Teória pravdepodobnosti

5. Vytvárajúce funkcie

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

15. novembra 2015

Vytvárajúca funkcia

Definícia (Vytvárajúca funkcia postupnosti)

Nech $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ je nekonečná postupnosť. Pod *vytvárajúcou funkciou* tejto postupnosti rozumieme mocninový rad:

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots . \tag{1}$$

Poznámka

Poznáme aj iné typy vytvárajúcich funkcií, napr. exponenciálna vytvárajúca funkcia, Dirichletova vytvárajúca funkcia a pod., nebudeme sa však nimi zaoberať.

Vytvárajúca funkcia

Z Taylorovej vety vieme, že platí

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots$$

Ak je teda $f(z)$ vytvárajúca funkcia nejakej postupnosti $\{a_n\}$, tak pre jej členy platí

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Vytvárajúca funkcia

Medzi postupnosťami a vytvárajúcimi funkciami existuje korešpondencia, ktorú vyznačujeme obojstrannouo šípkou:

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \longleftrightarrow a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Vytvárajúca funkcia

Medzi postupnosťami a vytvárajúcimi funkciami existuje korešpondencia, ktorú vyznačujeme obojstrannouo šípkou:

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \longleftrightarrow a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Ako príklad uveďme

$$\begin{aligned}
\{0, 0, 0, 0, \dots\} &\longleftrightarrow 0 + 0z + 0z^2 + \cdots = 0 \\
\{1, 0, 0, 0, \dots\} &\longleftrightarrow 1 + 0z + 0z^2 + \cdots = 1 \\
\{1, 2, 1, 0, \dots\} &\longleftrightarrow 1 + 2z + z^2 + 0z^3 + \cdots = 1 + 2z + z^2.
\end{aligned}$$

Geometrický rad

Pripomeňme si, že pre súčet geometrického radu platí:

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

Tento rad je konvergentný len pre $|z| < 1$, avšak vzhľadom na to, že hodnoty vytvárajúcich funkcií pre konkrétne hodnoty z vyčíslujeme len zriedkavo, nebudeme sa podrobne venovať otázkam konvergencie.

Geometrický rad

S využitím vzorca pre súčet geometrického radu je možné nájsť tvary vytvárajúcich funkcií pre niektoré nekonečné postupnosti.

Ako príklad uveďme

Geometrický rad

S využitím vzorca pre súčet geometrického radu je možné nájsť tvary vytvárajúcich funkcií pre niektoré nekonečné postupnosti.

Ako príklad uveďme

$$\{1,1,1,1,\dots\} \longleftrightarrow 1+z+z^2+\cdots = \frac{1}{1-z},$$

$$\{1,-1,1,-1,\dots\} \longleftrightarrow 1-z+z^2-z^3+\cdots = \frac{1}{1+z},$$

$$\{1,a,a^2,a^3,\dots\} \longleftrightarrow 1+az+a^2z^2+a^3z^3+\cdots = \frac{1}{1-az},$$

$$\{1,0,1,0,\dots\} \longleftrightarrow 1+z^2+z^4+\cdots = \frac{1}{1-z^2},$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Násobenie číslom

Veta (Pravidlo násobenia číslom)

Ak

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\} \longleftrightarrow G(z)$$

tak

$$\{c \cdot a_0, c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3, \ldots\} \longleftrightarrow c \cdot G(z)$$

Dôkaz

$$\begin{aligned}\{c \cdot a_0, c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3, \ldots\} &\longleftrightarrow c \cdot a_0 + c \cdot a_1 z + c \cdot a_2 z^2 + \cdots = \\ &= c \cdot (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) \\ &= c \cdot G(z).\end{aligned}$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Násobenie číslom - ukážka

Už vieme, že platí

$$\{1, 0, 1, 0, \dots\} \longleftrightarrow 1 + z^2 + z^4 + \dots = \frac{1}{1 - z^2}.$$

Vynásobením vytvárajúcej funkcie číslom 3 dostávame

$$\{3, 0, 3, 0, \dots\} \longleftrightarrow 3 + 3z^2 + 3z^4 + \dots = \frac{3}{1 - z^2}.$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Sčítanie

Veta (Pravidlo sčitovania)

Ak

$$\begin{aligned}\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\} &\longleftrightarrow G(z),\\ \{b_0, b_1, b_2, b_3, \dots\} &\longleftrightarrow H(z),\end{aligned}$$

tak

$$\{a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots\} \longleftrightarrow G(z) + H(z).$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami
Sčítanie

Dôkaz

$$
\begin{aligned}
\{a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots\} \longleftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n, \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \\
&= G(z)+H(z).
\end{aligned}
$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Sčítanie ukážka

Sčítajme vytvárajúce funkcie dvoch postupností:

$$\{1, \quad 1 \quad ,1 \quad ,1, \quad \ldots \quad \} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z}$$

$$\overline{\hspace{10cm}}$$

.

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Sčítanie ukážka

Sčítajme vytvárajúce funkcie dvoch postupností:

$$
\begin{array}{llllll}
\{1, & 1 & ,1 & ,1, & \dots & \} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z} \\
\{1, & -1 & ,1 & ,-1, & \dots & \} \longleftrightarrow \frac{1}{1+z} \\
\hline
\end{array}
$$

.

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Sčítanie ukážka

Sčítajme vytvárajúce funkcie dvoch postupností:

$$
\begin{array}{l}
\{1,\quad 1\quad ,1\quad ,1,\quad \ldots\quad \} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z} \\
\{1,\quad -1\quad ,1\quad ,-1,\quad \ldots\quad \} \longleftrightarrow \frac{1}{1+z} \\
\hline
\{2,\quad 0,\quad 2,\quad 0,\quad \ldots\quad \} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}.
\end{array}
$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami
Sčítanie ukážka

Sčítajme vytvárajúce funkcie dvoch postupností:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\{1, & 1 & ,1 & ,1, & \dots & \} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z} \\
\{1, & -1 & ,1 & ,-1, & \dots & \} \longleftrightarrow \frac{1}{1+z} \\
\hline
\{2, & 0, & 2, & 0, & \dots & \} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}.
\end{array}
$$

Iným postupom sme odvodili vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{2, 0, 2, 0, \dots\}$ Platí

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} = \frac{1+z+1-z}{(1-z)(1+z)} = \frac{2}{1-z^2}.$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Posun doprava

Veta (Pravidlo posunutia vpravo)

Ak

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\} \longleftrightarrow G(z),$$

tak

$$\{\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-\text{krát}}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\} \longleftrightarrow z^k \cdot G(z).$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami
Posun doprava

Dôkaz

$$
\begin{aligned}
\{\overbrace{0,0,\dots,0}^{k-\text{krát}}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\} \longleftrightarrow a_0 z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} \dots \\
= z^k (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) \\
= z^k \cdot G(z).
\end{aligned}
$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami
Posunutie doprava - ukážka

Už vieme, že platí

$$\{1, 1, 1, 1, \dots\} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z}.$$

Vykonajme posun doprava doplnením k núl:

$$\begin{aligned}\{\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-\text{krát}}, 1, 1, 1, 1, \dots\} \longleftrightarrow z^k + z^{k+1} + z^{k+2} + \cdots \\ = z^k \cdot (1 + z + z^2 + \cdots) \\ = \frac{z^k}{1-z}.\end{aligned}$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami
Derivovanie

Veta (Pravidlo derivovania)

Ak

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\} \longleftrightarrow G(z),$$

tak

$$\{a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots\} \longleftrightarrow G'(z).$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami
Derivovanie

Dôkaz

$$\begin{aligned}\{a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots\} \longleftrightarrow a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots) \\ = G'(z).\end{aligned}$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Derivovanie - ukážka

Vieme, že platí

$$\{1, 1, 1, 1, \dots\} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z}.$$

Derivovaním podľa z dostávame:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1 + z + z^2 + \cdots) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\} \longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)^2}$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Derivovanie - ukážka

Užitočnosť pravidiel si ukážeme na odvodení vytvárajúcej funkcie postupnosti štvorcov celých nezáporných čísel, teda postupnosti

$$\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}.$$

Ak začneme s postupnosťou

$$\{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

a každý jej člen vynásobíme dvakrát jeho indexom, dostaneme požadovaný výsledok.

Derivácia okrem vynásobenia každého prvku svojím indexom posúva celú postupnosť o jedno miesto doľava. Preto budeme derivovanie kombinovať s posunutím doprava. postupne dostávame výsledok.

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Derivovanie - ukážka

$$\{1, 1, 1, 1, 1, \dots\} \longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)}$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Derivovanie - ukážka

$$\{1,1,1,1,1,\dots\} \longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)}$$

$$\{1,2,3,4,\dots\} \longleftrightarrow \frac{d}{dz}\frac{1}{(1-z)} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Derivovanie - ukážka

$$\{1,1,1,1,1,\dots\} \longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)}$$

$$\{1,2,3,4,\dots\} \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(1-z)} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\{0,1,2,3,\dots\} \longleftrightarrow z\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami

Derivovanie - ukážka

$$\{1,1,1,1,1,\dots\} \longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)}$$

$$\{1,2,3,4,\dots\} \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(1-z)} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\{0,1,2,3,\dots\} \longleftrightarrow z\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\{1,4,9,16,\dots\} \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

Operácie s vytvárajúcimi funkciami
Derivovanie - ukážka

$$\{1,1,1,1,1,\dots\} \longleftrightarrow \frac{1}{(1-z)}$$

$$\{1,2,3,4,\dots\} \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(1-z)} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\{0,1,2,3,\dots\} \longleftrightarrow z\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\{1,4,9,16,\dots\} \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

$$\{0,1,4,9,\dots\} \longleftrightarrow z\frac{z+1}{(1-z)^3} = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti

Budeme sa venovať náhodným premenným, ktoré môžu nadobúdať len celočíselné a nezáporné hodnoty.

Definícia (Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti)

Nech X je náhodná premenná taká, že nadobúda len nezáporné celočíselné hodnoty a $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ nech je jej pravdepodobnostná funkcia. *Vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti* $G_X(z)$ náhodnej premennej definujeme pomocou nekonečného radu:

$$G_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) z^x = \mathbb{E}\left(z^X\right), \tag{2}$$

kde z je komplexné číslo.

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti

Budeme sa venovať náhodným premenným, ktoré môžu nadobúdať len celočíselné a nezáporné hodnoty.

Definícia (Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti)

Nech X je náhodná premenná taká, že nadobúda len nezáporné celočíselné hodnoty a $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ nech je jej pravdepodobnostná funkcia. *Vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti* $G_X(z)$ náhodnej premennej definujeme pomocou nekonečného radu:

$$G_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) z^x = \mathbb{E}\left(z^X\right), \tag{2}$$

kde z je komplexné číslo.

Pretože platí $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$, konverguje rad v (2) pre $|z| \leq 1$, a jeho súčet je analytická funkcia, regulárna v jednotkovom kruhu.

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti

Poznámka

Z definície vytvárajúcej funkcie vyplýva, že vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti jednoznačne určuje pravdepodobnostnú funkciu rozdelenia pravdepodobnosti. Platí totiž

$$p(0) = G_X(0), \quad p(k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}, \; k = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

kde $G_X^{(k)}(z)$ je k-ta derivácia funkcie $G_X(z)$.

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti
Príklad

Binomické rozdelenie

Nech X je diskrétna náhodná premenná a jej pravdepodobnostná funkcia nech je daná vzťahom

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad \text{kde } k = 0, 1, \ldots, n,$$

pričom $p + q = 1$.

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti
Príklad

Podľa definície vytvárajúce funkcie pravdepodobnosti máme

$$\begin{aligned} G(z) &= \binom{n}{0} p^0 q^n z^0 + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} z^1 + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} z^2 + \dots \\ &= \binom{n}{0} (zp)^0 q^n + \binom{n}{1} (zp)^1 q^{n-1} + \binom{n}{2} (zp)^2 q^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Posledný výraz je však binomickým rozvojom mocniny dvojčlena $(q+pz)^n$. Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti má teda tvar

$$G(z) = (q+pz)^n.$$

Vlastnosti vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti

Vyjadríme hodnotu $G_X(1)$.

Postupne dostávame

$$\begin{aligned} G(1) &= p(0) + p(1) + p(2) + \dots \\ &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \dots \\ &= 1. \end{aligned}$$

Platí teda

$$\boxed{G_X(1) = 1.}$$

Vlastnosti vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti

Vyjadríme hodnotu $G'_X(1)$.

Postupne dostávame

$$\begin{aligned} G'(z) &= p(1)z^0 + 2p(2)z + 3p(3)z^2 + \dots \\ G'(1) &= \mathbb{P}(X=1) + 2\mathbb{P}(X=2) + 3\mathbb{P}(X=3) + \dots \\ &= \sum_k k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

Platí teda

$$\boxed{G'_X(1) = \mathbb{E}(X).}$$

Vlastnosti vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti

Vyjadríme hodnotu $G''_X(1)$.

Postupne dostávame

$$\begin{aligned} G''(z) &= 2p(2)z^0 + 3\cdot 2p(3)z + 4\cdot 3p(3)z^2 + \dots \\ G''(1) &= 2\mathbb{P}(X=2) + 3\cdot 2\mathbb{P}(X=3) + 4\cdot 3\mathbb{P}(X=4) + \dots \\ &= \sum_k k(k-1)\cdot \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X(X-1)). \end{aligned}$$

Platí

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}\left(X^2 - X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X).$$

Vlastnosti vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti

Môžeme teda písať

$$\begin{aligned} G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 &= \mathbb{E}\left(X(X-1)\right) + \mathbb{E}\left(X\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right) + \mathbb{E}\left(X\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 \\ &= \mathbb{D}\left(X\right). \end{aligned}$$

Platí teda

$$\boxed{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = \mathbb{D}\left(X\right).}$$

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti
Príklad

Binomické rozdelenie - pokračovanie

Nech X je diskrétna náhodná premenná a jej pravdepodobnostná funkcia nech je daná vzťahom

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad \text{kde } k = 0, 1, \dots, n,$$

pričom $p + q = 1$.

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti
Príklad

Už sme zistili

$$G(z) = (q + pz)^n.$$

Postupným derivovaním dostávame

$$G'(z) = n(q + pz)^{n-1}p \Rightarrow G'(1) = np.$$

a

$$G''(z) = n(n-1)(q + pz)^{n-2}p^2 \Rightarrow G''(1) = n(n-1)p^2.$$

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti
Príklad

Pre charakteristiky binomického rozdelenia dostávame

$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = np,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) &= G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p) = npq.\end{aligned}$$

Vytvárajúca funkcia pravdepodobnosti

Súčet náhodných premenných

Nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé náhodné premenné a nech $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Budeme hľadať $G_Y(z)$. Podľa definície

$$\begin{aligned} G_Y(z) &= G_{X_1+X_2+\cdots X_n}(z) = \mathbb{E}\left(z^{X_1+X_2+\cdots X_n}\right) = \mathbb{E}\left(z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdots z^{X_n}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(z^{X_1}\right) \cdot \mathbb{E}\left(z^{X_2}\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{E}\left(z^{X_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(z). \end{aligned}$$

Platí teda

$$\boxed{G_{X_1+X_2+\cdots X_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(z)}$$

Momentová vytvárajúca funkcia

Definícia (Momentová vytvárajúca funkcia)

Nech pre náhodnú premennú X existujú momenty všetkých rádov. Potom *momentová vytvárajúca funkcia* $M_X(t)$ náhodnej premennej X je definovaná ako stredná hodnota funkcie e^{tX}, za predpokladu, že

$$\sum_{x \in H} \mathrm{e}^{tx}\, p(x) < \infty \quad \text{resp.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx}\, f(x)\, \mathrm{d}x < \infty$$

Momentová vytvárajúca funkcia

Poznámky

Pre diskrétnu náhodnú premennú je teda momentová výtvárajúca funkcia definovaná vzťahom

$$M_X(t) = \sum_{x \in H} \mathrm{e}^{tx} \cdot p(x). \tag{4}$$

Momentová vytvárajúca funkcia

Poznámky

Pre diskrétnu náhodnú premennú je teda momentová výtvárajúca funkcia definovaná vzťahom

$$M_X(t) = \sum_{x \in H} \mathrm{e}^{tx} \cdot p(x). \tag{4}$$

Pre spojitú náhodnú premennú je teda momentová výtvárajúca funkcia definovaná vzťahom

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} \cdot f(x) \, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Momentová vytvárajúca funkcia

Veta

Nech pre náhodnú premennú X existuje momentová vytvárajúca funkcia $M_X(t)$. Potom

$$\nu_k(X) = M_X^{(k)}(0). \tag{6}$$

Momentová vytvárajúca funkcia
Dôkaz

Vykonáme napr. pre diskrétnu náhodnú premennú. Pre momentovú vytvárajúcu funkciu platí

$$M_X(t) = \sum_{x \in H} e^{tx} \cdot p(x).$$

Derivovaním dostávame

$$M'_X(t) = \sum_{x \in H} e^{tx} \cdot x \cdot p(x),$$

$$M''_X(t) = \sum_{x \in H} e^{tx} \cdot x^2 \cdot p(x),$$

$$\vdots$$

$$M^{(k)}_X(t) = \sum_{x \in H} e^{tx} \cdot x^k \cdot p(x).$$

Momentová vytvárajúca funkcia
Dôkaz

Pre funkčnú hodnotu k-tej derivácie funkcie $M_X(t)$ v bode $t = 0$ dostávame

$$M_X^{(k)}(0) = \sum_{x \in H} \mathrm{e}^0 \cdot x^k \cdot p(x) = \sum_{x \in H} x^k \cdot p(x) = \nu_k(X),$$

odkiaľ vyplýva vzťah (6).

Momentová vytvárajúca funkcia
Príklad

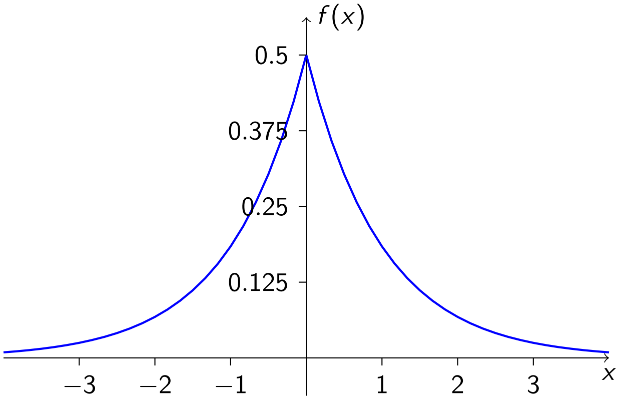
Zadanie

Hustota náhodnej premennej X má tvar

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vypočítajme strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X pomocou momentovej vytvárajúcej funkcie.

Momentová vytvárajúca funkcia
Príklad



Obr. 1: Hustota náhodnej premennej podľa zadania.

Momentová vytvárajúca funkcia
Príklad

Po odstránení absolútnej hodnoty pre funkciu hustoty platí

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}, & x > 0 \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

Náhodná premenná je spojitá, na výpočet momentovej vytvárajúcej funkcie použijeme vzťah (5) a strednú hodnotu a disperziu potom určíme pomocou (6).

Momentová vytvárajúca funkcia
Príklad

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-|x|}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{tx} \cdot e^{x}\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x(t+1)}\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x(1-t)}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{x(t+1)}}{t+1}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-x(1-t)}}{t-1}\right]_0^b \\
&= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{t+1} + \frac{e^{a(t+1)}}{t+1}\right] + \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-b(1-t)}}{t-1} - \frac{1}{t-1}\right] \\
&= \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)} = \frac{1}{1-t^2}.
\end{aligned}
$$

Momentová vytvárajúca funkcia
Príklad

Pre deriváciu momentovej vytvárajúcej funkcie teda platí

$$M'_X(t) = -\frac{1}{(1-t^2)^2} \cdot (-2t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2},$$

a podľa (6)

$$\mathbb{E}\,(X) = \nu_1(X) = M'_X(0) = 0.$$

Momentová vytvárajúca funkcia
Príklad

Pre druhú deriváciu momentovej vytvárajúcej funkcie máme

$$M_X''(t) = \frac{2 + 6t^2}{(1 - t^2)^3},$$

a podľa (6)

$$\nu_2(X) = M_X''(0) = 2.$$

Disperziu potom určíme ako

$$\mathbb{D}(X) = \nu_2(X) - \nu_1^2(X) = 2.$$