Základy matematickej štatistiky

2. Testy hypotéz

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

13. mája 2017

Štatistické hypotézy

Štatistickou hypotézou rozumieme tvrdenie, týkajúce sa neznámych parametrov resp. ich funkcií, tvaru rozdelenia a ďalších vlastností základného súboru.

Rozdeľujeme na *parametrické* a *neparametrické* hypotézy.

Pramaterické hypotézy sú hypotézy týkajúce sa neznámych parametrov, vychádzame zo známych rozdelení.

Nepramaterické hypotézy sú hypotézy týkajúce sa všeobecných vlastností základného súboru, nevyžaduje sa znalosť rozdelenia v základnom súbore.

Test hypotézy

Pod *štatistickým testom* hypotézy rozumieme rozhodovacie pravidlo, podľa ktorého rozhodneme o platnosti či neplatnosti hypotézy.

Definícia (Formulácia hypotézy)

Prvým krokom je *formulácia štatistickej hypotézy*, ktorou je výskunná otázka v rámci experimentu. Formulujeme v podobe *nulovej hypotézy* H_0, ktorá vyjadruje tvrdenie o „nulovom rozdieli“ medzi testovanými súbormi dát a *alternatívnej hypotézy* H_1, ktorá popiera platnosť H_0. Číslo n nazývame *rozsah náhodného výberu*.

Alternatívna hypotéza môže byť buď *obojstranná* napr. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, alebo *jednostranná* napr. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

Hladina významnosti

Definícia (Hladina významnosti testu)

Chybu α zvolenú experimentátorom, ktorá určuje pravdepodobnosť toho, že sa zamietne nulová hypotéza, napriek tomu, že platí nazývame *hladina významnosti testu*.

Tabuľka: Klasifikácia chýb testu

Rozhodnutie / Skutočnosť	ZAMIETAME H_0	NEZAMIETAME H_0
H_0 platí	Chyba I.druhu α	Pravda $1-\alpha$
H_0 neplatí	Pravda $1-\beta$	Chyba II.druhu β

Testovacie kritérium

Pre konkrétny test je potrebné vypočítať hodnotu štatistiky, ktorú nazývame *testovacie kritérium*.

Ak hodnota testovacieho kritéria padne do tzv. *kritického oboru*, zamietame platnosť nulovej hypotézy H_0.

Ak naopak hodnota testovacej štatistiky padne do tzv. *oboru prijatia*, tak nulovú hypotézu **nezamietame**[1].

[1] Nezamietnuť ešte neznamená prijať, potvrdiť. Znamená to len, že pri experimente nastala udalosť, ktorá má veľkú pravdepodobnosť.

Test na rovnosť strednej hodnoty normálneho rozdelenia

Rozptyl rozdelenia je známy

Veta (Test pre aritmetický priemer)

Nech $x_1, \dots, x_n$ je náhodný výber, ktorý pochádza z normálneho rozdelenia s rozptylom σ^2 a $\overline{x}$ jeho výberový priemer. Ak pre strednú hodnotu μ normálneho rozdelenia platí nulová hypotéza

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

tak štatistika

$$U = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n},$$

má rozdelenie $U \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Test na rovnosť strednej hodnoty normálneho rozdelenia
Rozptyl rozdelenia je známy

Postup:

1. Zvolíme hladinu spoľahlivosti (pravdepodobnosti chyby prvého druhu), obvykle $\alpha = 0.05$ alebo $\alpha = 0.01$.
2. Z náhodného výberu o rozsahu n určíme aritmetický priemer $\overline{x}$ a vypočítame hodnotu štatistiky U.
3. Určíme kritickú hodnotu testu $U_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$ pre obojstrannú resp. $U_0 = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ pre jednostrannú alternatívu.
4. Porovnáme $|U|$ a kritickú hodnotu U_0.
   Ak je $|U| \geq U_0$ hypotézu H_0 zamietame.
   Ak je $|U| < U_0$ hypotézu H_0 nezamietame.

Jednovýberový t-test

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výber z $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kde $\sigma^2 > 0$ a $n \geq 2$. predpokladáme, že ani jeden z parametrov μ a σ^2 nie je známy. Testujeme hypotézu

Nulová hypotéza

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ proti alternatíve } H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Jednovýberový t-test

Veta (t-test)

Nech $x_1, \dots, x_n$ je náhodný výber, ktorý pochádza z normálneho rozdelenia, $\overline{x}$ jeho výberový priemer a s^2 jeho výberový rozptyl. Ak pre strednú hodnotu μ normálneho rozdelenia platí nulová hypotéza

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

tak štatistika

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n},$$

má studentovo rozdelenie $t(n-1)$.

Jednovýberový t-test

Postup

1. Určíme kritickú hodnotu t_α rozdelenia $\mathrm{t}\,(n-1)$ takú, že $\mathbb{P}(|t| \geq t_\alpha) = \alpha$.
2. Z náhodného výberu určíme $\overline{x}$,s a $T = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}$.
3. Porovnáme hodnotu T a t_α. Ak je:
    - $|T| \geq t_\alpha$, hypotézu zamietame,
    - $|T| < t_\alpha$, hypotézu nezamietame.

Dvojvýberový t-test

Nech $X_1, X_2, \dots, X_m$ je náhodný výber z $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$ a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ je náhodný výber z $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$, kde $\sigma^2 > 0$, $m \geq 2$ a $n \geq 2$. Predpokladajme, že obidva výbery sú na sebe nezávislé. Testujeme hypotézu

Nulová hypotéza

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ proti alternatíve } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

resp.

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta \text{ proti alternatíve } H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta.$$

Test na rovnosť stredných hodnôt normálnych rozdelení

Veta (t-test)

Nech $x_1, \dots, x_n$ je náhodný výber, ktorý pochádza z normálneho rozdelenia, $\overline{x}$ jeho výberový priemer a s_x^2 jeho výberový rozptyl. Podobne, nech $y_1, \dots, y_m$ je náhodný výber, ktorý pochádza z normálneho rozdelenia, $\overline{y}$ jeho výberový priemer a s_y^2 jeho výberový rozptyl. Ak pre stredné hodnoty μ_x a μ_x týchto normálnych rozdelení platí nulová hypotéza

$$H_0 : \mu_x = \mu_y,$$

tak štatistika

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}},$$

má studentovo rozdelenie $t(n+m-2)$.

Dvojvýberový t-test

Postup

1. Určíme kritickú hodnotu t_α rozdelenia $\mathrm{t}\,(m+n-2)$ takú, že $\mathbb{P}(|t| \geq t_\alpha) = \alpha$.
2. Z náhodného výberu určíme $\overline{x}, \overline{y}, s_X^2$, s_Y^2 a
$$T = \frac{\overline{x}-\overline{y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(m-1)s_X^2+(n-1)s_Y^2}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}.$$
3. Porovnáme hodnotu T a t_α. Ak je:
   - $|T| \geq t_\alpha$, hypotézu zamietame,
   - $|T| < t_\alpha$, hypotézu nezamietame.

Test na rovnosť rozptylu normálneho rozdelenia

Veta (χ^2-test)

Nech $x_1, \ldots, x_n$ je náhodný výber, ktorý pochádza z normálneho rozdelenia, $\overline{x}$ jeho výberový priemer a s^2 jeho výberový rozptyl. Ak pre rozptyl σ^2 normálneho rozdelenia platí nulová hypotéza

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

tak štatistika

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},$$

má rozdelenie chí-kvadrát $\chi^2(n-1)$.

Test na rovnosť rozptylov hodnôt normálnych rozdelení

Veta (F-test)

Nech $x_1, \dots, x_n$ je náhodný výber, ktorý pochádza z normálneho rozdelenia, $\overline{x}$ jeho výberový priemer a s_x^2 jeho výberový rozptyl. Podobne, nech $y_1, \dots, y_m$ je náhodný výber, ktorý pochádza z normálneho rozdelenia, $\overline{y}$ jeho výberový priemer a s_y^2 jeho výberový rozptyl. Ak pre rozptyly σ_x^2 a σ_x^2 týchto normálnych rozdelení platí nulová hypotéza

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2,$$

tak štatistika

$$F = \frac{n(m-1)s_x^2}{m(n-1)s_y^2},$$

má Fisherovo rozdelenie $F(n-1, m-1)$.

Test rovnosti parametera p binomického rozdelenia

Uvažujme sériu n nezávislých opakovaní pokusu a nech X predstavuje počet realizácií, pri ktorých nastala udalosť A. Ak je správna hypotéza $H_0 : \mathbb{P}(A) = p_0$, tak $X \sim \mathrm{Bin}(n, p_0)$. Potom štatistika

$$U = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}},$$

má asymptoticky normálne rozdelenie $\mathrm{N}(0, 1)$.

Test rovnosti parametera p binomického rozdelenia

Postup

1. Určíme kritickú hodnotu t_α normálneho rozdelenia $\mathrm{N}(0,1)$.
2. Z náhodného výberu určíme $\frac{X}{n}$ a hodnotu štatistiky $U = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$.
3. Porovnáme hodnotu $|U|$ a t_α. Ak je:
   - $|U| \geq t_\alpha$, hypotézu zamietame,
   - $|U| < t_\alpha$, hypotézu nezamietame.

Test rovnosti parameterov p dvoch binomických rozdelení

Uvažujme dve série n_1 a n_2 nezávislých opakovaní pokusu, pričom v prveje sérii $\mathbb{P}(A) = p_1$ a v druhej sérii $\mathbb{P}(A) = p_2$. Nech X_1 a X_2 predstavujú počet realizácií, pri ktorých nastala udalosť A. Ak je správna hypotéza $H_0 : p_1 = p_2$, tak $X_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1, p_1)$ a $X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2, p_2)$. Potom štatistika

$$U = \frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{N}}},$$

kde

$$\overline{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}, \quad \overline{q} = 1 - \overline{p}, \quad N = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2},$$

má asymptoticky normálne rozdelenie $\mathrm{N}(0, 1)$.

Test rovnosti parameterov p dvoch binomických rozdelení

Postup

1. Určíme kritickú hodnotu t_α normálneho rozdelenia $\mathrm{N}(0,1)$.
2. Z náhodného výberu určíme $\overline{p}, \overline{q}, N$ a hodnotu štatistiky $U = \dfrac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{\overline{p}\,\overline{q}}{N}}}$.
3. Porovnáme hodnotu $|U|$ a t_α. Ak je:
   - $|U| \geq t_\alpha$, hypotézu zamietame,
   - $|U| < t_\alpha$, hypotézu nezamietame.

Postup pri testovaní

1. Určíme hladinu spoľahlivosti.
2. Určíme hodnotu vhodnej testovacej štatistiky
3. Určíme kritické hodnoty príslušného rozdelenia testovacej štatistiky.
4. Porovnáme hodnotu testovacej štatistiky a kritickej hodnoty, ak padne do kritickéhoé oboru, nulovú hypotézu zamietame.

Poznámka

Moderný štatistický softvér ponúka priamo tzv. *p-hodnoty*, ktoré priamo udávajú pravdepodobnosť chyby prvého druhu.

Test dobrej zhody

Test na zhodu s daným rozdelením.

Nulová hypotéza H_0 potom hovorí, že náhodný výber pochádza z určitého typu rozdelenia.

Testuje sa odchýlka nameraných hodnôt od teoretických hodnôt zadaného rozdelenia.

Postup pri teste dobrej zhody

1. Obor možných hodnôt rozdelíme na k disjunktných častí.
2. Pre každú časť sa určí teoretická pravdepodobnosť p_i, že náhodná premenná nadobudne hodnotu z i-tej časti, $i = 1, \ldots, k$.
3. Vykoná sa n pokusov a určí sa, koľkokrát sme namerali hidnotu z i-tej časti, túto početnosť označíme x_i.
4. Vypočítame hodnotu štatistiky

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i}.$$

5. Ak má náhodná premenná predpokladané rozdelenie, tak testovacia štatistika má rozdelenie $\chi^2(k-1)$. V prípade, že bolo potrebné niektoré parametre rozdelenia odhadnúť, znižuje sa počet stupňov voľnosti o počet týchto odhadnutých parametrov.

Kontingenčná tabuľka
Triedenie podľa dvoch znakov

Pri triedení podľa dvoch znakov je výsledkom tabuľka, obsahujúca početnosti prvého aj druhého stupňa.

Ak druhým triediacim znakom je znak B s obmenami $b_1, b_2, \ldots, b_s$, tak početnosti dvojíc (a_i, b_j) zapisujeme v podobe n_{ij}, pre $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, s$.

Tabuľka, ktorá v prehľadnej forme obsahuje výsledky triedenia podľa dvoch znakov sa nazýva *kontingenčná tabuľka*.

Namiesto triedenia jedného výberu podľa dvoch znakov je možné rovnako spárovať hodnoty náhodných výberov z rozdelení dvoch náhodných premenných.

Kontingenčná tabuľka

Triedenie podľa dvoch znakov

	b_1	b_2	$\ldots$	b_j	$\ldots$	b_s	**Spolu**
a_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1s}	$n_{1.}$
a_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2j}	$\cdots$	n_{2s}	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	n_{i1}	n_{i2}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{is}	$n_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rj}	$\cdots$	n_{rs}	$n_{r.}$
Spolu	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$\cdots$	$n_{.j}$	$\cdots$	$n_{.s}$	n

Definujeme riadkové a stĺpcové početnosti $n_{i.} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$ a $n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$.

Test nezávislosti

Ako nulovú hypotézu H_0 testujeme hypotézu, že znaky A a B, resp. dve náhodné premenné sú nezávislé.

Ak je nulová hypotéza pravdivá, teoretické početnosti určíme ako $\eta_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$.

Testovacia štatistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - \eta_{ij})^2}{\eta_{ij}}$$

má potom rozdelenie $\chi^2((s-1)(r-1))$