Teória pravdepodobnosti

1. Pojem pravdepodobnosti

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

24. februára 2016

Náhodný pokus

Náhodný pokus

Pod *náhodným pokusom* rozumieme taký pokus, ktorý je možné (aspoň teoreticky) ľubovoľne veľa krát opakovať, pričom výsledok konkrétneho pokusu je nepredpovedateľný.

Náhodný pokus

Náhodný pokus

Pod *náhodným pokusom* rozumieme taký pokus, ktorý je možné (aspoň teoreticky) ľubovoľne veľa krát opakovať, pričom výsledok konkrétneho pokusu je nepredpovedateľný.

- Pri každom opakovaní náhodného pokusu je výsledkom tzv. *elementárna udalosť*.

Náhodný pokus

Náhodný pokus

Pod *náhodným pokusom* rozumieme taký pokus, ktorý je možné (aspoň teoreticky) ľubovoľne veľa krát opakovať, pričom výsledok konkrétneho pokusu je nepredpovedateľný.

- Pri každom opakovaní náhodného pokusu je výsledkom tzv. *elementárna udalosť*.
- Množinu všetkých elementárnych udalostí označujeme Ω a nazývame *výberový priestor*.

Poznámky

- Výberový priestor resp. jeho prvky musia byť vyčerpávajúce v tom zmysle, že pri realizácii náhodného pokusu musí nutne nastať jeden z výsledkov obsiahnutých v Ω.
- Prvky výberového priestoru Ω musia byť navzájom nezlučiteľné, teda žiadne dva výsledky nemôžu nastať súčasne.
- O konkrétnom výsledku náhodného pokusu rozhoduje náhoda. Túto náhodnosť popisujeme pomocou pravdepodobnosti.

Náhodná udalosť

Definícia (Udalosť)

Pod *náhodnou udalosťou* rozumieme množinu elementárnych udalostí. Náhodná udalosť je teda ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω.

Náhodná udalosť

Definícia (Udalosť)

Pod *náhodnou udalosťou* rozumieme množinu elementárnych udalostí. Náhodná udalosť je teda ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω.

- Presne by sme mali rozlišovať medzi výsledkami ω náhodného pokusu a elementárnymi udalosťami $\{\omega\} \subset \Omega$.

Náhodná udalosť

Definícia (Udalosť)

Pod *náhodnou udalosťou* rozumieme množinu elementárnych udalostí. Náhodná udalosť je teda ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω.

- Presne by sme mali rozlišovať medzi výsledkami ω náhodného pokusu a elementárnymi udalosťami $\{\omega\} \subset \Omega$.
- Náhodné udalosti označujeme veľkými písmenami latinskej abecedy, teda A, B, C atď.

Štatistická definícia pravdepodobnosti

- Definícia pravdepodobnosti je všeobecne motivovaná relatívnou frekvenciou výskytu sledovanej udalosti.

Štatistická definícia pravdepodobnosti

- Definícia pravdepodobnosti je všeobecne motivovaná relatívnou frekvenciou výskytu sledovanej udalosti.
- Predpokladajme, že vykonáme k náhodných pokusov a v tejto sérii budeme sledovať výskyt náhodnej udalosti A. Počet nastatí udalosti A označme k_A. (Zrejme je $k_A \leq k$.)

Štatistická definícia pravdepodobnosti

- Definícia pravdepodobnosti je všeobecne motivovaná relatívnou frekvenciou výskytu sledovanej udalosti.
- Predpokladajme, že vykonáme k náhodných pokusov a v tejto sérii budeme sledovať výskyt náhodnej udalosti A. Počet nastatí udalosti A označme k_A. (Zrejme je $k_A \leq k$.)

Štatistická definícia pravdepodobnosti

Udalosti A priradíme relatívnu početnosť

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k_A}{k}.$$

Pre $k \to \infty$ dostávame *štatistickú definíciu* pravdepodobnosti

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{k \to \infty} \frac{k_A}{k}.$$

Klasická definícia pravdepodobnosti

Každú konečnú náhodnú udalosť A môžeme charakterizovať vymenovaním elementárnych udalostí, ktoré obsahuje. Presnejšie

Klasická definícia pravdepodobnosti

Každú konečnú náhodnú udalosť A môžeme charakterizovať vymenovaním elementárnych udalostí, ktoré obsahuje. Presnejšie

Nastatie udalosti

Povieme, že pri realizácii náhodného pokusu *nastala udalosť A*, ak pre elementárnu udalosť ω, ktorá je výsledkom pokusu platí $\omega \in A$. V takom prípade tiež povieme, že výsledok pokusu *je priaznivý nastatiu udalosti A* a počet takýchto priaznivých výsledkov označíme $\#A$.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Nech výberový priestor Ω je konečný a obsahuje $\#\Omega$ prvkov.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Nech výberový priestor Ω je konečný a obsahuje $\#\Omega$ prvkov.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Udalosti A priradíme *klasickú pravdepodobnosť*, ktorá je definovaná vzťahom

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Klasický prístup k pravdepodobnosti zlyháva v prípade, že výberový priestor Ω je nekonečný.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Klasický prístup k pravdepodobnosti zlyháva v prípade, že výberový priestor Ω je nekonečný.

Počet prvkov prestáva byť mierou „veľkosti“ množiny, je potrebné ho nahradiť.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Klasický prístup k pravdepodobnosti zlyháva v prípade, že výberový priestor Ω je nekonečný.

Počet prvkov prestáva byť mierou „veľkosti“ množiny, je potrebné ho nahradiť.

Budeme sa zaoberať situáciou, kedy je A nejaká podmnožina n-rozmerného euklidovského priestoru E_n a zároveň je podmnožinou nejakého výberového priestoru $\Omega \subset E_n$.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Klasický prístup k pravdepodobnosti zlyháva v prípade, že výberový priestor Ω je nekonečný.

Počet prvkov prestáva byť mierou „veľkosti“ množiny, je potrebné ho nahradiť.

Budeme sa zaoberať situáciou, kedy je A nejaká podmnožina n-rozmerného euklidovského priestoru E_n a zároveň je podmnožinou nejakého výberového priestoru $\Omega \subset E_n$.

Potom pravdepodobnosť definujeme ako pomer „veľkostí“ A a Ω. Túto veľkosť určíme pomocou miery množiny.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Nech Ω je výberový priestor, $\Omega \subset E_n$, taký, že jeho miera $\mu(\Omega)$ je konečná a nech $A \subset \Omega$ je náhodná udalosť. Potom *geometrickou definíciou pravdepodobnosti* náhodnej udalosti A rozumieme priradenie

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Geometrická definícia pravdepodobnosti Príklad

Poznámka

Typickým prípadom použitia geometrickej definície pravdepodobnosti sú tzv. úlohy o stretnutí.

Príklad

Dve osoby sa dohodnú, že sa na určitom mieste stretnú v rozpätí jednej hodiny. Každý z nich po príchode na miesto počká 15 minút a ak druhá osoba počas týchto 15-tich minút nedorazí, tak odíde. Aká je pravdepodobnosť, že sa skutočne na dohodnutom mieste stretnú?

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu

- Okamih príchodu každej osoby na miesto môžeme považovať za číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu

- Okamih príchodu každej osoby na miesto môžeme považovať za číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
- Všetky možné situácie príchodov môžeme považovať za usporiadané dvojice (x, y), kde x je čas príchodu prvej osoby a y je čas príchodu druhej osoby.

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu

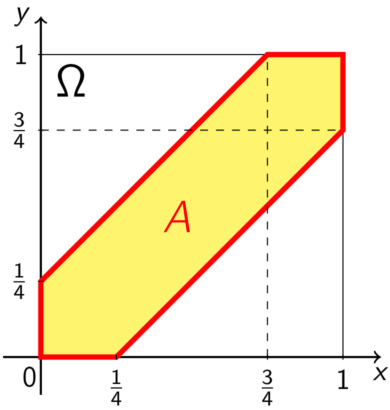
- Okamih príchodu každej osoby na miesto môžeme považovať za číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
- Všetky možné situácie príchodov môžeme považovať za usporiadané dvojice (x, y), kde x je čas príchodu prvej osoby a y je čas príchodu druhej osoby.
- Pretože je dohodnuté, že dorazia v rozpätí jednej hodiny, môžeme predpokladať $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ a všetky body reprezentujúce tieto príchody tak vyplnia jednotkový štvorec na obrázku 1.

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu

- Okamih príchodu každej osoby na miesto môžeme považovať za číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
- Všetky možné situácie príchodov môžeme považovať za usporiadané dvojice (x, y), kde x je čas príchodu prvej osoby a y je čas príchodu druhej osoby.
- Pretože je dohodnuté, že dorazia v rozpätí jednej hodiny, môžeme predpokladať $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ a všetky body reprezentujúce tieto príchody tak vyplnia jednotkový štvorec na obrázku 1.
- K tomu a by sa obe osoby stretli, nesmie byť rozdiel medzi ich príchodmi väčší ako 15 minút, tj, $\frac{1}{4}$ hodiny. Túto podmienku môžeme zapísať v tvare nerovnosti

$$|x - y| \leq \frac{1}{4}.$$

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu



Obr.: K úlohe o stretnutí

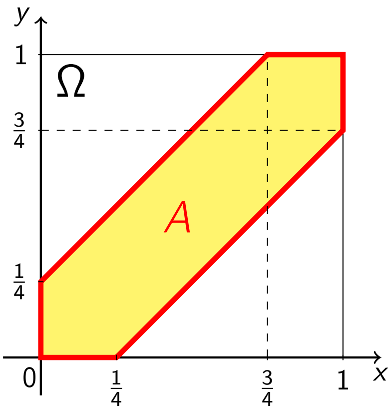
Po odstránení absolútnej hodnoty musíme vyriešiť dvojicu nerovníc

$$\begin{aligned} x - y &\leq \frac{1}{4} \\ y &\geq x - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} y - x &\leq \frac{1}{4} \\ y &\leq x + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

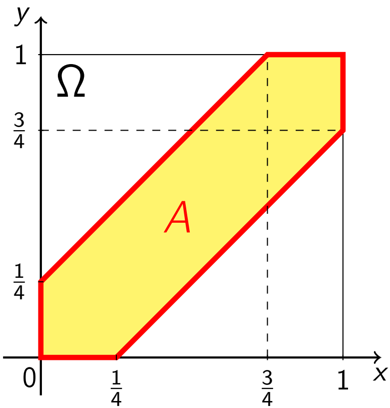
Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu



Obr.: K úlohe o stretnutí

Tak vidíme, že množina A, zodpovedajúca náhodnej udalosti, že sa obe osoby na danom mieste stretnú, je prienikom dvoch polrovín, tak ako je to na obrázku 1 farebne vyznačené.

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu

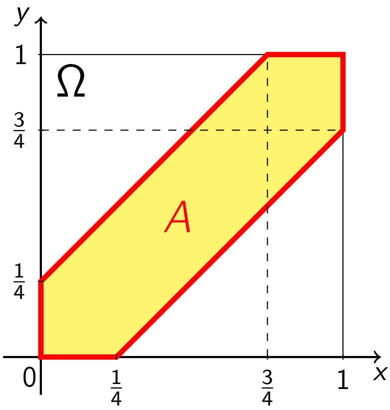


Obr.: K úlohe o stretnutí

Ľahko určíme, že pre plochu množiny Ω platí $\mu(\Omega) = 1$. Plochu množiny A určíme odčítaním plochy dvoch zhodných rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov s odvesnou dĺžky $\frac{3}{4}$. Teda

$$\mu(A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}.$$

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu



Obr.: K úlohe o stretnutí

Pre hľadanú pravdepodobnosť, že sa obe osoby stretnú teda platí

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{7}{16} = 0,4375.$$

Náhodné udalosti

- Zo zavedenia náhodnej udalosti je zrejmé, že s udalosťami budeme pracovať ako so špecifickými prípadmi množín.

Náhodné udalosti

- Zo zavedenia náhodnej udalosti je zrejmé, že s udalosťami budeme pracovať ako so špecifickými prípadmi množín.
- Prázdnu množinu $\emptyset$ budeme označovať termínom *nemožná udalosť*.

Náhodné udalosti

- Zo zavedenia náhodnej udalosti je zrejmé, že s udalosťami budeme pracovať ako so špecifickými prípadmi množín.
- Prázdnu množinu $\emptyset$ budeme označovať termínom *nemožná udalosť*.
- Samotný výberový priestor Ω budeme nazývať *istá udalosť*.

Náhodné udalosti

- Zo zavedenia náhodnej udalosti je zrejmé, že s udalosťami budeme pracovať ako so špecifickými prípadmi množín.
- Prázdnu množinu $\emptyset$ budeme označovať termínom *nemožná udalosť*.
- Samotný výberový priestor Ω budeme nazývať *istá udalosť*.
- Ďalej sa budeme zaoberať požiadavkami, ktoré budeme klásť na podmnožiny výberového priestoru Ω ktoré sú potrebné k tomu, aby sme každej udalosti vedeli priradiť jej pravdepodobnosť.

Dôsledok náhodnej udalosti

Definícia (Dôsledok náhodnej udalosti)

Nech Ω je výberový priestor, $A, B \subset \Omega$ náhodné udalosti. Povieme, že *udalosť B je dôsledkom udalosti A*, ak z nastatia náhodnej udalosti A vyplýva nastatie náhodnej udalosti B, čo je možné symbolicky zapísať ako $A \subset B$.

Dôsledok náhodnej udalosti

Definícia (Dôsledok náhodnej udalosti)

Nech Ω je výberový priestor, $A, B \subset \Omega$ náhodné udalosti. Povieme, že *udalosť B je dôsledkom udalosti A*, ak z nastatia náhodnej udalosti A vyplýva nastatie náhodnej udalosti B, čo je možné symbolicky zapísať ako $A \subset B$.

Poznámka

Táto definícia znamená, že každá elementárna udalosť priaznivá nastatiu udalosti A je priaznivá aj nastatiu náhodnej udalosti B.

Dôsledok náhodnej udalosti

Definícia (Dôsledok náhodnej udalosti)

Nech Ω je výberový priestor, $A, B \subset \Omega$ náhodné udalosti. Povieme, že *udalosť B je dôsledkom udalosti A*, ak z nastatia náhodnej udalosti A vyplýva nastatie náhodnej udalosti B, čo je možné symbolicky zapísať ako $A \subset B$.

Poznámka

Pre zavedenú reláciu platia jednoduché pravidlá:

a) Pre každú udalosť A je $A \subset A$.

b) Ak pre trojicu udalostí A, B, C platí $A \subset B$, $B \subset C$, tak $A \subset C$.

c) Pre každé A je $\emptyset \subset A$.

d) Pre každé A je $A \subset \Omega$

Vzťahy medzi náhodnými udalosťami

Definícia (Rovnosť náhodných udalostí)

Hovoríme, že *udalosti A a B sú si rovné*, ak platí $A \subset B$ a súčasne aj $B \subset A$.

Definícia (Doplnková udalosť)

Udalosť A^c nazývame *doplnkovou udalosťou k udalosti A*, ak A^c nastane práve vtedy, ak nenastane udalosť A.

Vzťahy medzi náhodnými udalosťami

Definícia (Rovnosť náhodných udalostí)

Hovoríme, že *udalosti A a B sú si rovné*, ak platí $A \subset B$ a súčasne aj $B \subset A$.

Definícia (Doplnková udalosť)

Udalosť A^c nazývame *doplnkovou udalosťou k udalosti A*, ak A^c nastane práve vtedy, ak nenastane udalosť A.

Poznámka

Pre doplnkové udalosti platí:

a) Pre každú udalosť A platí $(A^c)^c = A$.

b) $\Omega^c = \emptyset$.

c) $\emptyset^c = \Omega$.

Operácie s náhodnými udalosťami

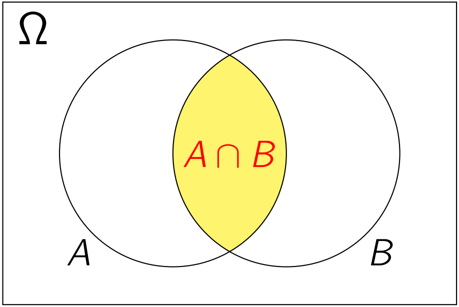
Definícia (Súčin náhodných udalostí)

Nech A a B sú náhodné udalosti. *Súčinom (prienikom) náhodných udalosti A a B* nazývame náhodnú udalosť $C = A \cap B$, ktorá nastane vtedy, ak nastane udalosť A a súčasne nastane aj udalosť B.

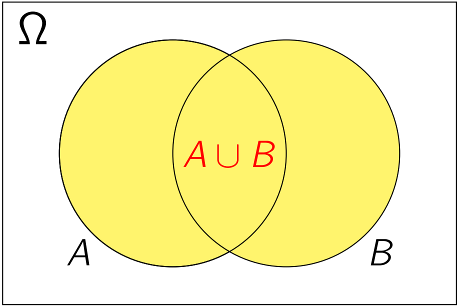
Definícia (Súčet náhodných udalostí)

Nech A a B sú náhodné udalosti. *Súčtom (zjednotením) náhodných udalosti A a B* nazývame náhodnú udalosť $C = A \cup B$, ktorá nastane vtedy, ak nastane aspoň jedna z udalostí A alebo B.

Operácie s náhodnými udalosťami, ilustrácia



Obr.: Grafická ilustrácia súčinu udalostí.



Obr.: Grafická ilustrácia súčtu udalostí.

Operácie s náhodnými udalosťami, vlastnosti

Veta

Pre operácie s udalosťami platia tieto pravidlá: Pre každé tri udalosti $A, B, C \subset \Omega$ platí

a) $A \cap A = A$,
b) $A \cap A^c = \emptyset$,
c) $A \cap \Omega = A$,
d) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
e) $A \cup A = A$,
f) $A \cup A^c = \Omega$,
g) $A \cup \Omega = \Omega$,
h) $A \cap B = B \cap A$,
i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
j) $C \subset A \wedge C \subset B \Rightarrow C \subset (A \cap B)$,
k) $A \cup \emptyset = A$,
l) $A \cup B = B \cup A$,
m) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
n) $A \subset C \wedge B \subset C \Rightarrow (A \cap B) \subset C$.

Operácie s náhodnými udalosťami, vlastnosti

Poznámka

Pre každé dve udalosti $A, B \subset \Omega$ platí

a) $A \subset A \cup B$,

b) $B \subset A \cup B$,

c) $A \cap B \subset A$,

d) $A \cap B \subset B$,

Poznámka

Pre každé dve udalosti $A, B \subset \Omega$ platia de Morganove pravidlá:

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Operácie s náhodnými udalosťami, vlastnosti

Poznámka

Definíciu súčtu a súčinu náhodných udalostí je možné prirodzeným spôsobom rozšíriť z dvoch na ľubovolný počet náhodných udalostí. Ak I je nejaká množina indexov a $\{A_i\}_{i\in I}$ množina náhodných udalostí, tak súčtom resp. súčinom týchto náhodných udalostí rozumieme náhodnú udalosť A spočívajúcu v tom, že nastane aspoň jedna z náhodných udalostí A_i, a píšeme $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ resp. že nastane každá z náhodných A_i čo zapisujeme $A = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Operácie s náhodnými udalosťami

Definícia (Rozdiel udalostí)

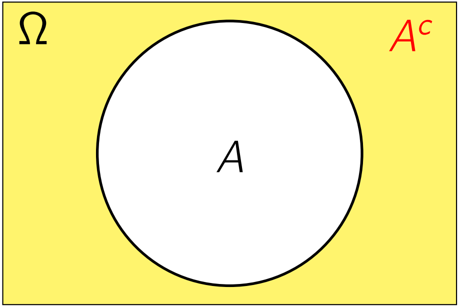
Nech $A, B \subset \Omega$ sú náhodné udalosti. O náhodnej udalosti C hovoríme, že je *rozdielom náhodných udalostí* A a B a zapisujeme $C = A - B$, ak náhodná udalosť C nastane práve vtedy, keď nastane náhodná udalosť A, avšak nenastane náhodná udalosť B.

Poznámka

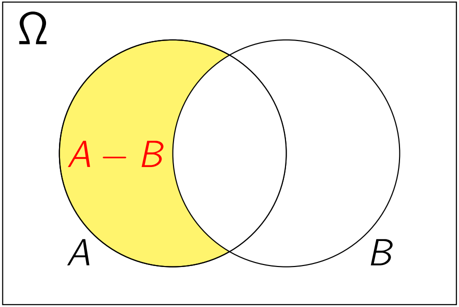
Z definície je zrejmé, že pre rozdiel dvoch náhodných udalostí platí

$$A - B = A \cap B^c.$$

Operácie s náhodnými udalosťami, ilustrácia



Obr.: Grafická ilustrácia doplnkovej udalosti.



Obr.: Grafická ilustrácia rozdielu udalostí.

Zlučiteľnosť náhodných udalostí

Definícia (Nezlučiteľné udalosti)

Nech A a B sú náhodné udalosti. Hovoríme, že náhodné udalosti A a B sú *nezlučiteľné* alebo *disjunktné*, ak je ich súčinom nemožná udalosť, teda ak

$$A \cap B = \emptyset.$$

Podobne množinu náhodných udalostí $\{A_i\}_{i \in I}$ nazveme nezlučiteľnými alebo disjunktnými, ak platí

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset.$$

Zlučiteľnosť náhodných udalostí

Definícia (Nezlučiteľné udalosti)

Nech A a B sú náhodné udalosti. Hovoríme, že náhodné udalosti A a B sú *nezlučiteľné* alebo *disjunktné*, ak je ich súčinom nemožná udalosť, teda ak

$$A \cap B = \emptyset.$$

Množinu udalostí $\{A_i\}_{i \in I}$ nazveme *po dvoch nezlučiteľné* alebo *po dvoch disjunktné*, ak pre každú dvojicu indexov $i, j \in I, i \neq j$ platí

$$A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Pole udalostí

Definícia (Pole udalostí)

Nech je daný neprázdny výberový priestor Ω a systém jeho podmnožín $\mathcal{F}$. Tento systém podmnožín nazývame *pole udalostí* alebo tiež *σ-algebra*, ak sú splnené tieto podmienky:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$.

Pole udalostí

Definícia (Pole udalostí)

Nech je daný neprázdny výberový priestor Ω a systém jeho podmnožín $\mathcal{F}$. Tento systém podmnožín nazývame *pole udalostí* alebo tiež *σ-algebra*, ak sú splnené tieto podmienky:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Pre každé $A \in \mathcal{F}$ platí $A^c \in \mathcal{F}$.

Pole udalostí

Definícia (Pole udalostí)

Nech je daný neprázdny výberový priestor Ω a systém jeho podmnožín $\mathcal{F}$. Tento systém podmnožín nazývame *pole udalostí* alebo tiež *σ-algebra*, ak sú splnené tieto podmienky:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Pre každé $A \in \mathcal{F}$ platí $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Ak je $A_i \in \mathcal{F}$ pre každé $i = 1, 2, 3, \ldots,$ tak platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Pole udalostí, príklad

Tento príklad nám ilustruje, ako nám môže zvolená σ-algebra reprezentovať stupeň našich poznatkov o výsledkoch náhodného pokusu.

Príklad

Uvažujme náhodný pokus, ktorý predstavuje súčasný hod mincou a hracou kockou. Zodpovedajúci výberový priestor je

$$\begin{aligned} \Omega &= \{h, z\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= \{(h, 1), (h, 2), \ldots, (h, 6), (z, 1), (z, 2), \ldots, (z, 6)\} \end{aligned}$$

kde h a z označujú padnutie hlavy alebo znaku na minci.

Pole udalostí, príklad

Ak je známy výsledok hodu mincou, tak túto čiastkovú informáciu môžeme využiť na zavedenie nasledujúcej σ-algebry

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{h\} \times \{1,2,3,4,5,6\}, \{z\} \times \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Pole udalostí, príklad

Ak je naopak známy výsledok hodu kockou, tak túto čiastkovú informáciu môžeme využiť na zavedenie inej σ-algebry

$$\mathcal{H}\{\emptyset, \Omega, \{h, z\} \times \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}), \},$$

kde symbol $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}), \}$ označuje systém všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Táto σ-algebra potom obsahuje napríklad takéto udalosti:

$\{h, z\} \times \{1, 3, 5\}$ ktorá popisuje situáciu, kedy na kocke padlo nepárne číslo,

$\{h, z\} \times \{3, 6\}$ ktorá popisuje situáciu, kedy na kocke padlo číslo deliteľné tromi.

Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Definícia

Majme výberový priestor Ω a systém jeho podmnožín $\mathcal{F}$, ktorý je σ-algebrou. Potom *pravdepodobnosťou* rozumieme ľubovolné zobrazenie $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, ktoré má tieto vlastnosti:

(1) Pre každé $A \in \mathcal{F}$ platí $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(3) Nech $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sú po dvoch nezlučiteľné udalosti, $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, 3, \ldots$. Potom

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Trojicu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ potom nazývame *(Kolmogorovov) pravdepodobnostný priestor*.

Axiomatická definícia pravdepodobnosti
Vlastnosti

Veta

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Potom platí:

a) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$.

b) Ak A a B sú náhodné udalosti také, že $B \subseteq A$, tak $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

c) Pre každú náhodnú udalosť A platí $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

d) Nech $A_i, i = 1, 2, \ldots$ sú náhodné udalosti. Potom platí $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Dôkaz:

Pre každú náhodnú udalosť A platí $A \cup A^c = \Omega$. Pretože je $A \cap A^c = \emptyset$, môžeme podle vlastnosti (3) z definície písať

$$\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

a podľa vlastnosti (2) z definície tak máme

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Ak si teraz uvedomíme, že $\emptyset^c = \Omega$, tak dostávame

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0,$$

čo je tvrdenie a) vety.

Dôkaz:

Teraz overíme platnosť tvrdenia b). Ak je $A \supseteq B$, tak platí $A = B + C$, kde označujeme $C = A \cap B^c$ a platí teda $B \cap C = \emptyset$. Podľa vlastnosti (3) z definície preto platí

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

Tu podľa vlastnosti (1) z definície platí $\mathbb{P}(C) \geq 0$, odkiaľ ihneď vyplýva tvrdenie b) vety.

Veta o pravdepodobnosti doplnkovej udalosti

Pri dokazovaní predchádzajúcej vety sme odvodili vzťah $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Jeho úpravou okamžite obdržíme tvrdenie nasledujúcej vety:

Veta (O pravdepodobnosti doplnkovej udalosti)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Potom pre každú náhodnú udalosť A platí

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A). \tag{1}$$

Veta o pravdepodobnosti doplnkovej udalosti

Pri dokazovaní predchádzajúcej vety sme odvodili vzťah $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Jeho úpravou okamžite obdržíme tvrdenie nasledujúcej vety:

Veta (O pravdepodobnosti doplnkovej udalosti)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Potom pre každdú náhodnú udalosť A platí

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A). \tag{1}$$

Poznámka

Veta o pravdepodobnosti doplnkovej udalosti sa s výhodou využíva pri výpočte „pravdepodobnosti aspoň raz“, teda pravdepodobnosti že sledovaná udalosť nastane v sérii pokusov aspoň jeden krát.

Pravdepodobnosť súčtu zlučiteľných udalostí

Veta (O súčte pravdepodobností)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a nech A a B sú ľubovolné náhodné udalosti. Potom platí

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \tag{2}$$

Dôkaz:

Pre súčet náhodných udalostí môžeme písať $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ a zrejme platí $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$. Ide už teda o súčet nezlučiteľných udalostí a preto

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B).$$

Ďalej platí $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ a zrejme je opäť $(A \cap B) \cap (A^c \cap B) = \emptyset$. Ide tak o súčet nezlučiteľných udalostí a preto

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B).$$

Odčítaním oboch rovníc dostávame

$$\mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

z čoho už vyplýva tvrdenie vety.

Princíp exklúzie a inklúzie

Predchádzajúcu vetu je možné indukciou rozšíriť na súčet ľubovoľného počtu náhodných udalostí.

Veta (Princíp exklúzie a inklúzie)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a nech A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú náhodné udalosti. Potom platí

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \tag{3}$$

Príklad

Príklad

Hádžeme dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť že aspoň na jednej z nich padne šesťka?

Riešenie

Výberový priestor $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ a má 36 prvkov. Označme ako A náhodnú udalosť, že na prvej kocke padla šesťka a ako B náhodnú udalosť, že na druhej kocke padla šesťka. Zrejme

$$\begin{aligned}
A &= \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \\
B &= \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \\
A \cap B &= \{(6,6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

Podľa (2) tak dostaneme

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$