Teória pravdepodobnosti

6. Systém náhodných premenných

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a operačnej analýzy
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

17. novembra 2015

Systém náhodných premenných

Motivácia

Doteraz sme výsledok pokusu charakterizovali jednou náhodnou premennou.

Takýto prístup je často nepostačujúci a výsledok pokusu je potrebné charakterizovať dvomi alebo viacerými náhodnými premennými.

Napríklad hádzanie dvomi kockami. Môžeme sledovať náhodnú premennú predstavujúcu súčet padnutých bodov, ale tiež dvojicu náhodných premenných, z ktorých každá popisuje počet padnutých bodov na jednej z kociek.

Systém náhodných premenných

Definícia

Definícia

Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú náhodné premenné definované na tomto pradepodobnostnom priestore. Potom n-ticu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nazývame *systémom n náhodných premenných* (tiež *n-rozmerným náhodným vektorom* alebo *n-rozmernou náhodnou premennou*).

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Definícia

Distribučnou funkciou F systému n náhodných premenných $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazývame reálnu funkciu $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanú rovnosťou

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}\left(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\right). \qquad (1)$$

Systém náhodných premenných
Distribučná funkcia

Definícia

Distribučnou funkciou F systému n náhodných premenných $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazývame reálnu funkciu $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanú rovnosťou

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}\left(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\right). \qquad (1)$$

Zápis (1) znamená, že hodnota distribučnej funkcie v bode $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa rovná pravdepodobnosti že náhodná premenná X_1 nadobudne hodnotu menšiu ako x_1 a súčasne náhodná premenná X_2 nadobudne hodnotu menšiu ako x_2 atď. až náhodná premenná X_n nadobudne hodnotu menšiu ako x_n.

Systém náhodných premenných
Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

Systém náhodných premenných
Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

1. je nezáporná,

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

1. je nezáporná,
2. je neklesajúca v každom svojom argumente,

Systém náhodných premenných
Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

1. je nezáporná,
2. je neklesajúca v každom svojom argumente,
3. je zľava spojitá vzhľadom na každý svoj argument,

Systém náhodných premenných
Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

1. je nezáporná,
2. je neklesajúca v každom svojom argumente,
3. je zľava spojitá vzhľadom na každý svoj argument,
4. $$F(\infty, \infty, \ldots, \infty) = \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

Systém náhodných premenných
Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

1. je nezáporná,
2. je neklesajúca v každom svojom argumente,
3. je zľava spojitá vzhľadom na každý svoj argument,
4. $$F(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = \lim_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to -\infty \\ \vdots \\ x_n \to -\infty}} F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Systém náhodných premenných
Združená pravdepodobnostná funkcia

Definícia (Združená pravdepodobnostná funkcia)

Nech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je systém n diskrétnych náhodných premenných. *Združenú pravdepodobnostnú funkciu* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ systému $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ definujeme vzťahom

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right), \qquad (2)$$

pre všetky prípustné hodnoty x_i každej z náhodných premenných X_i a pre všetky $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Združená pravdepodobnostná funkcia
Príklad

Zadanie

Uvažujme trojnásobný hod mincou. Nech náhodná premenná X označuje počet hláv, padnutých v prvých dvoch pokusoch a náhodná premenná Y počet hláv padnutých v druhých dvoch pokusoch. Určíme združenú pravdepodobnostnú funkciu dvojice náhodných premenných (X, Y).

Združená pravdepodobnostná funkcia

Príklad

Ak by sme skúmali každú z náhodných premenných X a Y osobitne, zistili by sme, že obe majú binomické rozdelenie $\mathrm{Bin}\,(2, 0.5)$.

Individuálne rozdelenia nám však dávajú iba čiastkovú informáciu o správaní týchto náhodných premenných.

Ak je totiž napr. $X = 2$, tak nutne musí byť hodnota Y aspoň 1.

Združené správanie oboch náhodných premenných teda nie je možné plne charakterizovať individuálnymi rozdeleniami.

Združená pravdepodobnostná funkcia
Príklad

Výberový priestor Ω tohto náhodného pokusu má tvar

$$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,z),(h,z,h),(z,h,h),(h,z,z),(z,h,z),(z,z,h),(z,z,z)\}$$

Všetky udalosti z výberového prietoru majú rovnakú pravdepodobnosť $\frac{1}{8}$.

Ak nastane udalosť (h,h,h), tak platí $X = 2$ a $Y = 2$, ak však nastane udalosť (h,h,z), tak je $X = 2$ ale $Y = 1$.

Všetky kombinácie hodnôt náhodných premenných X a Y sú

$$(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)$$

Združená pravdepodobnostná funkcia
Príklad

Združenú pravdepodobnostnú funkciu môžeme prehľadne zapísať vo forme tabuľky

		y_1	y_2	y_3
		0	1	2
x_1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
x_2	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
x_3	2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Systém náhodných premenných
Združená hustota

Definícia (Združená funkcia hustoty)

Nech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je systém n spojitých náhodných premenných.Ak existuje nezáporná integrovateľná funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definovaná na $\mathbb{R}^n$ taká, že pre každé X spĺňajúce $a_i < X_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$\mathbb{P}(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) = \\ = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n, \tag{3}$$

tak funkciu f nazývame *združená hustota pravdepodobnosti* systému $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Systém náhodných premenných

Združená hustota

Poznámka

K tomu, aby funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bola združenou hustotou pravdepodobnosti systému náhodných premenných $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je nutné a stačí, aby boli splnené podmienky:

Systém náhodných premenných
Združená hustota

Poznámka

K tomu, aby funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bola združenou hustotou pravdepodobnosti systému náhodných premenných $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je nutné a stačí, aby boli splnené podmienky:

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ pre každé $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

Systém náhodných premenných
Združená hustota

Poznámka

K tomu, aby funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bola združenou hustotou pravdepodobnosti systému náhodných premenných $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je nutné a stačí, aby boli splnené podmienky:

1. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ pre každé $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
2. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$.

Systém náhodných premenných
Združená hustota

Poznámka

Nech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je systém n spojitých náhodných premenných a nech funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jeho združenou hustotou pravdepodobnosti. Pre združenú distribučnú funkciu F systému X potom platí

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, \dots, t_n)\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n \qquad (4)$$

resp.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \qquad (5)$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

Poznámka

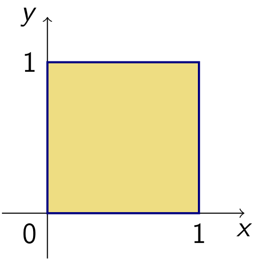
Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je n-rozmerná oblasť, ktorej n-rozmerný objem (miera množiny D) je rovný V. O náhodnom vektore $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ potom povieme, že má *rovnomerné rozdelenie* na D, ak jeho rozdelenie je popísané združenou funkciou hustoty

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{V} & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{6}$$

Ukážeme si niektoré špecifické prípady takéhoto rozdelenia.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



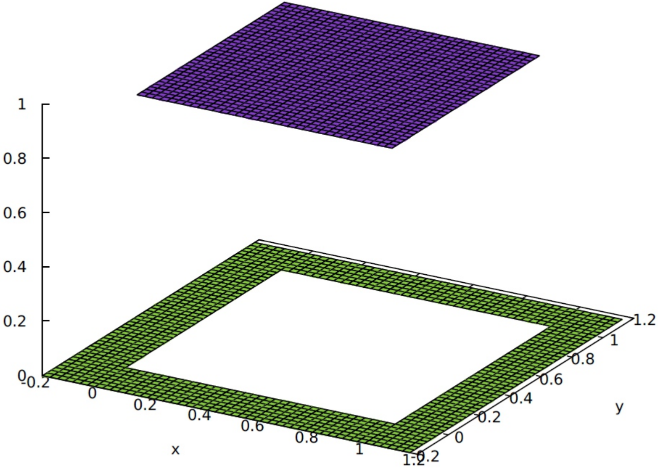
Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom štvorci

Nech $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Potom náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D, ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{6}$$

Príklad

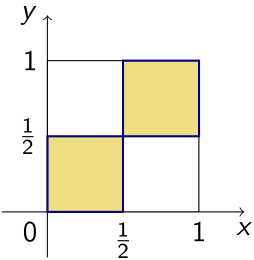
Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Funkcia hustoty pre rovnomerné rozdelenie na jednotkovom štvorci.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



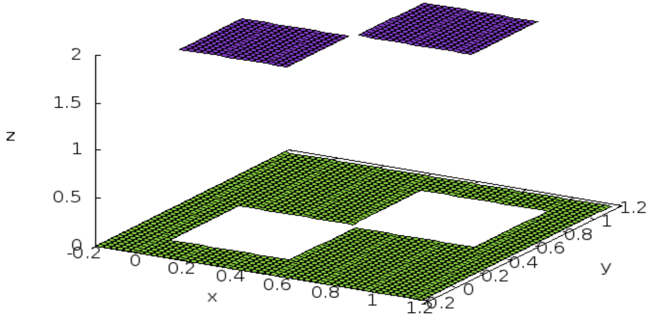
Rovnomerné rozdelenie na časti jednotkového štvorca

Nech D je zjednotením ľavej dolnej a pravej hornej štvrtiny jednotkového štvorca, teda $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ $\cup\{(x, y); \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$. Zrejme plošný obsah D je $\frac{1}{2}$, preto náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D, ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{6}$$

Príklad

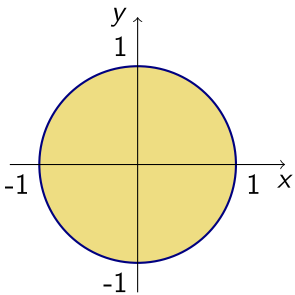
Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Funkcia hustoty rovnomerného rozdelenia.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

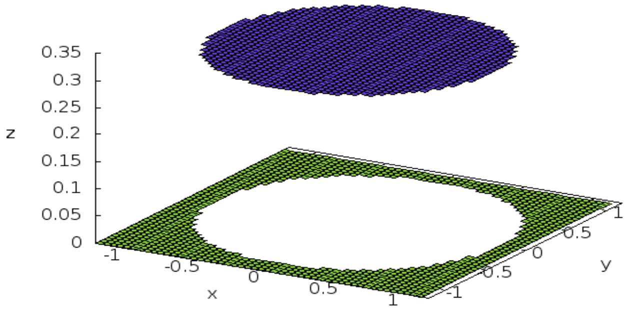


Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom kruhu

Nech D je jednotkový kruh, teda $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zrejme plošný obsah D je π, preto náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D, ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{6}$$

Príklad
Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Funkcia hustoty rovnomerného rozdelenia na jednotkovom kruhu.

Systém náhodných premenných
Marginálne distribučné funkcie

Nech $F(x_1, \ldots, x_n)$ je združená distribučná funkcia systému náhodných premenných. Distribučnú funkciu F_i náhodnej premennej X_i z tohto systému potom určíme ako:

$$F_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i < x_i) = \mathbb{P}(X_1 < \infty, \ldots, X_i < x_i, \ldots, X_n < \infty)$$

Definícia (Marginálna distribučná funkcia)

Distribučnú funkciu

$$F_i(x_i) = F(\infty, \ldots, x_i, \ldots, \infty) \tag{6}$$

nazývame *marginálna distribučná funkcia* náhodnej premennej X_i.

Systém náhodných premenných
Marginálne funkcie hustoty

Nech $F(x_1, \ldots, x_n)$ je združená distribučná funkcia systému náhodných premenných. Hustotu f_i náhodnej premennej X_i z tohto systému potom určíme ako:

$$f_i(x_i) = F_i'(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x_i).$$

Definícia (Marginálna hustota)

Funkciu

$$f_i(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x_i) \tag{7}$$

nazývame *marginálna hustota* náhodnej premennej X_i.

Systém náhodných premenných
Marginálne funkcie hustoty

Ak je známa združená funkcia hustoty $f(x_1, \ldots, x_n)$, tak marginálnu hustotu f_i náhodnej premennej X_i môžeme určiť ako:

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{i-1}\, \mathrm{d}x_{i+1} \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Systém náhodných premenných
Marginálne funkcie hustoty

Ak je známa združená funkcia hustoty $f(x_1, \dots, x_n)$, tak marginálnu hustotu f_i náhodnej premennej X_i môžeme určiť ako:

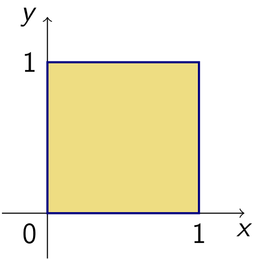
$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\, \mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n.$$

Pojem marginálnej hustoty je možné rozšíriť z jednej na viac náhodných premenných zo systému $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ak $1 \leq k < n$, tak *marginálnou združenou hustotou* systému $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ rozumieme funkciu

$$f_{1,2,\dots,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_{k+1} \dots \mathrm{d}x_n.$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom štvorci

Nech $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Potom náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D, ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{8}$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

Pre marginálne hustoty potom platí

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y = 1,$$

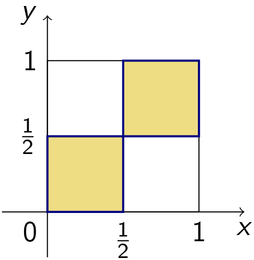
a podobne

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1.$$

Marginálne náhodné premenné majú teda rovnomerné rozdelenie na $\langle 0; 1\rangle$.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Rovnomerné rozdelenie na časti jednotkového štvorca

Nech D je zjednotením ľavej dolnej a pravej hornej štvrtiny jednotkového štvorca, teda $D = \{(x,y); 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(x,y); \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$. Zrejme plošný obsah D je $\frac{1}{2}$, preto náhodný vektor (X,Y) má rovnomerné rozdelenie na D, ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & (x,y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{8}$$

Príklad
Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

Pre marginálne hustoty potom platí

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\,\mathrm{d}y = 1, & x \in \langle 0; \frac{1}{2}\rangle \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\,\mathrm{d}y = 1, & x \in \langle \frac{1}{2}; 1\rangle \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

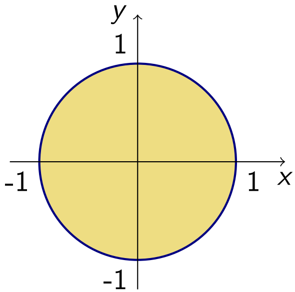
a podobne

$$f_2(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\,\mathrm{d}x = 1, & y \in \langle 0; \frac{1}{2}\rangle \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\,\mathrm{d}x = 1, & y \in \langle \frac{1}{2}; 1\rangle \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Marginálne náhodné premenné majú teda opäť rovnomerné rozdelenie na $\langle 0; 1\rangle$, a to aj napriek tomu, že pôvodná združená funkcia hustoty je veľmi odlišná a dokonca nespojitá na D.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom kruhu

Nech D je jednotkový kruh, teda $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zrejme plošný obsah D je π, preto náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D, ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \tag{8}$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

Pre určenie marginálnej hustoty si musíme uvedomiť, že pre $x \in (-1;1)$ je $f(x,y) \neq 0$ práve vtedy, ak platí $-\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}$. Pre takéto x potom dostávame

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

Preto

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & x \in (-1;1) \\ 0 & \text{inak}, \end{cases}$$

a zo symetrie

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & y \in (-1;1) \\ 0 & \text{inak}. \end{cases}$$

Príklad

Nerovnomerná združená hustota s rovnomernými marginálnymi hustotami

Zadanie

Nech náhodný vektor (X, Y) má združenú funkciu hustoty

$$f(x,y) = c - 2(c-1)(x+y-2xy),\ x,y \in \langle 0;1\rangle,\ 0 < c < 2.$$

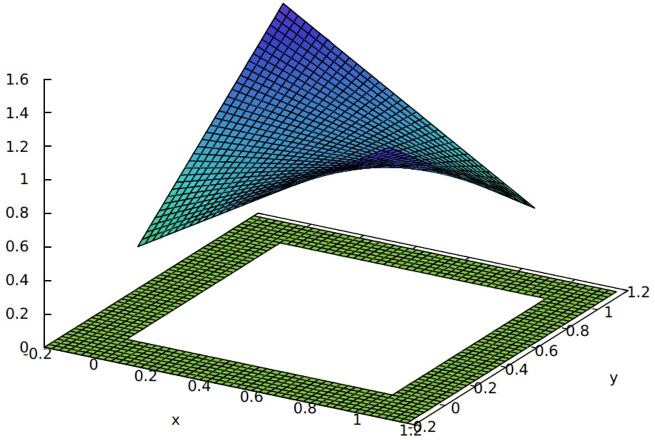
O tejto funkcii sa môžeme presvedčiť, že je na jednotkovom štvorci nezáporná (postupným posúdením všetkých alternatív $c < 1$, $c = 1$ a $c > 1$). Tiež paltí

$$c - 2(c-1)\int_0^1\int_0^1 (x+y-2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

Určme marginálne hustoty.

Príklad

Nerovnomerná združená hustota s rovnomernými marginálnymi hustotami



Funkcia hustoty pre $c = 0.5$.

Príklad

Nerovnomerná združená hustota s rovnomernými marginálnymi hustotami

Pre marginálnu hustotu X platí

$$f_1(x) = c-2(c-1)\int_0^1 (x+y-2xy)\,\mathrm{d}y = c-2(c-1)\left[x+\frac{1}{2}-x\right] = 1.$$

Pre marginálnu hustotu Y platí

$$f_2(y) = c-2(c-1)\int_0^1 (x+y-2xy)\,\mathrm{d}x = c-2(c-1)\left[y+\frac{1}{2}-y\right] = 1.$$

Systém náhodných premenných
Združená hustota a pravdepodobnosť

Podobne ako v jednorozmernom prípade platí

Veta

Nech D je regulárna oblasť v n-rozmernom priestore $\mathbb{R}^n$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ náhodný vektor so združenou funkciou hustoty $f(x_1, \ldots, x_n)$. Potom pre pravdepodobnosť, že náhodný vektor X nadobudne hodnotu z oblasti D platí

$$\mathbb{P}(X \in D) = \underset{D}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Systém náhodných premenných
Príklad

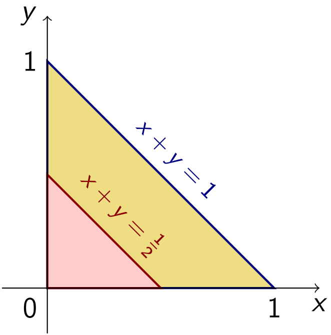
Zadanie

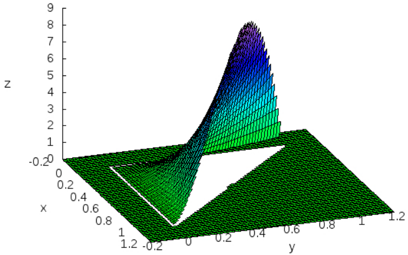
Nech (X, Y) je náhodný vektor so združenou funkciou hustoty

$$f(x, y) = 60xy^2, \quad x, y \geq 0, \; x + y \leq 1.$$

Určme pravdepodobnosť $\mathbb{P}\left(X + Y < \frac{1}{2}\right)$.

Systém náhodných premenných
Príklad





Funkcia hustoty.

Systém náhodných premenných
Príklad

$$\mathbb{P}\left(X+Y<\frac{1}{2}\right)=\int_{\substack{x,y\geq 0,\\ x+y<\frac{1}{2}}} 60xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=60\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}-y} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=60\int_0^{\frac{1}{2}} y^2\frac{\left(\frac{1}{2}-y\right)^2}{2}\,\mathrm{d}y$$
$$=30\int_0^{\frac{1}{2}} y^2\left(\frac{1}{2}-y\right)^2\mathrm{d}y$$
$$=30\cdot\frac{1}{960}=\frac{1}{32}.$$