Teória pravdepodobnosti

10. Zákony veľkých čísel

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

18. novembra 2015

Zákony veľkých čísel

Motivácia

Opakujeme určitý pokus a z pozorovaných hodnôt sa pokúšame rekonštruovať rozdelenie prípadne jeho charakteristiky.

Očakávame, že pri dodržaní podmienok sa s rastúcim počtom opakovaní budú empirické rozdelenie početností a empirické charakteristiky približovať k teoretickému rozdeleniu.

Túto myšlienku presnejšie upravujú *zákony veľkých čísel*.

Ako prvú však treba presne špecifikovať podstatu približovania.

Zákony veľkých čísel
Konvergencia podľa pravdepodobnosti

Definícia (Konvergencia podľa pravdepodobnosti)

Hovoríme, že postupnosť náhodných premenných $X_1, \dots, X_n$ *konverguje podľa pravdepodobnosti* ku konštante c, čo zapisujeme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - c| < \varepsilon\right) = 1, \tag{1}$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - c| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{2}$$

Zákony veľkých čísel
Slabý zákon veľkých čísel

Veta (Čebyšev)

Nech náhodné premenné $X_1, \ldots, X_n$ sú po dvoch nezávislé, majú stredné hodnoty $\mathbb{E}(X_i) < \infty$ a rozptyly $\mathbb{D}(X_i) \leq c$, $i = 1, \ldots, n$, kde c je konečné kladné číslo. Potom pre ľubovoľné reálne $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{3}$$

Zákony veľkých čísel
Slabý zákon veľkých čísel

Vzhľadom na platnosť Čebyševovej nerovnosti je možné túto pravdepodobnosť odhadnúť ako:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left(X_i\right)}{n^2\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}. \quad (4)$$

Limitným prechodom pre $n \to \infty$ potom dostaneme tvrdenie vety.

Zákony veľkých čísel
Slabý zákon veľkých čísel

Alternatívne možno slabý zákon veľkých čísel formulovať takto:

Veta (Slabý zákon veľkých čísel)

Nech náhodné premenné $X_1, \ldots, X_n$ sú po dvoch nezávislé, identicky rozdelené náhodné premenné, $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathbb{D}(X_i) < \infty$. Potom pre ľubovoľné reálne $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0, \tag{5}$$

t.j. $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$.

Slabý zákon veľkých čísel
Príklad

Zadanie

Určme pravdepodobnosť toho, že aritmetický priemer z 1 000 nezávislých meraní udáva skutočnú hodnotu meranej veličiny μ s presnosťou 0,01, ak rozptyl jednotlivých výsledkov meraní nepresahuje 0,2.

Slabý zákon veľkých čísel

Riešenie

Výsledky jednotlivých meraní reprezentujme náhodnými premennými $X_1, \dots, X_{1000}$, pričom zrejme $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ a $\mathbb{D}(X_i) < 0,2$ pre $i = 1, \dots, 1\,000$.

Podľa (4) pre $c = 0,2$ dostávame

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{1\,000} X_i}{1\,000} - \mu\right| < 0,01\right) \geq 1 - \frac{0,2}{1\,000 \cdot 0,01^2} \approx 0,98.$$

Teda aritmetický priemer 1 000 meraní sa od skutočnej hodnoty neodchýli o viac ako 0,01 s pravdepodobnosťou aspoň 0,98.

Zákony veľkých čísel

Slabý zákon veľkých čísel

Veta (Bernoulli)

Nech náhodná premenná X_n predstavuje počet výskytov udalosti A s pravdepodobnosťou nastatia $\mathbb{P}(A) = p$ v sérii n nezávislých pokusov. Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a náhodnú premennú $\frac{X_n}{n}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \tag{6}$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{7}$$

Slabý zákon veľkých čísel

Bernoulliho zákon veľkých čísel

S využitím Čebyševovej nerovnosti môžeme opäť odhadnúť pravdepodobnosť, že relatívna početnosť nastatia udalosti A v sérii n pokusov sa bude od teoretickej pravdepodobnosti odlišovať o viac ako ε.

Platí

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Centrálna limitná veta

Podstatou všetkých formulácií centrálnej limitnej vety je tvrdenie, že súčet veľkého počtu nezávislých náhodných premenných s konečnou strednou hodnotou a rozptylom má asymptoticky normálne rozdelenie.

Tento výsledok sa využíva v praxi. Ak skúmané náhodné veličiny v jednotlivých pokusoch nemajú normálne rozdelenie, tak s ich súčtom sa pri dostatočne veľkom počte pracuje ako s normálne rozdelenou náhodnou premennou.

Centrálna limitná veta

Veta (Lundenberg-Levy)

Nech $X_1, \ldots, X_n$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných, ktoré majú identický zákon rozdelenia s konečnou strednou hodnotou $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ a konečným rozptylom $\mathbb{D}(X_i) = \sigma^2$ pre $i = 1, \ldots, n$. Náhodnú premennú Y definujeme ako súčet $Y = X_1 + \cdots + X_n$. Potom normovaná náhodná premenná

$$U = \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(Y)}},$$

má asymptoticky štandardizované normálne rozdelenie pravdepodobnosti $\mathrm{N}(0,1)$, t.j. platí vzťah

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(U < u) = \Phi(u), \quad -\infty < u < \infty.$$

Centrálna limitná veta
Moivre–Laplace

Špeciálnym prípadom je nasledujúca

Veta (Moivre–Laplaceova integrálna veta)

Nech $X_1, \ldots, X_n$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných, $X_n \sim \mathrm{Bin}\,(n, p)$. Potom pre ľubovoľné x platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x).$$

má asymptoticky štandardizované normálne rozdelenie pravdepodobnosti $\mathrm{N}\,(0, 1)$, t.j. platí vzťah

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\,(U < u) = \Phi(u), \quad -\infty < u < \infty.$$

Centrálna limitná veta
Moivre–Laplace

Moivre–Laplaceova integrálna veta umožňuje pre veľké hodnoty opakovaní n aproximovať binomické rozdelenie normálnym.

Na vyjadrenie pravdepodobnosti, že náhodná premenná s rozdelením $\mathrm{Bin}\,(n, p)$ nadobudne hodnoty z intervalu $\langle a; b\rangle$ tak použijeme aproximáciu

$$\mathbb{P}\,(a \le x \le b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Pre presnejšiu aproximáciu môžeme použiť vzťah

$$\mathbb{P}\,(a \le x \le b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Moivre–Laplaceova integrálna veta

Príklad

Zadanie

Poisťovňa poisťuje 1 000 ľudí rovnakého veku. Pravdepodobnosť úmrtia v priebehu roka je pre každého z nich 0,005. Chceme overiť ziskovosť poisťovne v prípade, že poistné je stanovené na 20 € s poistnou sumou 6 667 €.

Moivre–Laplaceova integrálna veta
Riešenie

V našom prípade máme $\mathbb{E}(X) = 1\,000 \cdot 0,005 = 5$ a $\mathbb{D}(X) = 1\,000 \cdot 0,005 \cdot 0,995 = 4,95$ a $\sigma = 2,23$.

Poisťovňa nebude zisková (vzhľadom na tento druh poistenia) ak jej zisk bude menší, nanajvýš rovný poistnej náhrade. Odtiaľ $20\,000 \leq X \cdot 6\,667$, teda ak $X \geq 3$.

Po úpravách podľa Moivre–Laplaceovej integrálnej vety dostávame

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-5}{2,23} < \frac{3-5}{2,23}\right)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(U < -0.8967) \approx 1 - \Phi(-0.9) = 0,816.$$

Centrálna limitná veta
Moivre–Laplace

Problém výpočtu $\mathbb{P}(X = k)$, kde $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ pri veľkých hodnotách n rieši nasledujúca veta.

Veta (Lokálna veta Moivre–Laplaceova)

Nech náhodná premenná $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Potom pre $0 \leq k \leq n$ spĺňa pravdepodobnosť $\mathbb{P}(X = k)$ limitný vzťah pre $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\mathbb{P}(X = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}}} \right] = 1.$$

Centrálna limitná veta

Moivre–Laplace

Lokálna veta Moivre–Laplaceova umožňuje určiť približnú hodnotu pravdepodobnostnej funkcie binomického rozdelenia v tvare

$$\mathbb{P}(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

kde φ je hustota štandardizovaného normálneho rozdelenia.