Pojmy a tvrdenia teórie pravdepodobnosti

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Obsah

Úvod

V nasledujúcich kapitolách sa budeme zaoberať niektorými základnými stochastickými metódami, s ktorými sa v praxi stretávame pri manažérskom rozhodovaní [13]. Najskôr stručne zopakujeme niektoré pojmy a postupy z teórie pravdepodobností, ktoré sú potrebné k pochopeniu problematiky. Pre hlbšie vniknutie do tejto problematiky odporúčame učebnicu [2] a [12] a pre precvičenie príručku [8]. Naviažeme najpoužívanejšími štatistickými metódami s ukážkami ich použitia. Rozsiahlejší výklad problematiky možno nájsť v učebniciach [1, 3]. V texte sa obmedzíme len na výber takých metód, ktoré majú podporu v progamovom balíku `MS Excel`. Ako významné aplikácie stochastických metód sme vybrali modeli z teórie hromadnej obsluhy a teórie zásob z monografií [13, 6, 9]. Využitie základných poznatkov teórie markovových reťazcov demonštrujeme na riešení praktickej optimalizačnej úlohy údržby a obnovy zariadenia s podporou solvéru *Riešiteľ* v programe `MS Excel`.

Pravdepodobnostné predpovede, úsudky a modely sa už dnes stávajú, aj vďaka dostupným programovým produktom (`MS Excel, STATISTIC, R`), bežnou výbavou manažérov na všetkých stupňoch riadenia. Uplatňujú sa napr. pri vyhodnocovaní výsledkov marketingového prieskumu, kontrole akosti výrobkov, tvorbe nevyhnuných zásob tovarov, voľbe typov a režimoch obsluhy zákazníkov. Teoretickým základom takéhoto rozhodovane v podmienkach neistoty je teória pravdepodobností.

Kapitola 1

Pojmy a tvrdenia teórie pravdepodobnosti

Jednou z príčin nesprávnych aplikácií výsledkov stochastických metód býva nepochopenie základných pojmov a tvrdení teórie pravdepodobnosti. Budeme im preto venovať zvýšenú pozornosť.

1.1 Náhodné javy a ich pravdepodobnosť

Náhodným javom rozumieme akékoľvek tvrdenie a výsledku náhodného pokusu, o ktorom s určitosťou vieme rozhodnúť, po danej realizácii pokusu, či je či nie je pravdivé. Ak je pokusom neohlásená návšteva hotela, potom jav „Aspoň jedna izba je voľná“ je náhodný jav. Ak takýto jav nemožno vyjadriť ako zjednotenie iných javov, hovoríme o **elementárnom jave**. Prakticky to znamená, že elementárnym javom je najjednoduchší výsledok pokusu, ktorý už nemožno ďalej rozložiť. V literatúre sa používa nasledujúci Kolmogorov model [2] náhodných javov.

Uvažujme nejaký priestor Ω, ktorého prvky budeme označovať ω. Prvky ω budeme nazývať **elementárne javy** a Ω **priestor elementárnych javov**. Predpokladajme, že je daný nejaký systém $\mathcal{A}$ podmnožín priestoru Ω, ktorý vyhovuje nasledujúcim podmienkam:

- Systém $\mathcal{A}$ je neprázdny, t. j. $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
- Ak $A \in \mathcal{A}$, potom tiež doplnok $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
- Ak $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, potom $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Dvojicu $(\Omega, \mathcal{A})$ nazývame **javové pole**indexjavové pole a množinám v systéme $\mathcal{A}$ hovoríme **náhodné javy**.

Príklad 1.1. *Nech je náhodným javom pozorovanie doby bezporuchovosti nejakého stroja a nech sa pozoruje jav A že „porucha nastane v priebehu prvých 10-tich dní prevádzky“. Jav A nie je elementárny, lebo ho môžeme rozložiť na 10 elementárnych javov ω_i, že „porucha nastane v priebehu i-teho dňa prevádzky“ t. j. $A = \bigcup_{i=1}^{10} \omega_i$.* □

Z *de Morganových vzťahov* pre množiny platí $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i} \in \mathcal{A}$ a tak aj **spoločné nastúpenie javov** je javom. Pretože systém $\mathcal{A}$ je neprázdny a tak musí obsahovať nejaký jav A a teda aj $\bar{A}$. Ďalej tiež musí systém $\mathcal{A}$ obsahovať **nemožný jav** $\emptyset = A \cap \bar{A}$ a **istý jav** $\Omega = \bar{\emptyset}$.

Pokiaľ má priestor Ω konečnú alebo spočítateľnú množinu prvkov, potom sa za $\mathcal{A}$ berie systém všetkých podmnožín priestoru. Ak je ale Ω nespočítateľná množina, potom $\mathcal{A}$ obyčajne zahrnuje len niektoré jeho podmnožiny.

Ak má $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ len konečný počet N prvkov, možno definovať **klasickú pravdepodobnosť javu** A za predpokladu, že elementárne javy nastávajú s rovnakou početnosťou. Potom **pravdepodobnosť javu** A, ktorý je zjednotením N_A elementárnych javov, je rovná $\mathcal{P}(A) = \frac{N_A}{N}$.

Príklad 1.2 (O vadných fotoaparátoch [2])**.** *V továrni na výrobu fotografických prístrojov bolo pred expedíciou 20-tich fotoaparátov zistené, že tri z nich treba opraviť. Nepozorný zamestnanec však tieto tri vadné fotoaparáty zamiešal medzi ostatné tak, že je ich poradie medzi dobrými úplne náhodné. Kontrolór musí opätovne prezrieť jednotlivé prístroje, kým nenájde tie tri vadné. Kontrolór hľadá odpoveď na nasledujúce otázky:*

a) Aká je pravdepodobnosť, že nebudem musieť prehliadnuť viac než 17 prístrojov?

b) Aká je pravdepodobnosť, že budem musieť prehliadnuť práve 17 prístrojov?

c) Bude s najväčšou pravdepodobnosťou posledný vadný prístroj až na poslednom mieste?

Riešenie.
a) Označme jav A =„Kontrolór nebude musieť prehliadnuť viac než 17 prístrojov“. Jav A nastane vtedy, keď nastane jav A_1 =„Kontrolór nájde tri vadné prístroje na prvých 17-tich pozíciach“ alebo jav A_2 =„Kontrolór nájde na 17-tich pozíciach len dobré prístroje“ (na posledných 3 pozíciach sú hľadané vadné prístroje). Vidíme, že $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ a tak

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) = \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} + \frac{1}{\binom{20}{3}} = 0,105263.$$

b) Označme jav B =„Kontrolór bude musieť prehliadnuť práve 17 prístrojov“. Jav B nastane vtedy, keď nastane jav B_1 =„Kontrolór nájde posledný vadný prístroj na 17-tej pozíciach“ (na prvých 16-tich pozíciach našiel 2 vadné prístroje) alebo jav A_2. Máme $B = B_1 \cup A_2$, $B_1 \cap A_2 = \emptyset$ a tak

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B_1) + \mathcal{P}(A_2) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} + \frac{1}{\binom{20}{3}} = 0,106140.$$

c) Označme javy C_k =„Posledný vadný kus je na k-tom mieste“, $k = 3, 4, \ldots, 20$. Potom $\mathcal{P}(C_k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{20}{3}}$ a zrejme platí $\mathcal{P}(C_3) < \mathcal{P}(C_4) < \cdots < \mathcal{P}(C_{20})$. Tento výsledok by sa dal nazvať „zákon schválnosti“. $\square$

V axiomatickej teórii pravdepodobnosti sa na množinách $\mathcal{A}$ definuje pravdepodobnostná miera $\mathcal{P}$ nasledovne.

Nech je dané pravdepodobnostné pole $(\Omega, \mathcal{A})$. Nech $\mathcal{P}$ je reálna funkcia definovaná na systéme $\mathcal{A}$, ktorá vyhovuje podmienkam:

- $\mathcal{P}(A) \geq 0$ pre ľubovoľnú množinu $A \in \mathcal{A}$.
- Ak sú $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ disjunktné množiny (nezlučiteľné javy), potom platí

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.

Potom číslo $\mathcal{P}(A)$ nazývame **pravdepodobnosť javu** A a trojicu $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ nazývame **pravdepodobnostný priestor**.

Z uvedených podmienok na pravdepodobnosť plynú jednoduché dôsledky: $\mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$.

Poznámka. *Na tomto mieste je potrebné si uvedomiť, že zo vzťahu $\mathcal{P}(A) = 0$ automaticky neplynie $A = \emptyset$.*

1.2 Závislosť, nezávislosť a Bayesova formula

Nech $A, B \in \mathcal{A}$ sú dva náhodné javy a nech $\mathcal{P}(B) > 0$. **Podmienená pravdepodobnosť javu** A za podmienky že nastal jav B sa definuje vzorcom

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}.$$

Ak platí $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)$ hovoríme že javy A a B sú **nezávislé**.

Majme náhodné javy $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Hovoríme, že tieto javy sú **nezávislé** ak platí pre každdú podmnožinu $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\mathcal{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathcal{P}(A_{i_1})\mathcal{P}(A_{i_2}) \dots \mathcal{P}(A_{i_k}).$$

Poznámka. *Z rovnosti*

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathcal{P}(A_1)\mathcal{P}(A_2) \dots \mathcal{P}(A_2)$$

sa niekedy mylne usudzuje na nezávislosť javov aj pre $n > 2$. To máva za následok znehodnotenie stochastických tvrdení.

Príklad 1.3 (O logistickom reťazci)**.** *Majme logistický reťazec s n sekvenčne nadväzujúcimi nezávislými prevádzkami na výrobu nejakého zariadenia, kde každá z prevádzok disponuje $r_i, i = 1, 2, \dots, n$ funkčne zameniteľnými a nezávislými strojmi. Aká je pravdepodobnosť výroby takéhoto zariadenia?*

Reťazec plní bezchybne svoju funkciu pokiaľ každá prevádzka disponuje aspoň jedným funkčne zameniteľným strojom. Označme jav $A =$ *„Reťazec plní svoju funkciu“ a* $A_{ij} =$ *„j-ty stroj i-tej prevádzky je bez závad“. Potom*

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}\Bigg(\bigcap_{i=1}^{n}\Bigg(\bigcup_{j=1}^{r_i} A_{ij}\Bigg)\Bigg) = \prod_{i=1}^{n}\mathcal{P}\Bigg(\bigcup_{j=1}^{r_i} A_{ij}\Bigg) = \cdots$$

$$\cdots = \prod_{i=1}^{n}\Bigg(1 - \prod_{j=1}^{r_i}\big(1 - \mathcal{P}(A_{ij})\big)\Bigg). \qquad \square$$

Majme nanajvýš spočitateľnú množinu navzájom nezlučiteľných (disjunktných) náhodných javov $B_1, B_2, \ldots,$ z ktorých aspoň jeden nastáva (t. j. platí $B_i \cap B_j = \emptyset$ pre každú dvojicu $i \neq j$ a $\bigcup_i B_i = \Omega$). Potom $B_1, B_2, \ldots$ nazývame **úplný systém javov**.

Teraz už môžeme formulovať vetu, ktorá má množstvo aplikácií.

Veta 1.1 (O úplnej pravdepodobnosti)**.** *Nech je* $B_1, B_2, \ldots$ *úplný systém javov. Ak sú všetky pravdepodobnosti* $\mathcal{P}(B_i)$ *kladné, potom pravdepodobnosť ľubovoľného javu* A *možno vypočítať podľa vzorca*

$$\mathcal{P}(A) = \sum_i \mathcal{P}(A|B_i)\mathcal{P}(B_i).$$

Veta 1.2 (Bayes)**.** *Nech* A *je náhodný jav a nech* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *je úplný systém javov. Ak sú* $\mathcal{P}(A) > 0$, $\mathcal{P}(B_1) > 0$, $\ldots$, $\mathcal{P}(B_n) > 0$, *potom platí* **Bayesova formula**

$$\mathcal{P}(B_k|A) = \frac{\mathcal{P}(A|B_k)\mathcal{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(A|B_i)\mathcal{P}(B_i)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Bayesova formula (1.1) je mimoriadne dôležitá. Často sa stáva že poznáme tzv. **apriórne pravdepodobnosti** $\mathcal{P}(B_1), \ldots, \mathcal{P}(B_n)$. Môžu to byť napr. pravdepodobnosti príčin chorôb. Ďalej sú zo skúseností známe podmienené pravdepodobnosti nejakého javu A za podmienky, že nastal jav B_k. Jav A tu môže byť komplex symptómov (vysoká teplota, krv v moči, pozitívny test). Bayeseova formula umožňuje vypočítať z týchto údajov tzv. **aposteriórne pravdepodobnosti** $\mathcal{P}(B_k|A)$.

Príklad 1.4 (Lekárska diagnostika)**.** *Uvažujme test na rakovinu, ktorý dáva u osoby s rakovinou pozitívny výsledok s pravdepodobnosťou 0,95. Ak osoba nemá rakovinu, bude test negatívny s pravdepodobnosťou 0,9. Je tiež známe, že v populácii má rakovinu 0,5 % ľudí. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná osoba z populácie s pozitívnym testom má skutočne rakovinu?*

Označme $C =$ *„Náhodne vybraná osoba má rakovinu“. Nech znamienko* $+$ *znamená kladný a* $-$ *záporný výsledok testu. Podľa našich predpokladov platí*

$$\mathcal{P}(+|C) = 0,95; \quad \mathcal{P}(-|C) = 0,05; \quad \mathcal{P}(+|\bar{C}) = 0,9; \quad \mathcal{P}(-|\bar{C}) = 0,1.$$

Vieme, že $\mathcal{P}(C) = 0,005$. *Po dosadení do Bayesovej formuly dostaneme*

$$\mathcal{P}(C|+) = \frac{\mathcal{P}(+|C)\mathcal{P}(C)}{\mathcal{P}(+|C)\mathcal{P}(C) + \mathcal{P}(+|\bar{C})\mathcal{P}(\bar{C})} = \\ = \frac{0,95 \cdot 0,005}{0,95 \cdot 0,005 + 0,09 \cdot 0,995} = 0,045.$$

Je to prekvapujúci výsledok, nakoľko väčšina ľudí by povedala, že náhodne vybraná osoba bude mať rakovinu s pravdepodobnosťou $0,95$ *s odôvodnením, že taká je spoľahlivosť testu.* □

Poznámka. *V publikáciach [12, 7] nájdete viaceré manažérske aplikácie Bayesovej formuly.*

1.3 Náhodné veličiny a niektoré rozdelenia

Mnohé z náhodných pokusov, s ktorými sa stretávame pri manažérskom rozhodovaní má výsledok vyjadrený číslom napr. 1 – dobrý alebo 0 – vadný výrobok alebo diskrétnym intervalom napr. vek dôchodcov v marketingových dotazníkových 60–74, 75–89, 90 a viac alebo reálnym intervalom napr. maloobchodná cena produktu (a, b). V takýchto pokusoch môžeme každému výsledku náhodného pokusu priradiť reálne číslo alebo interval, ktorý považujeme za hodnotu náhodnej veličiny. Formálne možno náhodnú veličinu definovať takto:

Majme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. **Náhodná veličina** $\mathbf{X} : \Omega \to \Re$ je taká reálna funkcia definovaná na priestore elementárnych javov Ω, že pre každé reálne číslo $x \in \Re$ je $\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \le x\} \in \mathcal{A}$, t. j. je náhodným javom.

Distribučnou funkciou náhodnej veličiny X rozumieme reálnu funkciu definovanú pre každé reálne x vzťahom $F(x) = \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \le x\})$, ďalej len skrátene $F(x) = \mathcal{P}(\mathbf{X} \le x)$.

Distribučná funkcia $F(x)$ ľubovoľnej náhodnej veličiny má tieto základné vlastnosti:

- $0 \le F(x) \le 1$ pre každé reálne x.
- $F(x_1) \le F(x_2)$ pre každé reálne $x_1 < x_2$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.
- Distribučná funkcia je sprava spojitá a má nanajvýš spočítateľne veľa bodov nespojitosti.

V praxi sa najčastejšie vyskytujú dva prípady náhodných veličín.

1. Diskrétny typ.

Náhodná veličina $\mathbf{X}$ tu nadobúda najviac spočítateľne veľa hodnôt. Nech $\mathbf{X}$ nadobúda len hodnoty $x_1, x_2, \ldots$ tak, že $\mathcal{P}(\mathbf{X} = x_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots$. Potom hovoríme že $\mathbf{X}$ má **diskrétne rozdelenie**. Jej distribučná funkcia

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} \mathcal{P}(\mathbf{X} = x)$$

má skoky v bodoch $x_1, x_2, \ldots$ a skok v bode x_i má veľkosť $p_i, i = 1, 2, \ldots$.

Základné charakteristiky diskrétnej náhodnej veličiny $\mathbf{X}$ sa definujú výrazmi:

- **Stredná hodnota:** $\mu = E(\mathbf{X}) = \sum_{x_i} x_i p_i$.
- **Rozptyl:** $\sigma^2 = D(\mathbf{X}) = E((\mathbf{X} - \mu)^2) = E(\mathbf{X}^2) - \mu^2$.
- ***P*-kvantil:**[1] Číslo x_p také, že pre dané P, $0 < P < 1$, platí $F(x_P) \leq P$ a $F(x_P + 0) \geq P$.

2. Spojitý typ.

Náhodná veličina $\mathbf{X}$ nadobúda všetky hodnoty z určitého intervalu. Ak existuje taká nezáporná reálna funkcia f, že $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, potom hovoríme, že $\mathbf{X}$ má **spojité rozdelenie** a že f je jej **hustota**. Ak poznáme distribučnú funkciu, potom dostaneme hustotu tak, že $f(x) = F'(x)$.

Základné charakteristiky spojitej náhodnej veličiny $\mathbf{X}$ sa definujú výrazmi:

- **Stredná hodnota**: $\mu = E(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Rozptyl:** $\sigma^2 = D(\mathbf{X}) = E((\mathbf{X} - \mu)^2) = E(\mathbf{X}^2) - \mu^2$.
- ***P*-kvantil:** Číslo x_p také, že pre dané P, $0 < P < 1$, platí $F(x_P) = P$.

Ako príklady náhodných veličín si najskôr uvedieme niekoľko najjednoduchších diskrétnych rozdelení s ktorými sa v aplikáciách najčastejšie stretávame.

Príklad 1.5 (Alternatívne rozdelenie)**.** *Majme náhodnú veličinu* $\mathbf{X}$ *ktorá popisuje výsledok náhodného pokusu takto: Ak nastal sledovaný jav* A *(napr. „Počet zmätkov pri náhodným výbere jedného výrobku“ alebo „Vybavenie či nevybavenie náhodne vybranej domácnosti počítačom“, atď), bude mať náhodná veličina hodnotu* $x = 1$ *s pravdepodobnosťou* $p, (0 < p < 1)$ *a v opačnom prípade hodnotu* $x = 0$ *s pravdepodobnosťou* $1 - p$*, čo budeme značiť* $\mathbf{X} \sim A(p)$*.*

Pravdepodobnostná funkcia náhodnej veličiny $\mathbf{X} \sim A(p)$ *je potom určená* $\mathcal{P}(\mathbf{X} = 1) = p$*,* $\mathcal{P}(\mathbf{X} = 0) = 1 - p$*. Ľahko vypočítame charakteristiky*

$$E(\mathbf{X}) = p, \;\; D(\mathbf{X}) = p(1 - p). \qquad \square$$

Príklad 1.6 (Binomické rozdelenie)**.** *Uvažujme, že budeme náhodný pokus opakovať* n*-krát, pričom nastúpenia sledovaného javu* A *nezávisí od výsledkov prechádzajúcich pokusov* $X_i, i = 1, 2, \ldots n$ *tzv. Bernoulliho postupnosť pokusov.*

[1] Niektoré kvantily majú špeciálne názvy: $x_{0,5}$ – medián, $x_{0,25}$ – dolný kvartil, $x_{0,75}$ – horný kvartil, $x_{k/100}$ – k-ty percentil ($k = 1, \ldots, 99$).

Napr. A = „Počet zmätkov pri 30-tich testovaných výrobkov“, „Počet nezamestnaných z 60-tich náhodne vybraných absolventov FRI ŽU“, atď. Ďalej budeme predpokladať, že pravdepodobnosť úspechu každého z pokusov je konštantná, rovná p. Teraz hľadáme pravdepodobnosť náhodnej veličiny $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i$, kde $\mathbf{X}_i \sim A(p)$ sú nezávislé náhodné veličiny.

Pravdepodobnostná funkcia náhodnej veličiny $\mathbf{X} \sim Bi(n,p)$ je potom určená

$$\mathcal{P}(\mathbf{X} = k) = \binom{n}{k} p^x (1-x)^{n-k}, \;\; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Odvodenie vzorcov pre výpočet charakteristík už nie je tak jednoduché ako v predošlom príklade,

$$E(\mathbf{X}) = np, \;\; D(\mathbf{X}) = np(1-p). \qquad \square$$

Príklad 1.7 (Poissonovo rozdelenie)**.** *Poissonovo rozdelenie býva označované ako rozdelenie riedkych javov, lebo sa podľa neho riadi počet výskytov javov, ktoré majú veľmi malú pravdepodobnosť. Jedná sa náhodnú veličinu $X \sim Po(\lambda)$ s jedným parametrom λ, $\lambda > 0$, ktorá má pravdepodobnostnú funkciu*

$$\mathcal{P}(\mathbf{X} = k) = \frac{\lambda^k \, \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

a základné charakteristiky $E(\mathbf{X}) = \lambda$, $D(\mathbf{X}) = \lambda$. $\square$

Poznámka. *Za zmienku stojí očividná skutočnosť, že $A(p) = Bi(1,p)$. Menej zrejmý je ale fakt, že $Po(\lambda)$ môžeme pomerne presne aproximovať pomocou $Bi(n,p)$ ak $n \to \infty$, $p \to 0$ (približne $n > 30$, $p \le 0,1$) a $\lambda = np$ je konečné číslo.*

Ako príklady spojitých náhodných veličín uveďme niektoré najpoužívanejšie rozdelenia používané vo frontových modeloch a v štatistických metódach.

Príklad 1.8 (Rovnomerné rozdelenie)**.** *Nech je číselná os je rozdelená na oblasť, kde sa skúmaný jav A môže vyskytovať a zvyšnú oblasť, kde sa jav A nevyskytuje. Nech a označuje začiatok oblasti výskytu a b označuje koniec oblasti výskytu. Výsledkom skúmaného javu je reálne číslo x z intervalu (a,b).*

Jedná sa teda o rozdelenie, ktorého hustota pravdepodobnosti je na intervale (a,b) konštantné a inde je nulová. Náhodná veličina $\mathbf{X} \sim R(a,b)$ je definovaná hustotou pravdepodobnosti resp. distribučnou funkciou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & ak \; x \in (a,b), \\ 0, & ak \; x \notin (a,b), \end{cases} \qquad resp. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & ak \; x \in (-\infty, a\rangle, \\ \frac{x-a}{b-a}, & ak \; x \in (a,b), \\ 1, & ak \; x \in \langle b, \infty). \end{cases}$$

Jej stredná hodnota a rozptyl sú určené vzťahmi

$$E(\mathbf{X}) = \frac{a+b}{2}, \;\; D(\mathbf{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad \square$$

Príklad 1.9 (Exponenciálne rozdelenie)**.** *Majme tok udalostí s intenzitou λ udalostí za jednotku času. Uvažujme spojitú náhodnú veličinu X určenú dĺžkou časového intervalu medzi výskytom dvoch po sebe idúcich udalostí. Napr. $\mathbf{X} =$„Doba čakania na autobus“, „Doba medzi nehodami na križovatke“, „Doba medzi dodávkami na sklad z nezávislých zdrojov“, atď.*

Náhodná veličina $\mathbf{X} \sim Exp(\lambda)$ je definovaná hustotou pravdepodobnosti resp. distribučnou funkciou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, & ak\ x > 0, \\ 0, & ak\ x \le 0, \end{cases} \quad resp. \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & ak\ x > 0, \\ 0, & ak\ x \le 0. \end{cases}$$

Jej stredná hodnota a rozptyl sú určené vzťahmi

$$E(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda}, \ D(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad \square$$

Ak má doba do výskytu udalosti exponenciálne rozdelenie, potom je intenzita výskytu udalostí konštantná a nezávisí na dĺžke predchádzajúcej prevádzky systému. Hovoríme, že toto rozdelenie je „rozdelenie bez pamäti (zero-memory distribution)“. Zdá sa akoby systém zabúdal na už odpracovanú dobu.

V teórii spoľahlivosti, kde k poruchám dochádza z náhodných príčin a nie opotrebovaním, sa využíva bezpamäťová vlastnosť takto: Ak má doba do výskytu poruchy exponenciálne rozdelenie $\mathbf{T} \sim Exp(\lambda)$ potom pravdepodobnosť, že systém, ktorý pracoval bez poruchy dobu t_1 a bude takto pracovať ďalšiu dobu t_2 je rovná pravdepodobnosti, že systém, ktorý doteraz pracoval bez poruchy bude tak pracovať ešte najmenej dobu t_2. Formálne túto vlastnosť zapíšeme:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{T} > t_1 + t_2 | \mathbf{T} > t_1) &= \frac{\mathcal{P}(\mathbf{T} > t_1 + t_2 \cap \mathbf{T} > t_1)}{\mathcal{P}(\mathbf{T} > t_1)} = \\ &= \frac{\mathcal{P}(\mathbf{T} > t_1 + t_2)}{\mathcal{P}(\mathbf{T} > t_1)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t_1+t_2)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_1}} = \mathrm{e}^{-\lambda t_2} = \mathcal{P}(\mathbf{T} > t_2). \end{aligned}$$

Príklad 1.10 (Normálne rozdelenie)**.** *Toto najčastejšie používané dvojparametrové rozdelenie býva vhodné k popisu náhodných veličín, ktoré vznikajú ako aditívny dôsledok malých navzájom nezávislých vplyvov napr. „chyba merania“, „odchýlka od deklarovanej váhy tovaru“, atď.*

Náhodná veličina $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ je definovaná hustotou pravdepodobnosti resp. distribučnou funkciou pre $x \in (-\infty, \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad resp.\ F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Jej stredná hodnota a rozptyl sú určené parametrami rozdelenia $\mu \in \Re$, $\sigma > 0$

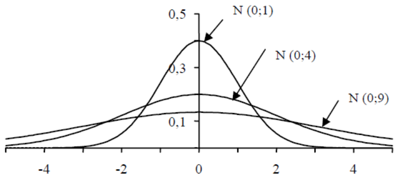
$$E(\mathbf{X}) = \mu, \ D(\mathbf{X}) = \sigma^2.$$

Normálnemu rozdeleniu sa tiež hovorí Gaussovo rozdelenie. Najčastejšie sa vyskytuje štandardizované (tiež normované) normálne rozdelenie $N(0,1)$ s hustotou a distribučnou funkciou

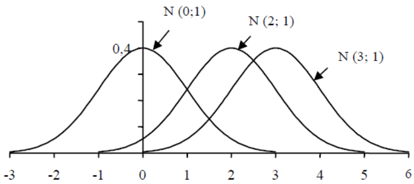
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Na obrázkoch 1.1 a 1.2 [4], máme príklady grafov hustoty funkcie $N(0, \sigma^2)$ *a* $N(\mu, 1)$.

Štandardizované normálne rozdelenie $\mathbf{Z} \sim N(0,1)$ *dostaneme pomocou nenormovaného* $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ *normovaním* $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X}-\mu}{\sigma}$ *a naopak* $\mathbf{X} = \mu + \sigma\mathbf{Z}$. □



Obr. 1.1: Graf funkcie normálneho rozdelenia pre rôzne σ



Obr. 1.2: Graf funkcie normálneho rozdelenia pre rôzne μ

Ich charakteristiky bývajú tabelované v štatistických tabuľkách prípadne existujú štatistické funkcie (tab. 1.1).

Tabuľka 1.1: Funkcie normálneho rozdelenia v programe `MS Excel`

`NORMDIST`$(x, \mu, \sigma, 1)$	$F(x)$, hodnota distribučnej funkcie v čísle x pre $N(\mu, \sigma^2)$
`NORMDIST`$(x, \mu, \sigma, 0)$	$f(x)$, hodnota funkcie hustoty v čísle x pre $N(\mu, \sigma^2)$
`NORMINV`(p, μ, σ)	$p \times 100\,\%$-ný kvantil pre $N(\mu, \sigma^2)$, p-pravdepodobnosť
`NORMSDIST`(z)	$\Phi(z)$, hodnota distribučnej funkcie v čísle z pre $N(0,1)$
`NORMSINV`(p)	$p \times 100\,\%$-ný kvantil pre $N(0,1)$, p-pravdepodobnosť

Jedným zo základných princípov kontroly kvality je **pravidlo** 3σ (SPC — Statisitics Process Control, ISO normy pre SPC). Hovorí, že ak máme údaje pochádzajúce z normálneho rozdelenia, potom temer všetky ($99,8\,\%$ z nich) ležia v intervale $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Poznámka. *Význam normálneho rozdelenia spočíva aj v tom, že je limitou niektorých iných rozdelení, napr. binomického.*

Pri verifikácii štatistických hypotéz sa najčastejšie stretneme s touto dôležitou trojicou rozdelení náhodných veličín.

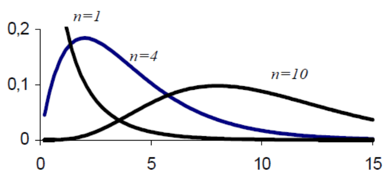
Príklad 1.11 (χ^2 rozdelenie). *Majme n nezávislých náhodných veličín štandardizovaného normálneho rozdelenia $\mathbf{X}_i \sim N(0,1)$, potom ich súčet $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^2$ má χ^2 rozdelenie s n stupňami voľnosti, čo značíme $\mathbf{X} \sim \chi^2(n)$.*

Náhodná veličina $\mathbf{X} \sim \chi^2(n)$ je definovaná hustotou pravdepodobnosti, resp. distribučnou funkciou pre $x \in (-\infty, \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{-\frac{n}{2}-1}\, \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad \textit{resp. } F(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^{x} t^{-\frac{n}{2}-1}\, \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t,$$

kde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, x^{1-\alpha}\, \mathrm{d}x$. Aj z obrázku 1.3 vidíme, že uvedené funkcie sú pomerne komplikované a tak sú tabelované (tab. 1.2). Stredná hodnota a rozptyl sú určené [12] parametrom n rozdelenia ($n \geq 1$, celé)

$$E(\mathbf{X}) = n, \quad D(\mathbf{X}) = 2n. \qquad \square$$



Obr. 1.3: Funkcia hustoty χ^2 rozdelenia

Tabuľka 1.2: Funkcie χ^2 rozdelenia v programe `MS Excel`

`CHIDIST`(x,n)	Pre χ^2 rozdelenie s n stupňami voľnosti, $x \geq 0$ určí pravdepodobnosť $p =$ `CHIDIST`$(x,n) = P(X > x) = 1 - F(x)$.
`CHIINV`(p,n)	Určí číslo χ^2 (kritická hodnota χ^2 rozdelenia s n stupňami voľnosti a pravdepodobnosťou p) tak, aby $P(X > \chi^2) = p$. Inverzná k funkcii $p =$ `CHIDIST`(x,n).

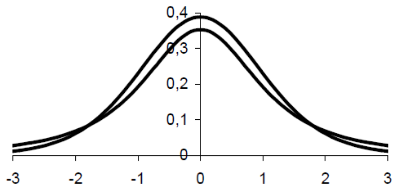
Príklad 1.12 (Studentovo rozdelenie). *Majme dve nezávislé náhodné veličiny $\mathbf{Y} \sim N(0,1)$ a $\mathbf{Z} \sim \chi^2(n)$, potom náhodná veličina definovaná vzťahom $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{Y}}{\sqrt{\frac{\mathbf{Z}}{n}}}$ má Studentovo t rozdelenie s n stupňami voľnosti, čo značíme $\mathbf{X} \sim t(n)$.*

Náhodná veličina $\mathbf{X} \sim t(n)$ je definovaná hustotou pravdepodobnosti (viď obr. 1.4), resp. distribučnou funkciou pre $x \in (-\infty, \infty)$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \textit{resp. } F(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{d}t.$$

Ako vidieť, uvedené funkcie sú ešte komplikovanejšie a tak sú opäť tabelované (tab. 1.3). Stredná hodnota a rozptyl sú určené [12] parametrom n rozdelenia

$$E(\mathbf{X}) = 0 \text{ pre } n > 1, \;\; D(\mathbf{X}) = \frac{n}{n-2} \text{ pre } n > 2. \qquad \square$$



Obr. 1.4: Funkcia hustoty t rozdelenia, hustota je symetrická podľa osi y s vrcholom v bode $x = 0$

Tabuľka 1.3: Funkcie t rozdelenia v programe `MS Excel`

`TDIST`$(x, n, .)$	Pre Studentovo rozdelenie s n stupňami voľnosti, $x \geq 0$ určí pravdepodobnosť $p =$ `TDIST`$(x, n, 1) = P(X > x) = 1 - F(x)$, resp. pravdepodobnosť $p =$ `TDIST`$(x, n, 2) = P(\lvert X \rvert > x)$.
`TINV`(p, n)	Určí číslo t (kritická hodnota t rozdelenia s n stupňami voľnosti a pravdepodobnosťou p) tak, aby $P(\lvert X \rvert > t) = p$. Inverzná k funkcii $p =$ `TDIST`$(x, n, 2)$.

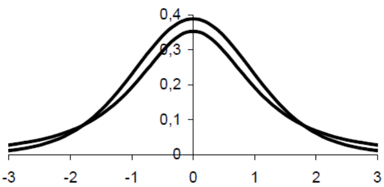
Príklad 1.13 (Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie)**.** *Majme dve nezávislé náhodné veličiny $\mathbf{Y} \sim \chi^2(m)$ a $\mathbf{Z} \sim \chi^2(n)$, potom náhodná veličina X definovaná vzťahom $\mathbf{X} = \frac{\frac{\mathbf{Y}}{m}}{\frac{\mathbf{Z}}{n}}$ má Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie (stručne F rozdelenie) s m a n stupňami voľnosti, čo značíme $\mathbf{X} \sim F(m, n)$.*

Náhodná veličina $\mathbf{X} \sim F(m, n)$ je definovaná nenulovou hustotou pravdepodobnosti pre $x > 0$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \Big(\frac{m}{n}\Big)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \Big(1 + \frac{m}{n}x\Big)^{-\frac{m+n}{2}}.$$

Stredná hodnota a rozptyl sú určené [12] parametrom n rozdelenia

$$E(\mathbf{X}) = \frac{n}{n-2} \;\; \text{pre } n > 2, \quad D(\mathbf{X}) = \frac{2n^2(n+m-1)}{m(n-2)(n-4)} \;\; \text{pre } n > 4. \qquad \square$$



Obr. 1.5: Funkcia hustoty F rozdelenia, hustota je symetrická podľa osi y s vrcholom v bode $x = 0$

Tabuľka 1.4: Funkcie F rozdelenia v programe `MS Excel`

`FDIST`(x, n_1, n_2)	Pre Fisherove rozdelenie s n_1, n_2 stupňami voľnosti, $x \geq 0$ určí pravdepodobnosť $p =$ `FDIST`$(x, n_1, n_2) = P(X > x) = 1 - F(x)$.
`FINV`(p, n_1, n_2)	Určí číslo F (kritická hodnota F rozdelenia s n_1, n_2 stupňami voľnosti a pravdepodobnosťou p) tak, aby $P(\|X\| > F) = p$. Inverzná k funkcii $p =$ `FDIST`(x, n_1, n_2).

Podnetné námety na použitia uvedených rozdelení pri stochastickom modelovaní, prevažne z manažérskej praxe, môžeme nájsť v monografii [13].

1.4 Náhodný vektor

Nech sú náhodné veličiny $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ definované na rovnakom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Potom vektor $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ nazývame **náhodný vektor**. Funkciu definovanú pre každú n-ticu reálnych čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vzťahom

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 \leq x_1, \mathbf{X}_2 \leq x_2, \ldots, \mathbf{X}_n \leq x_n)$$

nazývame **distribučná funkcia náhodného vektora X**.

Distribučná funkcia $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ľubovoľného náhodného vektora $\mathbf{X}$ má tieto základné vlastnosti:

- $0 \leq F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 1$ pre každé $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n$.
- $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je neklesajúca funkcia každej svojej premennej.
- $\lim\limits_{x_j \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$, $\lim\limits_{x_j \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ pre $j = 1, \ldots, n$.

- $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je sprava spojitá v každej svojej premennej a má nanajvýš spočítateľne veľa bodov nespojitosti.

Podobne ako v prípade náhodnej veličiny aj v prípade náhodného vektoru rozlišujeme dva prípady:

1. Diskrétny typ.
Náhodný vektor $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ má **(združené) rozdelenie diskrétneho typu** ak existuje taká nanajvýš spočitateľná množina n-tíc reálnych čísel M, že

- $\mathcal{P}(\mathbf{X}_1 = x_1, \ldots, \mathbf{X}_n = x_n) > 0$ pre každú n-ticu $(x_1, \ldots, x_n) \in M$,
- $\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in M} \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 = x_1, \ldots, \mathbf{X}_n = x_n) = 1$.

Funkcia $\mathcal{P}(\mathbf{X}_1 = x_1, \ldots, \mathbf{X}_n = x_n)$ sa nazýva **pravdepodobnostná funkcia náhodného vektoru X**. Distribučná funkcia je

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t_1 \le x_1} \cdots \sum_{t_n \le x_n} \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 = t_1, \ldots, \mathbf{X}_n = t_n).$$

2. Spojitý typ.
Náhodný vektor $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ má **(združené) rozdelenie spojitého typu** ak existuje nezáporná reálna funkcia $f(x_1, \ldots, x_n)$, že pre všetky reálne n-tice reálnych čísel $(x_1, \ldots, x_n)$ platí

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n.$$

Funkcia $f(x_1, \ldots, x_n)$ sa nazýva **hustota (pravdepodobnosti) náhodného vektora X**. V bodoch, kde existuje derivácia, platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

Uvažujme dvojrozmernú náhodnú veličinu $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$. Okrem jej združeného rozdelenia určeného distribučnou funkciou $F(x_1, x_2)$ nás zaujímajú aj rozdelenia jednotlivých náhodných veličín $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$, ktoré nazývame **marginálne rozdelenia**. Pre náhodné veličiny $\mathbf{X}_j$, $j = 1, 2$ sú marginálne distribučne funkcie definované vzťahmi

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 \le x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 \le x_1, \mathbf{X}_2 \le x_2) = F(x_1, \infty), \\ F_2(x_2) &= \mathcal{P}(\mathbf{X}_2 \le x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 \le x_1, \mathbf{X}_2 \le x_2) = F(\infty, x_2). \end{aligned}$$

V prípade náhodného vektoru s viacerými zložkami sa marginálne rozdelenie definuje analogicky.

K často uvádzaným charakteristikám náhodného vektora $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ patria jeho stredné hodnoty $E(\mathbf{X}_j)$ a rozptyly $D(\mathbf{X}_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Okrem charakteristík jednotlivých náhodných veličín nás môžu zaujímať charakteristiky dvojrozmerných náhodných veličín $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j), 1 \le i < j \le n$ najmä **kovariancia náhodných veličín $\mathbf{X}_i$ a $\mathbf{X}_j$** definovaná výrazom

$$cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = E\big([\mathbf{X}_i - E(\mathbf{X}_i)][\mathbf{X}_j - E(\mathbf{X}_j)]\big). \tag{1.2}$$

Po zostavení symetrickej matice $(\sigma_{ij} = cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j))$ stupňa n z jej prvkov hovoríme o **kovariačnej matici náhodného vektoru X**. Ľahko možno overiť, že $\sigma_{ii} = D(\mathbf{X}_i)$.

Pre $D(\mathbf{X}_i) > 0$ a $D(\mathbf{X}_j) > 0$ sa charakteristika

$$\rho(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \frac{cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)}{\sqrt{D(\mathbf{X}_i)D(\mathbf{X}_j)}} \tag{1.3}$$

nazýva **koeficient korelácie náhodných veličín $\mathbf{X}_i$ a $\mathbf{X}_j$**. Táto charakteristika sa používa ako miera lineárnej závislosti veličín $\mathbf{X}_i$ a $\mathbf{X}_j$, ktorá nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 1, 1\rangle$. Ak je totiž $\mathbf{X}_j = a\mathbf{X}_i + b$, $a, b \in R$, $a \ne 0$, potom

$$cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = E\big([\mathbf{X}_i - E(\mathbf{X}_i)][a\mathbf{X}_i + b - E(a\mathbf{X}_j + b)]\big) = aD(\mathbf{X}_j),$$

a tak

$$\rho(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \frac{aD(\mathbf{X}_i)}{\sqrt{a^2 D(\mathbf{X}_i)}} = \begin{cases} 1, & \text{ak } a > 0, \\ -1, & \text{ak } a < 0. \end{cases}$$

Ak je $cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = 0$ potom hovoríme, že náhodné veličiny $\mathbf{X}_i$ a $\mathbf{X}_j$ sú **nekorelované**.

Majme dvojrozmernú náhodnú veličinu $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ so združenou distribučnou funkciou $F(x_1, x_2$ a marginálnymi distribučnými funkciami $F_1(x_1)$ a $F_2(x_2)$. Hovoríme, že náhodné veličiny $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ sú **nezávislé** práve vtedy keď pre ľubovoľné reálne x_1 a x_2 je

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2).$$

V prípade náhodného vektora diskrétneho resp. spojitého typu dostávame vzťahy

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_1 = x_1, \mathbf{X}_2 = x_2) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 = x_1)\mathcal{P}(\mathbf{X}_2 = x_2) \quad \text{resp. } f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2).$$

Poznámka. *Nekorelovanosť náhodných veličín sa často mylne zamieňa za nezávislosť, čo je pravda len v prípade ak majú obe veličiny normálne rozdelenie.*

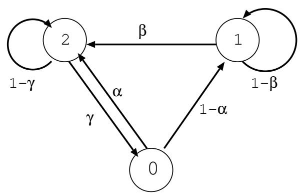
1.5 Markovove reťazce

Prirodzeným zovšeobecnením náhodných vektorov sú náhodné procesy a ich špeciálny prípad náhodné reťazce, ktorými sa budeme zaoberať.

Náhodným procesom rozumieme systém náhodných veličín $\{\mathbf{X}_t : t \in T\}$, kde T je množina nezáporných reálnych čísel. Ak je T nanajvýš spočítateľná množina hovoríme o procese v diskrétnom čase, v opačnom prípade o procese v spojitom čase. **Náhodným reťazcom** rozumieme taký náhodný proces, ktorého množina S všetkých hodnôt jeho náhodných veličín je nanajvýš spočítateľná (konečná alebo spočítateľná). Množinu S nazývame **množinou stavov reťazca**.

Príklad 1.14. *Uvažujme nejaké zariadenie, ktoré môže byť buď v prevádzke v bezchybnom stave, alebo v oprave s veľkou poruchou s pravdepodobnosťou α. alebo v prevádzke s malou poruchou s pravdepodobnosťou $1-\alpha$. Na zariadení sa nerobí údržba a tak sa malá porucha neopravuje, ale sa čaká s pravdepodobnosťou β, kým nevznikne veľká porucha, ktorá bude opravená s pravdepodobnosťou γ.*

Správanie systému možno modelovať náhodným reťazcom $\{\mathbf{X}_t : t \in T\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2\}$, ktoré zodpovedajú postupne stavom systému: 0 — v bezchybnom stave, 1 — s malou poruchou a 2 — s veľkou poruchou. Prechody medzi stavmi zariadenia máme zobrazené prechodovým grafom na obr. 1.6. □



Obr. 1.6: Prechodový graf stavov zariadenia

Náhodný reťazec $\{\mathbf{X}_n : n \in T\}$ s množinou stavov S nazveme **markovov reťazec s diskrétnym časom** ak:

- Množina $T = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Platí markovova vlastnosť: Pre ľubovoľné stavy $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ je

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+1} = j | \mathbf{X}_n = i, \mathbf{X}_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \mathbf{X}_0 = i_0) = \\ = \mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+1} = j | \mathbf{X}_n = i). \quad (1.4)$$

Ak $\mathbf{X}_n = i$ hovoríme, že reťazec je v čase n v stave i.

Poznámka. *V uvedenej definícii sme sa obmedzili na ekvidistantné časové okamihy nakoľko nás ďalej zaujímajú len pravdepodobnosti prechodov medzi stavmi a nie okamihy kedy k nim dochádza.*

Markovova vlastnosť (1.4) vyjadruje túto skutočnosť: Ak n označuje aktuálny okamih, potom markovova vlastnosť hovorí, že pravdepodobnostné chovanie reťazca v budúcom okamihu $n+1$ závisí len na aktuálnom stave a nezávisí na minulých stavoch reťazca.

Ak podmienená pravdepodobnosť na pravej strane (1.4) nezávisí od okamihu n kedy k nej dostávame pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j definované takto:

$$p_{ij} = \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 = j | \mathbf{X}_0 = i),$$

sa zvyknú usporiadať do **matice pravdepodobnosti prechodu** $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$.

V praktických úlohách často potrebujeme vedieť s akou pravdepodobnosťou sa markovov reťazec v uvažovanom stave nachádza. Pravdepodobnosť, že sa markovov reťazec $\{\mathbf{X}_n : n \in T\}$ nachádza v čase $n \in T$ v stave $i \in S$ značíme

$$p_i(n) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_n = i),$$

sa nazýva **pravdepodobnosť stavu** i **v čase** n. Vektor tvaru $\mathbf{p}(n) = (p_i(n))_{i \in S}$ sa nazýva **pravdepodobnostné rozdelenie reťazca v čase** n.

Význam uvedených definícii je v tom, že chovanie markovoho reťazca v akokoľvek okamihu môžeme vypočítať pomocou maticového súčinu:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1) \cdot \mathbb{P} = \mathbf{p}(n-2) \cdot \mathbb{P}^2 = \cdots = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbb{P}^n, \tag{1.5}$$

kde $\mathbf{p}(0)$ je **počiatočné rozdelenie reťazca**.

Príklad 1.15. *Vráťme sa k predchádzajúcemu príkladu a modelujme chovanie zlyhávajúceho zariadenia pomocou markovovho reťazca v diskrétnom čase.*

Predpokladajme teraz, že zariadenie budeme pozorovať v časových okamihoch $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, *budeme ho nachádzať v troch stavoch* 0 *— v bezchybnom stave,* 1 *— s malou poruchou a* 2 *— s veľkou poruchou. Modelujúci náhodný reťazec* $\{\mathbf{X}_n : n \in T\}$ *s množinou stavov* $S = \{0, 1, 2\}$ *má aj markovovu vlastnosť. Budúce stavy zariadenia sú závislé len na aktuálnom stave ako vidieť z obrázku 1.6. Do stavu opravy* 2 *sa môžeme dostať z bezchybného stavu* 0 *buď priamo v veľkou poruchou alebo nepriamo cez stav* 1 *najskôr s malou poruchou. Z prechodového grafu už ľahko zostrojíme príslušnú maticu prechodu*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 1-\beta & \beta \\ \gamma & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}.$$

Riadkové súčty matice sú jednotkové, čo znamená že sa v každom okamihu s istotou dostaneme do niektorého zo stavov.

Ak je na počiatku pozorovania zariadenie v prevádzke v bezchybnom stave, potom je počiatočné rozdelenie reťazca $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0)$. *Keď potrebujeme poznať pravdepodobnostné rozdelenie stavov zariadenia v čase* n, *stačí podľa* (1.5) *a vypočítať* $\mathbf{p}(n) = (1, 0, 0) \cdot \mathbb{P}^n$. □

Pri riešení niektorých reálnych úloh sa stretávame s požiadavkou takého chovania reťazca, ktoré sa s časom nemení. Nech je $\mathbb{P}$ matica pravdepodobnosti prechodu markovovho reťazca. Potom vektor $\mathbf{p} = (p_j)_{j \in S}$, pre ktorý platí:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbb{P}, \quad \sum_{j \in S} p_j = 1, \quad p_j \geq 0 \tag{1.6}$$

nazývame **stacionárne rozdelenie** reťazca s diskrétnym časom.

Poznámka. *Stacionárne rozdelenie nemusí pre ľubovoľnú maticu prechodu vždy existovať prípadne ich môže existovať viacero. Táto otázka vedie ku klasifikácii stavov markovových reťazcov s množstvom netriviálnych aplikácii, čo však presahuje účel tohoto textu.*

Na objekty, ktorých vývoj je modelovaný reťazcami v diskrétnom čase sa môžeme pozerať akoby sme pozorovali sled fotografii. Ak je však počet pozorovaní veľmi veľký, je vhodnejšie zameniť fotografie za film, teda pozorovanie v spojitom čase.

Náhodný reťazec $\{\mathbf{X}_t : t \in T\}$ s množinou stavov S nazveme **markovov reťazec so spojitým časom** ak:

- Množina $T = \langle 0, \infty)$.
- Platí markovova vlastnosť: Pre ľubovoľné stavy $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ a okamihy $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ je

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{t_{n+1}} = j | \mathbf{X}_{t_n} = i, \ldots, \mathbf{X}_{t_0} = i_0) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_{t_{n+1}} = j | \mathbf{X}_{t_n} = i).$$

Ak $\mathbf{X}_t = i$ hovoríme, že reťazec je v čase t v stave i.

Keď sa pozrieme na definíciu markovovho reťazca v diskrétnom čase vidíme, že môžeme preniesť do spojitého času niektoré definície. Ak by sme jednotkový ekvidistantný krok času nahradili krokom dĺžky h a opäť predpokladali nezávislosť na čase prechodu t potom môžeme definovať **maticu pravdepodobnosti prechodu za čas** h takto:

$$\mathbb{P}(h) = (p_{ij}(h))_{i,j \in S}, \quad p_{ij}(h) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_h = j | \mathbf{X}_0 = i).$$

Pravdepodobnosť, že sa reťazec nachádza v čase t v stave i označíme analogicky

$$p_i(t) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_t = i),$$

sa nazýva **pravdepodobnosť stavu** i **v čase** t a vektor tvaru $\mathbf{p}(t) = (p_i(t))_{i \in S}$ sa nazýva **pravdepodobnostné rozdelenie reťazca v čase** t.

Zdalo by sa, že by bolo možné použiť analógiu vzťahu (1.5). Problém je však v tom že výpočet $\mathbb{P}(h)$ je reálne veľmi nepresný, čo by malo po násobení za následok neakceptovateľné numerické chyby. Plodným sa stal nasledujúci postup.

Na popis chovania makovoho reťazca v spojitom čase slúži **intenzita prechodu zo stavu** i **do stavu** j

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h}, & \text{ak } i \neq j, \\ \lim\limits_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}, & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

Zvykneme ich usporiadať v tvare **matice intenzít** $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$, kde $q_{ij} = \lambda_{ij}$ ak $i \neq j$ a $q_{ii} = -\lambda_{ii}$. Dôvodom je elegantná formulácia v tvare systému homogénnych diferenciálnych rovníc

$$\mathbf{p}(t)' = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbb{Q},$$

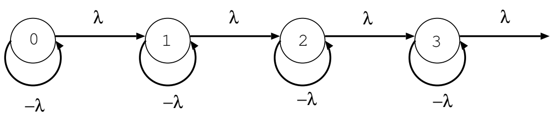
pre ktorý poznáme aj explicitné, hoci pre numerickú nestabilitu v praxi nepoužiteľné, riešenie v tvare $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{Q} \cdot t}$.

Aj pri riešení niektorých spojitých úloh (napr. v stabilizovaných systémoch hromadnej obsluhy) sa stretávame s požiadavkou chovania reťazca, ktoré sa s časom nemení. Nech je $\mathbb{Q}$ matice intenzít markovovho reťazca. Potom vektor $\mathbf{p} = (p_j)_{j\in S}$, pre ktorý platí:

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}\cdot\mathbb{Q}, \quad \sum_{j\in S} p_j = 1, \quad p_j \geq 0 \tag{1.7}$$

nazývame **stacionárne rozdelenie** markovovho reťazca so spojitým časom.

Poznámka. *Podobne ako v diskrétnom prípade pri riešení systému lineárnych rovníc* (1.6) *aj pri riešení systému lineárnych rovníc* (1.7) *možno použiť štandardné algebraické postupy (napr. Gaussovu eliminačnú metódu). V prípade ak také riešenie jediné dokonca v pomocou inverznej matice, čo je obzvlášť výhodné pri použití programu* `MS Excel`.



Obr. 1.7: Prechodový graf homogénneho Poissonovho procesu

Snáď k najznámejším markovovým reťazcom patrí Poissonov proces. **Homogénnym Poissonovým procesom** s parametrom λ, $\lambda > 0$ rozumieme Markovov proces s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ s počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)$ a s nasledujúcim prechodovým grafom na obrázku. 1.7.

S jednou jeho aplikáciou sa zoznámime v kapitole venovanej teórii hromadnej obsluhy.

1.6 Optimalizácia údržby a obnovy zariadení

Pri rozhodovaní o plánovaní termínov údržby ako aj termíne obnovy zariadení sa nevyhneme problému obmedzených finančných zdrojov [10]. V našom modeli sa obmedzíme na zdroje, ktoré možno čerpať jednak na údržbu jednak na obnovu rovnakých zariadení. Plánovaná údržba predstavuje výpadok v užívaní zariadenia o to viac inštalácia nového zariadenia. Obe činnosti preto treba efektívne plánovať.

Budeme predpokladať, že počas životného cyklu zariadenia, ktorého dĺžka je L období, poznáme jeho poruchovosť určenú distribučnou funkciou $F(t)$ pre $t \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$. V období 0 sa realizuje obnova zariadenia s finančnými nákladmi c_Z [€] a neplánuje sa jeho údržba. Predpokladá sa, že ak v prvom období prevádzky dôjde k poruche zariadenia, rieši sa to výmenou v záručnej lehote bez finančných nárokov. V období $L-1$ sa už nevykonáva žiadna plánovaná údržba, nakoľko po jej uplynutí je zariadenie vždy vymenené za nové. V obdobiach $1, 2, \dots, L-2$ sa môžu, ale nemusia, vykonávať plánované údržby zariadenia vo výške priemerných nákladov c_U [€].

Účelom údržby je, aby zriadenie zlyhávalo čo najmenej v priebehu plánovanej životnosti L-období, prípadne docieliť predĺženie životnosti zariadenia. Pre prípad poruchy zariadenia sú známe c_P [€] priemerné náklady na odstránenie poruchy. Na údržbu a obnovu zariadenia máme vyčlenené finančné zdroje priemerne vo výške c_F [€] na t_F období.

Obdobiam v našom modeli zodpovedajú veku zriadenia. Ďalej budeme pod vekom zariadenia rozumieť jeho „morálny vek“, ktorý tak môže byť pri efektívnej údržbe väčší než je jeho životnosť.

Údržby vek zariadenia predlžujú a poruchy skracujú takto:

- Ak by bolo zariadenie počas celého životného cyklu pracovalo bez poruchy a nevyžadovalo údržbu, potom by bolo po dožití veku L nahradené novým.
- Ak sa v niektorom období $t \in \{1, 2, ..., L-2\}$ vykoná údržba, znamená to, že sa vek zariadenia predĺži o jedno obdobie (zariadenie morálne omladne o jedno obdobie namiesto toho, aby prirodzene zostarlo).
- Ak sa v niektorom období $t \in \{1, 2, ..., L-2\}$ vyskytne porucha, znamená to že sa vek zariadenia skráti o jedno obdobie (zariadenie morálne zostarne, namiesto o jedno obdobie zostarne o dve obdobia).

Dĺžku predĺženia čí skrátenia veku o daný počet období by bolo možné zaviesť ako dva parametre modelu. Model by sa však stal formálne zložitejší a preto sme od tohoto kroku upustili.

Úlohou je zostaviť taký plán údržieb a obnov, ktorý čo najefektívnejšie využije naplánované finančné krytie prevádzky zariadenia.

Nakoľko v našom modeli nezáleží na tom ako zariadenie vek nadobudlo či bezporuchovou prevádzkou alebo údržbou alebo poruchou, ďalší vývoj zariadenia závisí len od veku v ktorom sa zariadenie nachádza a od udalosti ktorá v tomto období nastane. Vek zariadenia má teda „bezpamäťovú“ vlastnosť typickú pre markovove systémy.

V našom prípade popisuje chovanie zariadenia markovov reťazec $\{\mathbf{X}_n : n \in T\}$ v diskrétnom čase $T = \{0, 1, 2, \ldots, t_F\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \ldots, L-1\}$ a maticou prechodov medzi stavmi $\mathbb{P} = (p_{ij})$.

Len tie prechody (i, j) zo stavu i do stavu j sú možné ktoré vyvolajú zmenu veku zariadenia. Na výpočet pravdepodobností (ďalej len skratkovite pp.) prechodu (i, j) potrebujeme poznať:

w_i — pp. prežitia veku i (je vopred určená poruchovosťou zariadenia),

x_i — pp. údržby vo veku i (je neznáma, budeme ju hľadať).

Do úvahy tak prichádzajú nasledujúce dvojice $(i, j) \in S \times S$:

$(0, 1)$ — nové zariadenie pracuje bez poruchy a údržby 1. obdobie s pp. $p_{01} = 1$,

$(i, i-1)$ — zariadenie omladne údržbou na vek $i-1$ s pp. $p_{i,i-1} = x_i$,

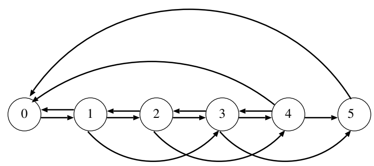
$(i, i+1)$ — zariadenie prežije obdobie i bez údržby a poruchy
s pp. $p_{i,i+1} = (1 - x_i) \cdot w_i$,

$(i, i+2)$ — zariadenie ostarne v dôsledku poruchy na vek $i + 2$
s pp. $p_{i,i+1} = (1 - x_i) \cdot (1 - w_i)$,

$(L - 2, 0)$ — zariadenie bude obnovené pre poruchu, ktorá sa už neopravuje
s pp. $p_{L-2,0} = x_{L-2}$,

$(L - 1, 0)$ — zariadenie bude obnovené v dôsledku dosiahnutia životnosti
s pp. $p_{L-1,0} = 1$.

Pre kontrolu ale aj väčšiu názornosť nám dobre poslúži prechodový graf $G = (S, H, p)$ markovovho reťazca s množinou vrcholov $S = \{0, 1, \ldots, 5\}$ a množinou orientovaných hrán $H = (i, j) \in S \times S : p_{ij} > 0$. Prechodový graf G pre zariadenie so 6 mesačnou životnosťou máme na obrázku 1.8.



Obr. 1.8: Prechodový graf zariadenia s polročnou životnosťou

Na obrázku sme, kvôli prehľadnosti, vynechali ohodnotenie hrán $(i, j) \in H$ pravdepodobnosťami p_{ij}:

$$\begin{array}{lllll}
p_{0,1} = 1, & p_{1,0} = x_1, & p_{1,2} = (1-x_1) \cdot w_1, & p_{1,3} = (1-x_1) \cdot (1-w_1), & \\
 & p_{2,1} = x_2, & p_{2,3} = (1-x_2) \cdot w_2, & p_{2,4} = (1-x_2) \cdot (1-w_2), & \\
 & p_{3,2} = x_3, & p_{3,4} = (1-x_3) \cdot w_3, & p_{3,5} = (1-x_3) \cdot (1-w_3), & \\
 & p_{4,3} = x_4, & p_{4,5} = (1-x_4) \cdot w_4, & p_{4,0} = (1-x_4) \cdot (1-w_4), & p_{5,0} = 1.
\end{array}$$

Chovanie reťazca popisuje pravdepodobnostné rozdelenie jeho stavov t. j. pp. stavov $i \in S$ v čase $n \in T$:

$$\mathbf{p}(n) = (p_0(n), p_1(n), \ldots, p_{L-1}(n)), \quad p_i(n) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_n = i),$$

ktoré vyhovuje rovniciam v čase $n \in T$:

$$\mathbf{p}(n + 1) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbb{P}^n, \quad \mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, ...0).$$

Teraz už môžeme formulovať funkciu $Z(t)$ **priemerných kumulatívnych nákladov údržby a obnovy** v čase t takto:

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{t} (Z_O(n) + Z_U(n) + Z_P(n),$$

kde definujeme priemerné náklady v n-tom období takto na náklady:

(i) **obnovy:** $Z_O(n) = c_Z \cdot p_0(n)$,

(ii) **údržby:** $Z_U(n) = c_U \cdot \sum_{i=1}^{L-2} p_i(n) \cdot x_i$,

(iii) **poruchy:** $Z_P(n) = c_P \cdot \sum_{i=1}^{L-2} p_i(n) \cdot (1 - x_i) \cdot (1 - w_i)$.

Zo znalosti pravdepodobnostného rozloženia veku zariadenia v sledovaných obdobiach môžeme odhadnúť **priemerný vek zariadenia za** t **období** číslom $V(t)$:

$$V(t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_{n=1}^{t} \sum_{i=1}^{L-1} i \cdot p_i(n). \tag{1.8}$$

Druhý súčet $\sum_{i=1}^{L-1} i \cdot p_i(n)$ v rovnici (1.8) udáva priemerný vek zariadenia v čase n.

Našim cieľom je nájsť taký plán údržieb určených pp. $x_i, i \in \{1, 2, L-2\}$ pri ktorých je využijeme finančné krytie prevádzky zariadenia pri maximálnej kvalite jeho produkcie, ktorá je daná priemerným vekom zariadenia. Vychádzame tu zo známeho pozorovania, že čím je zariadenie vekovo mladšie tým je menej opotrebované, čo sa potom prejavuje na kvalite výroby. Zvolíme preto stratégiu údržby, ktorá s väčšou frekvenciu uprednostňuje mladšie zariadenia pred staršími.

Optimalizačnú úlohu sformulujeme podrobnejšie, aby sme mohli použiť optimalizačný softvér. Vzhľadom na vektor premenných $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{L-2})$, pomocou ktorých sme vyššie definovali pravdepodobnosti prechodu z obdobia do obdobia, je naša matica prechodu funkciou $\mathbf{x}$ a tak ju budeme značiť dôsledne $\mathbb{P}(\mathbf{x})$.

Teraz už môžeme formulovať nelineárnu úlohu matematického programovania (**PUO**):

$$\frac{1}{t_F} \cdot \sum_{n=1}^{t} \sum_{i=1}^{L-1} i \cdot p_i(n) \to \text{minimum}, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbb{P}(\mathbf{x})^n, \quad n = 1, 2, ..., t_F \tag{1.10}$$

$$\sum_{n=1}^{t_F} (Z_O(n) + Z_U(n) + Z_P(n)) = c_F, \tag{1.11}$$

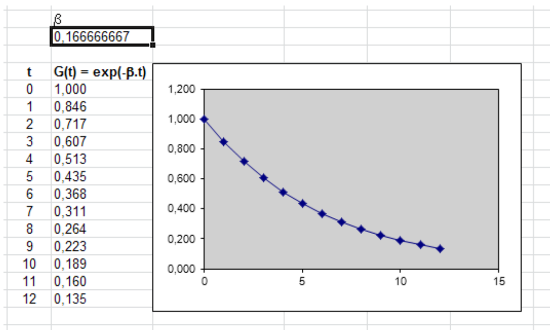
$$1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{L-2} \geq 0. \tag{1.12}$$

Cieľová funkcia (1.9) udáva priemerný vek zariadenia za sledované obdobie, ktorý treba údržbami minimalizovať. Rovnica (1.10) popisuje chovanie údržby v jednotlivých obdobiach prevádzky. Rovnosť (1.11) zabezpečuje finančné krytie obnovy údržby a opravy porúch zriadenia. Obmedzenia (1.12) definujú stratégiu údržby uprednostňovaním mladších vekových skupín pomocou nerastúcej pravdepodobností údržby.

Keď úloha **PUO** nemá prípustné riešenie, potom finančný zdroj nie je schopný pokryť vo vymedzenou období údržbu a opravu porúch ani len jedného zariadenia. Úloha **PUO** je nelineárna tým, že máme na pravej strane rovnosti (1.10) mocniny matice prechodu $\mathbb{P}(\mathbf{x})$. Ukážku riešenia úlohy v programe `MS Excel` pomocou solvéru *Riešiteľ*, ktorý ponúka *nelineárny algoritmus GRP*, ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 1.16. *Uvažujme zariadenie, u ktorého sa predpokladá $L = 12$ mesačná životnosť, ktorej prekročenie bez údržby by malo za následok neakceptovateľné zníženie kvality výroby. Jeho poruchovosť sa riadi exponenciálnym rozdelením s priemernou dobou medzi poruchami $1/\beta = 6$ mesiace. K dispozícii máme $c_F = 20\ 000$ € na obdobie $t_F = 24$ mesiacov. Nech priemerné náklady na údržbu sú $c_U = 100$ € a na poruchu $c_P = 300$ € pričom cena nového zariadenia je $c_Z = 6\ 000$ €.* □

Pravdepodobnosť bezporuchovej prevádzky zariadenia za čas t vyjadruje doplnková funkcia distribučnej funkcii exponenciálneho rozdelenia $F(t) = 1 - e^{-\beta \cdot t}$ a tak máme $G(t) = 1 - F(t) = e^{-\beta \cdot t}$, ktorej priebeh pre $\beta = 1/6$ máme na obrázku 1.9. S rastom počtu období t klesá pp. $G(t)$ bezporuchovosti prevádzky zariadenia a tak pre obdobie i odhadneme $w_i = G(i)$.



Obr. 1.9: Funkcia $G(t)$ bezporuchovosti zariadenia

Pre výpočet pravdepodobnosti prechodu $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ potrebujeme poznať pravdepodobnosti údržby $\mathbf{x}$, ktorej hodnoty ešte nepoznáme. Na obrázku 1.10 ich náhodne vytvoríme a zapíšeme v bloku `C4:C13`, budú slúžiť len pre potreby ladenia matice $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ a jej násobkov. Tvoria nerastúcu postupnosť, čo je v zhode s požiadavkou stratégie uprednostňovania (1.12).

Výpočet prvého a posledného riadku matice $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ je triviálny `F3=1`, `E14=1`; ($p_{01} = 1$, $p_{11,0} = 1$) a ostatné prvky sú nulové.

Prvky p_{ij} v riadkoch $i = 1, 2, .., , 9$ môžeme definovať buď pracne prvok po prvku alebo programátorsky pomocou funkcie programu `MS Excel` v bunke

```
E4 := IF(E$2=$D4-1,$C4,IF(E$2=$D4+1,(1-$C4)*$B4,
      IF(E$2=$D4+2,(1-$C4)*(1-$B4),0))).
```

Analogicky, s malou zmenou, postupuje pre riadok $p_{10,j}$ v bunke

```
E13 := IF(E$2=$D13-1,$C13,IF(E$2=$D13+1,(1-$C13)*$B13,
       IF(E$2=0,(1-$C13)*(1-$B13),0))).
```

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																	n
2	_i	w_i	x_i	P(x)^n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
3				0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	1	0,846	0,5	1	0,5	0	0,4232	0,0768	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	2	0,717	0,5	2	0	0,5	0	0,3583	0,1417	0	0	0	0	0	0	0	1
6	3	0,607	0,45	3	0	0	0,45	0	0,3336	0,2164	0	0	0	0	0	0	1
7	4	0,513	0,4	4	0	0	0	0,4	0	0,3081	0,2919	0	0	0	0	0	1
8	5	0,435	0,4	5	0	0	0	0	0,4	0	0,2608	0,3392	0	0	0	0	1
9	6	0,368	0,3	6	0	0	0	0	0	0,3	0	0,2575	0,4425	0	0	0	1
10	7	0,311	0,3	7	0	0	0	0	0	0	0,3	0	0,218	0,482	0	0	1
11	8	0,264	0,3	8	0	0	0	0	0	0	0	0,3	0	0,1845	0,5155	0	1
12	9	0,223	0,2	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0	0,1785	0,6215	1
13	10	0,189	0,1	10	0,73	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0	0,17	1
14				11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15																	

Obr. 1.10: Matica pravdepodobnosti prechodu $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ medzi vekovými skupinami zariadenia

Potom už stačí bunky správne rozkopírovať. Na kontrolu správnosti nám slúži blok `Q3:Q14` s riadkovými súčtami rovnými 1.

Mocniny matice $\mathbb{P}(\mathbf{x})^n$ pre $n = 2, 3, \ldots, 24$ dostaneme pomocou funkcie `MMULT()` programu `MS Excel`. Na obrázku 1.11 máme výpočet druhej mocniny, ostatné už dostaneme ich kopírovaním.

{=MMULT($E$3:$P$14;E3:P14)}

D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
P(x)^n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2
0	0,5	0	0,4232	0,0768	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0,7116	0,0345	0,1516	0,0856	0,0166	0	0	0	0	0	0	1
2	0,25	0	0,3728	0,0951	0,1195	0,1212	0,0414	0	0	0	0	0	1
3	0	0,225	0	0,2947	0,1503	0,1028	0,1538	0,0734	0	0	0	0	1
4	0	0	0,18	0	0,2567	0,1741	0,0803	0,1797	0,1292	0	0	0	1
5	0	0	0	0,16	0	0,2014	0,2186	0,0671	0,1893	0,1635	0	0	1
6	0	0	0	0	0,12	0	0,1555	0,2345	0,0561	0,2058	0,2281	0	1
7	0	0	0	0	0	0,09	0	0,1426	0,2291	0,0402	0,1984	0,2996	1
8	0,3763	0	0	0	0	0	0,09	0	0,1023	0,1962	0,0329	0,2023	1
9	0,7518	0	0	0	0	0	0	0,06	0	0,0548	0,1031	0,0303	1
10	0,17	0,73	0	0	0	0	0	0	0,02	0	0,0179	0,0621	1
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Obr. 1.11: Matica pravdepodobnosti prechodu $\mathbb{P}(\mathbf{x}^2)$

Kopírovanie ale treba zopakovať 23 krát, aby sme dostali maticu $\mathbb{P}(\mathbf{x})^{24}$. Na kontrolu nám opäť slúžia ich jednotkové riadkové súčty v stĺpci `Q`.

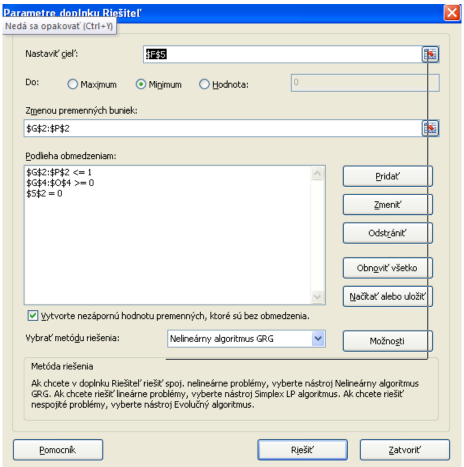
Na obrázku 1.12 máme pripravené v poliach všetky zvyšné dáta na optimalizáciu. Pri absencii údržby, pole `G2:P2` je nulové, je priemerný vek zariadenia `F5:=4,76` ostáva rezerva `S2:=B5-SUM(R7:T30)=3395,3` [€]. Teraz už môžeme spustiť optimalizačný algoritmus.

Q4 | Pole názvov

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	24			w_i		0,8465	0,7165	0,6065	0,5134	0,4346	0,3679	0,3114	0,2636	0,2231	0,1889					
2	100	pp. Udrzby		x_i		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		_(22)	3 295,3	rezerva	
3	300	pp. Poruch				0,1535	0,2835	0,3935	0,4866	0,5654	0,6321	0,6886	0,7364	0,7769	0,8111					
4	6 000				_(23)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000						
5	20 000			_(20)	4,76	priemerny vek											13 615,0	0,0	3 089,7	
6		_(21)	_n	_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Z_O(n)	Z_U(n)	Z_P(n)	
7		p(	1	) =	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	0,0	46,1	
8		p(	2	) =	0,0000	0,0000	0,8465	0,1535	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	0,0	90,1	
9		p(	3	) =	0,0000	0,0000	0,0000	0,6065	0,3331	0,0604	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	0,0	130,5	
10		p(	4	) =	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3679	0,4097	0,1883	0,0342	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	0,0	166,0	
11		p(	5	) =	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1889	0,3570	0,3009	0,1297	0,0235	0,0000	0,0000	0,0	0,0	196,0	
12		p(	6	) =	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0821	0,2381	0,3194	0,2414	0,1007	0,0183	0,0	0,0	216,1	
13		p(	7	) =	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0302	0,1260	0,2482	0,2891	0,2065	599,9	0,0	162,3	
14		p(	8	) =	0,4410	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0094	0,0540	0,1482	0,2474	2 646,1	0,0	55,3	
15		p(	9	) =	0,3676	0,4410	0,0846	0,0153	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0025	0,0190	0,0700	2 205,6	0,0	34,5	
16		p(	10	) =	0,0853	0,3676	0,3733	0,1283	0,0333	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0055	512,1	0,0	69,8	
17		p(	11	) =	0,0060	0,0853	0,3112	0,3239	0,1837	0,0676	0,0188	0,0034	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	35,8	0,0	111,2	
18		p(	12	) =	0,0001	0,0060	0,0722	0,2361	0,2847	0,2217	0,1187	0,0451	0,0130	0,0024	0,0000	0,0000	0,6	0,0	148,7	
19		p(	13	) =	0,0000	0,0001	0,0050	0,0527	0,1637	0,2390	0,2349	0,1691	0,0891	0,0345	0,0101	0,0018	0,0	0,0	180,7	

Obr. 1.12: Model **PUO** pred optimalizáciou

Na obrázku 1.13 máme uvedené odkazy na polia buniek pre optimalizačný nástroj Riešiteľ.



Obr. 1.13: Odkazy na pola v optimalizačnom nástroji *Riešiteľ*

Hlavný výsledok optimalizácie pravdepodobnosti údržieb je zobrazený na obr. 1.14 v poli `G2:P2`.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	24			w_i		0,8465	0,7165	0,6065	0,5134	0,4346	0,3679	0,3114	0,2636	0,2231	0,1889					
2	100	pp. Udrzby		x_i		0,4409	0,4409	0,4409	0,4409	0,4409	0,4409	0,4409	0,4409	0,4409	0,0000		_(22)	0,0	rezerva	
3	300	pp. Poruch				0,0858	0,1585	0,2200	0,2721	0,3161	0,3534	0,3850	0,4117	0,4344	0,8111					
4	6 000				_(23)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4409						
5	20 000			_(20)	3,28	priemerny vek											17 632,0	894,3	1 473,7	
6		_(21)	_n	_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Z_O(n)	Z_U(n)	Z_P(n)	
7		p(	1	) =	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	44,1	25,8	
8		p(	2	) =	0,4409	0,0000	0,4733	0,0858	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2 645,2	24,7	28,2	
9		p(	3	) =	0,0000	0,6495	0,0378	0,1896	0,1041	0,0189	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	44,1	41,3	
10		p(	4	) =	0,2864	0,0167	0,3910	0,1168	0,0786	0,0716	0,0329	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1 718,2	31,5	44,1	
11		p(	5	) =	0,0074	0,4588	0,0594	0,1927	0,1332	0,0628	0,0414	0,0294	0,0127	0,0023	0,0000	0,0000	44,1	43,8	53,8	
12		p(	6	) =	0,2023	0,0335	0,3021	0,1219	0,1025	0,0989	0,0644	0,0340	0,0208	0,0132	0,0055	0,0010	1 213,5	34,9	57,4	
13		p(	7	) =	0,0203	0,3354	0,0696	0,1691	0,1328	0,0846	0,0669	0,0537	0,0345	0,0161	0,0102	0,0068	121,5	42,4	64,1	
14		p(	8	) =	0,1629	0,0509	0,2333	0,1152	0,1057	0,1048	0,0804	0,0557	0,0401	0,0258	0,0162	0,0089	977,6	35,8	65,8	
15		p(	9	) =	0,0446	0,2658	0,0749	0,1444	0,1223	0,0911	0,0788	0,0673	0,0495	0,0274	0,0197	0,0142	267,3	40,6	69,2	
16		p(	10	) =	0,1474	0,0776	0,1895	0,1067	0,1010	0,1016	0,0851	0,0668	0,0516	0,0332	0,0238	0,0156	884,5	35,9	69,2	
17		p(	11	) =	0,0691	0,2310	0,0838	0,1271	0,1110	0,0900	0,0816	0,0724	0,0564	0,0333	0,0254	0,0189	414,6	39,1	70,4	
18		p(	12	) =	0,1413	0,1060	0,1653	0,1023	0,0961	0,0958	0,0840	0,0701	0,0562	0,0362	0,0274	0,0193	848,1	35,8	69,6	
19		p(	13	) =	0,0882	0,2142	0,0953	0,1177	0,1032	0,0871	0,0803	0,0723	0,0578	0,0353	0,0276	0,0209	529,3	38,1	69,8	

Obr. 1.14: Model **PUO** po optimalizácii

Údržbou vo veku zariadenia 1 až 9 sa podarilo využiť rezervu a zmenšiť priemerný vek zariadenia na `F5:=3,28` mesiaca pričom v týchto obdobiach stačí vykonávať údržbu s pravdepodobnosťou $0,4409$ t. j. cca v 44 % prípadoch.

Poznámka. *Model v programe* `MS Excel` *umožňuje citlivostnú analýzu zmenami jeho parametrov. Naviac môže byť podnetom pre tvorbu profesionálneho softvéru.*

Literatúra

[1] ANDĚL, J.: *Statistické metody*, Vydavatelství MATFYZPRESS, Praha, (1998), ISBN 80-85863-27-8.

[2] ANDĚL, J.: *Matematika náhody*, Vydavatelství MATFYZPRESS, Praha, (2004), ISBN 80-85863-52-9.

[3] CHAJDIAK, J.: *Štatistika jednoducho*, Vydavateľstvo STATIS, Bratislava, (2010), ISBN 978-85659-60-3.

[4] JUREČKOVÁ, M., MOLNÁROVÁ, I.: *Štatistika s Excelom*, Vydavateľstvo AOS, Liptovský Mikuláš, (2015), ISBN 80-8040-257-4.

[5] LIKEŠ, J., MACHEK, J.: *Počet pravdepodobnosti*, Sešit X, Matematika pro vysoké školy technické, SNTL – Naladatelství technické literatury, Praha, (1981).

[6] LINDA, B.: *Stochastické modely operačního výskumu*, Vydavatelství STATIS, Bratislava, (2004), ISBN 80-8569-33-6.

[7] LITSCHMANNOVÁ, M.: *Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti*, skripta, VŠB–TU, FEI, Ostrava, (2011), `http://mi21.vsb.cz/modul/vybrane-kapitoly-z-pravdepodobnosti`.

[8] HABÁK, P., KAHOUNOVÁ, J.: *Počet pravděpodobnosti v příkladech*, Vydavatelství INFORMATORIUM, Praha, (2005), ISBN 80-733-040-7.

[9] PALÚCH, S., PEŠKO, Š.: *Kvantitatívne metódy v logistike*, EDIS vydavateľstvo, Žilina, (2006), ISBN 80-8070-636-0.

[10] PEŠKOVÁ, A.: *Návrh a overenie mechanizmu optimalizácie riadenia procesu údržby a obnovy v diskrétnych výrobách* Dizertačná práca. Košice: TU SjF, (2015), 110s.

[11] PIDANY, J.: *Metódy porovnávania a sledovania dynamiky vývoja v ekonomike*, ELFA s.r.o. vydavateľstvo, Košice, (1996), ISBN 80-88786-37-1.

[12] RIEČAN, B., LAMOŠ, F., LENÁRT, C.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*, ALFA vydavateľstvo, Bratislava, (1984).

[13] SAKÁL, P., JERZ, V.: *Operačná analýza v praxi manažéra*, TRIPSOFT, Edícia teória a prax manažérstva 2, Trnava, (2003), ISBN 80-968734-3-1.