú narodeniny v rovnaký deň.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti
Príklad

Pre prvú osobu máme k dispozícii 365 dní, kedy môže mať narodeniny a s pravdepodobnosťou rovnou 1 nemá v tento deň narodeniny nikto iný. Pre osobu číslo dva už máme k dispozícii len 364 neobsadených dní a tak dostávame $\sum_{j=1}^{365} \mathbb{P}\left(A_{2,j} \cap A_{1,j}^c\right) = \frac{364}{365}$.

Podobne pre tretieho návštevníka máme k dispozícii už len 363 neobsadených dní a preto $\sum_{j=1}^{365} \mathbb{P}\left(A_{3,j} \cap A_{1,j}^c \cap A_{2,j}^c\right) = \frac{363}{365}$.

Všeobecne, pre r-tého návštevníka ostáva len 365-r+1 neobsadených dní a dostávame tak $\sum_{j=1}^{365} \mathbb{P}\left(A_{r,j} \cap A_{1,j}^c \cap \cdots \cap A_{r-1,j}^c\right) = \frac{365-r+1}{365}$.

Vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti

Príklad

Celkove teda podľa (7) pre pravdepodobnosť, že žiadni dvaja návštevníci nemajú narodeniny v rovnaký deň dostávame

$$\mathbb{P}(B^c) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - r + 1}{365} = \frac{365!}{365^r \cdot r!}.$$

Pre hľadanú pravdepodobnosť, že aspoň dvaja z hostí majú narodeniny v ten istý deň platí

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{365!}{365^r \cdot r!}.$$

Úplný systém udalostí

Definícia (Úplný systém udalostí)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a $H_1, \ldots, H_n$ náhodné udalosti také, že:

1. sú po dvoch disjunktné, t.j. $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$,
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Potom ich nazývame *úplný systém udalostí*.

Úplná pravdepodobnosť

Veta (Veta o úplnej pravdepodobnosti)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a nech náhodné udalosti $H_1, \ldots, H_n$ tvoria úplný systém udalostí. Nech je ďalej $A \in \mathcal{F}$. Potom

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i). \tag{8}$$

Dôkaz

Udalosti $H_1, \dots, H_n$ tvoria úplný systém udalostí, platí teda

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n.$$

Náhodnú udalosť A môžeme vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n) \\ &= (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n). \end{aligned}$$

Dôkaz

Pretože udalosti $H_1, \dots, H_n$ sú po dvoch disjunktné, sú po dvoch disjunktné aj udalosti $A \cap H_1, A \cap H_2, \dots, A \cap H_n$. Využijeme teda vlastnosť aditivity pravdepodobnosti a dostávame

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap H_1) + \mathbb{P}(A \cap H_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap H_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap H_i).$$

Ak teraz využijeme vzťah (2), tak dostávame

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i).$$

Veta o úplnej pravdepodobnosti
Príklad

Zadanie

Nadnárodný výrobca LCD monitorov má svoje závody v piatich rôznych krajinách. V prvej z nich pokrýva 25 % svojej celkovej produkcie, v druhej 15 %, v tretej 18 %, vo štvrtej 20 % a v piatej zvyšných 22 % svojej celkovej produkcie. Pri tom je známe, že v záručnej dobe dochádza k reklamácii u 4 % monitorov vyrobených v prvej krajine, u 5 % monitorov pochádzajúcich z druhej krajiny, u 3 % monitorov vyrobených v tretej krajine, u 6 % monitorov vyrobených vo štvrtej krajine a konečne u 3 % monitorov vyrobených v piatej krajine. Určme pravdepodobnosť, že predaný LCD monitor bude počas záručnej doby reklamovaný.

Veta o úplnej pravdepodobnosti
Príklad

Zrejme pravdepodobnosť reklamácie závisí od toho, v ktorej krajine bol monitor vyrobený.

Každý monitor môže byť vyrobený len v jednej krajine, ale nemôže byť vyrobený nikde inde.

Ak označíme symbolom K_i pre $i = 1, \dots, 5$ udalosť „monitor bol vyrobený v i-tej krajine", tak tieto udalosti tvoria úplný systém udalostí.

Využijeme teda vetu o úplnej pravdepodobnosti.

Veta o úplnej pravdepodobnosti
Príklad

Pre pravdepodobnosti udalostí K_i podľa zadania platí:

$\mathbb{P}\left(K_1\right) = 0,25$, $\mathbb{P}\left(K_2\right) = 0,15$, $\mathbb{P}\left(K_3\right) = 0,18$, $\mathbb{P}\left(K_4\right) = 0,20$ a $\mathbb{P}\left(K_5\right) = 0,22$.

Ak náhodnú udalosť „monitor bude reklamovaný“ označíme symbolom R, tak pre podmienené pravdepodobnosti reklamácie, v závislosti od toho, v ktorej krajine bol monitor vyrobený podľa zadania platí:

$\mathbb{P}\left(R|K_1\right) = 0,04$, $\mathbb{P}\left(R|K_2\right) = 0,05$, $\mathbb{P}\left(R|K_3\right) = 0,03$, $\mathbb{P}\left(R|K_4\right) = 0,06$ a $\mathbb{P}\left(R|K_5\right) = 0,03$.

Veta o úplnej pravdepodobnosti
Príklad

Celkovú pravdepodobnosť, že monitor bude reklamovaný určíme podľa vety o úplnej pravdepodobnosti. Tak dostávame

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(R|K_i) \cdot \mathbb{P}(K_i) \\ &= 0,25 \cdot 0,04 + 0,15 \cdot 0,05 + 0,18 \cdot 0,03 + \\ &\quad +0,2 \cdot 0,06 + 0,22 \cdot 0,03 \\ &= 0,0415.\end{aligned}$$

Bayesova veta

Veta (Bayesova)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a nech náhodné udalosti $H_1, \ldots, H_n$ tvoria úplný systém udalostí. Nech ďalej $A, B \in \mathcal{F}$ sú náhodné udalosti s kladnými pravdepodobnosťami. Potom

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(A)}, \tag{9}$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(B|A \cap H_i)}{\mathbb{P}(A)}. \tag{10}$$

Dôkaz

Z definície podmienenej pravdepodobnosti a zo vzťahu (2) dostávame

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(A)},$$

čo dokazuje (9).

Dôkaz

Náhodnú udalosť $A \cap B$ vyjadríme pomocou úplnej sústavy udalostí $H_1, \ldots, H_n$ takto:

$$\begin{aligned} A \cap B &= (\Omega \cap A) \cap B = [(H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n) \cap A] \cap B \\ &= [(H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \cdots \cup (H_n \cap A)] \cap B \\ &= (H_1 \cap A \cap B) \cup (H_2 \cap A \cap B) \cup \cdots \cup (H_n \cap A \cap B) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (H_i \cap A \cap B). \end{aligned}$$

Náhodné udalosti $(H_i \cap A \cap B)$ a $(H_j \cap A \cap B)$ sú pre $i \neq j$ nezlučiteľné, preto

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i \cap A \cap B).$$

Dôkaz

Ak využijeme vzťah (4), tak dostávame

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(H_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(A|H_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(B|A \cap H_i\right).$$

Ak tento výsledok dosadíme do vzťahu pre podmienenú pravdepodobnosť, tak máme

$$\mathbb{P}\left(B|A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(H_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(A|H_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(B|A \cap H_i\right)}{\mathbb{P}\left(A\right)},$$

čo zodpovedá výsledku (10).

Bayesova veta
Príklad

Zadanie

Oceľové odliatky sú kontrolované röntgenovým prístrojom, ktorý odhaľuje chybu v odliatku s pravdepodobnosťou 0,98 a dobrý odliatok označí za zlý s pravdepodobnosťou 0,001. Je známe, že chyba sa vyskytuje u $d\%$ produkcie. Určme pravdepodobnosť, že odliatok, označený prístrojom za chybný je skutočne chybný.

Bayesova veta
Príklad

Označme si náhodné udalosti H_1=„odliatok je chybný" a H_2=„odliatok je bezchybný".

Práve zavedené udalosti tvoria zrejme úplný systém udalostí.

Ďalej označme A náhodnú udalosť „prístroj označil odliatok za chybný".

Zo zadania vieme, že: $\mathbb{P}\left(A|H_1\right) = 0,98$, $\mathbb{P}\left(A|H_2\right) = 0,001$. Tiež platí $\mathbb{P}\left(H_1\right) = \frac{d}{100}$ a preto $\mathbb{P}\left(H_2\right) = 1 - \frac{d}{100}$

Bayesova veta
Príklad

Chceme určiť pravdepodobnosť, že výrobok označený za chybný je skutočne chybný, čo pri našom označení znamená $\mathbb{P}\left(H_1|A\right)$. Podľa Bayesovej vety (9) platí

$$\mathbb{P}\left(H_1|A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A|H_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(H_1\right)}{\sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}\left(A|H_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(H_i\right)} = \frac{0.98 \cdot \frac{d}{100}}{0.98 \cdot \frac{d}{100} + 0,001 \cdot \left(1 - \frac{d}{100}\right)}.$$

To je možné upraviť na tvar

$$\mathbb{P}\left(H_1|A\right) = \frac{980d}{979d + 100}.$$

Bayesova veta
Príklad

Poznámka

Ak by teda v konkrétnom prípade bola chybovosť výroby napr. 0,3%, tak po dosadení za $d = 0,3$ dostávame hodnotu $\mathbb{P}(H_1|A)$=0,747.

Takýto výsledok môže viesť k dojmu, že takto vykonávaná kontrola nie je dostatočne spoľahlivá.

K úsudku o spoľahlivosti je však potrebné vypočítať aj pravdepodobnosť, že výrobok označený za dobrý je skutočne dobrý.

Bayesova veta
Príklad

Označme teda B udalosť „prístroj označil výrobok za dobrý“. Zo zadania vieme, že $\mathbb{P}(B|H_1)$=0,02 (1-0,98) a $\mathbb{P}(B|H_2)$=0,999 (1 - 0,001).

Opäť podľa Bayesovej vety dostávame

$$\mathbb{P}(H_2|B) = \frac{\mathbb{P}(B|H_2)\cdot\mathbb{P}(H_2)}{\sum_{i=1}^{2}\mathbb{P}(B|H_i)\cdot\mathbb{P}(H_i)} = \frac{0.999\cdot\left(1-\frac{d}{100}\right)}{0.98\cdot\frac{d}{100}+0,001\cdot\left(1-\frac{d}{100}\right)},$$

čo zjednodušíme na

$$\mathbb{P}(H_2|B) = \frac{99\,900-999d}{99\,900-979d}.$$

Bayesova veta
Príklad

Po dosadení konkrétnych hodnôt podľa poznámky, teda $d = 0,3$ dostávame $\mathbb{P}\left(H_2|B\right) = 0,99994$.

Táto hodnota potvrdzuje vysokú spoľahlivosť prístroja v tom zmysle, že chybný výrobok nebude zaradený medzi dobré.