Obsah

Úvod

V tomto súbore nájdete množstvo úloh[1] z pravdepodobnosti a štatistiky. Ich hlavným poslaním je poskytnúť materiál a námety pre samostatné riešenie. Nie je však vylúčené, že s niektorými z nich sa stretnete na cvičeniach alebo pri písomkách, či už priebežných alebo pri skúške. Je teda na každom, akú formu prípravy si zvolí. Isté však je, že bez istej dávky počtárskej zručnosti a skúseností je úspešné absolvovanie predmetu málo pravdepodobné. Na druhej strane by si však každý mal byť vedomý, že zbierka je len doplnkom, nie náhradou štúdia teórie a len samotné riešenie úloh tiež nie je dostačujúce.

Zbierku ako celok treba považovať za živý dokument, čo znamená najmä to, že sa bude postupne rozrastať o nové námety a príklady, a to nielen v častiach a témach, ktoré ostávajú zatiaľ nepokryté, ale aj v častiach už existujúcich. Aj tu môžu pribúdať nové príklady, kedykoľvek narazím na úlohy, ktoré budú zaujímavé alebo inšpiratívne. Neodporúčam preto jej horúčkovité tlačenie.

V zbierke sa stretnete aj s niektorými náročnejšími úlohami, ktoré sú, tak ako je bežným zvykom, označené hviezdičkou. Nebolo by však na mieste ku týmto úlohám pristupovať s prehnaným rešpektom, či dokonca s obavami. Naopak, práve úspešné vyriešenie takýchto problémov môže byť povzbudením do ďalšej práce. Preto nevylučujem ani to, že časom môžu pribudnúť aj dvojhviezdičkové úlohy.

Taktiež môžete naraziť na úlohy, pri ktorých je číselné označenie v rámiku. Tieto úlohy nejakým spôsobom rozširujú či dopĺňajú poznatky z prednášok a je preto žiadúce sa s nimo oboznámiť, nakoľko ich výsledky alebo poznatky v nich obsiahnuté môžu byť v budúcnosti využívané.

[1] Zatiaľ neriešených a je pomerne vysoko pravdepodobné, že vo verzii zbierky neriešených úloh aj ostanú.

1 Pojem Pravdepodobnosti

1.1. Náhodná udalosť A znamená, že náhodne vybrané číslo je deliteľné piatimi a udalosť B znamená, že toto číslo má na poslednom mieste nulu. Vyjadrite slovne, čo znamenajú udalosti:

a) $C = A \cap B$.

b) $D = A \cup B$.

c) $E = A^c \cap B$.

d) $F = A \cup B^c$.

e) $G = (A \cup B^c)^c$.

[]

1.2. Priemyselne vyrábaný filter je vystavený trom rôznym skúškam. Udalosť A znamená, že náhodne vybratý filter obstojí pri prvej skúške, udalosť B znamená, že obstojí v druhej skúške a konečne udalosť C znamená, že obstojí v tretej skúške. Zapíšte v množinovej symbolike nasledujúce náhodné udalosti:

a) filter obstojí len v prvej skúške,

b) filter obstojí v prvej a druhej skúške, ale neobstojí v skúške tretej,

c) filter obstojí vo všetkých troch skúškach,

d) filter obstojí aspoň v jednej skúške,

e) filter obstojí aspoň v dvoch skúškach,

f) filter obstojí práve v jednej skúške,

g) filter obstojí práve v dvoch skúškach,

h) filter obstojí nanajvýš vo dvoch skúškach.

[]

1.3. Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Vypíšte všetky možné polia udalostí definované na tomto výberovom priestore.

[]

1.4. Hádžeme kockou tak dlho, až kým nepadne šesťka.

a) Určte výberový priestor.

b) Vypíšte všetky možné výsledky, ktoré sú priaznivé pre nastatie náhodnej udalosti „pokus sa skončí pri druhom hode“.

c) Koľko možných výsledkov je priaznivých pre nastatie udalosti „pokus sa skončí pri treťom hode“?

[]

1.5. Náhodný pokus predstavuje dva hody kockou. Udalosť A_{ij} znamená, že v prvom hode padlo na kocke i bodov a v druhom hode padlo j bodov, kde $i.j = 1, \ldots, 6$. Pomocou udalostí A_{ij} zapíšte nasledujúce náhodné udalosti:

a) Pri oboch hodoch padol rovnaký počet bodov.

b) Pri oboch hodoch padlo dokopy 5 bodov.

c) V prvom hode padol len jeden bod.

d) Pri druhom hode padlo o štyri body viac ako pri prvom.

e) Pri prvom hode padlo dvakrát viac bodov ako pri druhom.

$$[\,]$$

1.6. Vo vrecku máme N kľúčov a chceme nimi potme odomknúť dvere. Postupne po jednom vyberáme kľúče z vrecka a skúšame s nimi odomknúť zámok vo dverách. Aká je pravdepodobnosť že pri k-tom pokuse zvolíme správny kľúč?

$$\left[\frac{1}{N}\right]$$

1.7.* V osudí je M čiernych a $N-M$ bielych guľôčok. Guľôčky postupne vyberáme z osudia a po vybratí ich nevrátime späť do osudia. Aká je pravdepodobnosť, že čiernu guľôčku po prvý krát vytiahneme pri k-tom ťahu?

$$\left[\frac{\binom{N-M}{k-1}\cdot M\cdot(N-k!)}{N!}\right]$$

1.8. Máme n objektov, ktoré náhodne rozdeľujeme do N priečinkov. Aká je pravdepodobnosť, že v určitom priečinku sa bude po rozdelení nachádzať práve k objektov?

$$\left[\frac{\binom{n}{k}\cdot(N-1)^{n-k}}{N^n}\right]$$

1.9. Palicu náhodne zlomíme v 2 bodoch. Aká je pravdepodobnosť, že zo vzniknutých častí je možné poskladať trojuholník?

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

1.10. Hádžeme dvomi hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň na jednej z nich padne šesťka?

$$\left[\frac{11}{36}\right]$$

1.11. V osudí sa nachádza a bielych a b čiernych guľôčok. Dvakrát za sebou vytiahneme po jednej guľôčke, pričom vytiahnutú guľôčku po pozretí farby vrátime naspäť do osudia. Aká je pravdepodobnosť že aspoň jedna z vytiahnutých guľôčok je biela? Ako sa táto pravdepodobnosť zmení, ak prvú guľôčku po vybratí do osudia nevrátime?

$$\left[\frac{a^2+2ab}{(a+b)^2}, \quad \frac{a^2+2ab-a}{(a+b)(a+b-1)}\right]$$

1.12. Do 8 predajní je potrebné rozviesť 32 vriec zemiakov, medzi ktorými sú tri vrecia namrznuté. Do každej predajne sa pri tom zložia štyri vrecia. Aká je pravdepodobnosť že sa do niektorej predajne dostanú aspoň dve vrecia s namrznutými zemiakmi?

$$\left[\tfrac{43}{155} \approx 0.277\right]$$

1.13. Hádžeme n-krát hracou kockou. Aká je pravdepodobnosť že aspoň jedno zo šiestich čísiel na kocke nepadne v žiadnom hode?

$$\left[\binom{6}{1}\left(\tfrac{5}{6}\right)^n - \binom{6}{2}\left(\tfrac{4}{6}\right)^n + \binom{6}{3}\left(\tfrac{3}{6}\right)^n - \binom{6}{4}\left(\tfrac{2}{6}\right)^n + \binom{6}{5}\left(\tfrac{1}{6}\right)^n\right]$$

1.14.* **Problém sekretárky** Sekretárka napíše n listov, ktoré vloží do n čistých obálok a zalepí ich. potom na každú obálku napíše adresu. Aká je pravdepodobnosť, že ani jeden list nepríde tomu adresátovi, ktorému bol pôvodne určený?

$$\left[\sum_{i=2}^{n}(-1)^i \tfrac{1}{i!}\right]$$

1.15. Na úsečke AB s dĺžkou m sú náhodne zvolené dva body L a M. Určte pravdepodobnosť toho, že bod L je bližšie k bodu M ako k bodu A.

$$\left[\tfrac{3}{4}\right]$$

1.16. Náhodne zvolíme dve čísla z intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Aká je pravdepodobnosť, že ich súčet je nanajvýš rovný jednej a ich súčin je väčší ako $\frac{2}{9}$?

$$\left[\tfrac{3}{18} - \tfrac{2}{9}\ln 2\right]$$

1.17. Náhodne zvolíme dve čísla x a y také, že $|x| \leq 3$ a $|y| \leq 2$. Určte pravdepodobnosť, že

a) x bude kladné alebo y bude záporné,

b) x bude kladné a súčasne y bude záporné,

c) $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

$$\left[\text{a)}\,\tfrac{3}{4},\ \text{b)}\,\tfrac{1}{4},\ \text{c)}\,\tfrac{\sqrt{3}}{12}\right]$$

1.18. Tenisový turnaj. na ktorom sa zúčastní 8 hráčov sa hrá vyraďovacím K.O. systémom, pričom začiatočné nasadenie sa vyžrebuje. Predpokladajme, že lepší hráč vždy porazí slabšieho. Porazený finalista získa trofej za druhé miesto. Aká je pravdepodobnosť, že túto trofej skutočne získa druhý najlepší hráč turnaja?

$$\left[\tfrac{4}{7}\right]$$

1.19. Hádžeme šiestimi hracími kockami. Určte pravdepodobnosť toho, že:

a) Na každej kocke padne iný počet bodov.

b) Aspoň na troch kockách padne rovnaký počet bodov.

c) Na všetkých kockách padne nepárny počet bodov.

d) Na troch dvojiciach kociek padne rovnaký, ale medzi dvojicami navzájom rôzny počet bodov.

e) Na troch kockách padne rovnaký počet bodov a na zvyšných troch iný, ale tiež rovnaký počet bodov.

$$\left[\text{a)}\tfrac{5}{9},\ \text{b)}\tfrac{120}{6^4},\ \text{c)}\tfrac{1}{64},\ \text{d)}\tfrac{6\cdot5\cdot4\binom{6}{3}}{6^6},\ \text{e)}\tfrac{25}{2\cdot6^4}\right]$$

1.20. Nech A a B sú náhodné udalosti, o ktorých je známe, že aspoň jedna z nich nastane s pravdepodobnosťou $\frac{3}{4}$. Aká je pravdepodobnosť toho, že nenastane ani udalosť A ani udalosť B?

$$\left[\tfrac{1}{4}\right]$$

1.21. Nech C a D sú náhodné udalosti, o ktorých je známe, že $\mathbb{P}(C) = 0,3$, $\mathbb{P}(D) = 0,4$ a $\mathbb{P}(C \cap D) = 0,2$. Určte pravdepodobnosť $\mathbb{P}(C^c \cap D)$.

$$[\mathbb{P}(C^c \cap D) = 0,2]$$

1.22. Nech A a B sú náhodné udalosti také, že $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ a $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$.Určte pravdepodobnosť

a) $\mathbb{P}(A \cap B)$,

b) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

$$\left[\text{a)}\mathbb{P}(A \cap B) = \tfrac{1}{12},\ \text{b)}\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \tfrac{11}{12}\right]$$

1.23. Hádžeme trikrát mincou. Tieto pokusy budeme reprezentovať výberovým priestorom

$$\Omega = \{HHH, ZHH, HZH, HHZ, ZZH, ZHZ, HZZ, ZZZ\},$$

kde H znamená, že pri jednotlivom hode padla hlava a Z znamená, že pri jednotlivom hode padol znak.

a) Zapíšte množinovo nasledujúce náhodné udalosti:

A: „znak padol práve dvakrát“,

B: „znak padol aspoň dvakrát“,

C: „znak nepadol skôr. než padla hlava“,

D: „pri prvom pokuse padol znak“.

b) Zapíšte množinovo a slovne charakterizujte náhodné udalosti A^c, $A \cup (C \cap D)$ a $A \cap D^c$.

[]

1.24. Náhodný pokus má len dva možné výsledky, pričom prvý výsledok má pravdepodobnosť p a druhý výsledok má pravdepodobnosť p^2. Určte hodnotu p.

$$\left[p = \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

1.25. Náhodné udalosti A, B a C nemôžu nastať všetky tri súčasne. Okrem toho je známe, že $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(C \cap B) = \frac{1}{3}$. Je možné určiť pravdepodobnosť náhodnej udalosti A?

$\left[\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}\right]$

1.26. Opakovane hádžeme mincou, pričom pravdepodobnosť, že padne hlava je p a pravdepodobnosť, že padne znak je $1 - p$. Ako výsledok náhodného pokusu sledujeme počet hodov, ktoré musíme vykonať do okamihu, kedy padne hlava po druhýkrát.

a) Ako zvolíme výberový priestor?

b) Aká je pravdepodobnosť, že bude potrebné vykonať 5 pokusov?

[b)$4(1-p)^3p^2$]

1.27. V jednotkovom štvorci $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ náhodne zvolíme jeden bod (x, y). Aká je pravdepodobnosť, že tento bod bude ležať v jednej z nasledujúcich množín:

a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}\right\}$,

b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x + y < \frac{3}{2}\right\}$,

c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x^2\right\}$,

d) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}$.

[a)$1 - \frac{\pi}{4}$, b)$\frac{3}{4}$, c)$\frac{2}{3}$, d)0]

2 Podmienená pravdepodobnosť

2.1. Hádžeme kockou. Aká je pravdepodobnosť náhodnej udalsoti A=„padne párne číslo“, za podmienky B=„padlo číslo väčšie ako tri“?

$$\left[\frac{2}{3}\right]$$

2.2. Činnosť určitého zariadenia je závislá od funkčnosti dvoch paralelne zapojených blokov A a B. Tieto bloky nie sú nezávislé a ich súčasné zlyhanie spôsobí zlyhanie celého zariadenia. Pravdepodobnosť poruchy bloku A sa odhaduje na 0,2 a pravdepodobnosť zlyhania bloku B je 0,8 ak zlyhal blok A a 0,4 ak je blok A funkčný.

a) Určte pravdepodobnosť zlyhania bloku B.

b) Určte pravdepodobnosť zlyhania celého zariadenia.

c) Pre zvýšenie spoľahlivosti celého zariadenia bol pridaný blok C tak, že bloky A,B a C sú zapojené paralelne. Pravdepodobnosť zlyhania bloku C je 0,2 a je nezávislá od funkčnosti blokov A a B. Určte pravdepodobnosť, že zariadenie zložené z troch blokov A,B a C zlyhá.

$$[\text{a)}0,48,\ \text{b)}0,16,\ \text{c)}0,032]$$

2.3. Pri skúškach nového dychového alkohol testera bolo zistené, že:

(i) v 5 zo 100 prípadov bol test pozitívny aj napriek tomu, že testovaná osoba nebola intoxikovaná,

(ii) 90 zo 100 prípadov bolo vyhodnotených ako pozitívnych, pričom testovaná osoba bola skutočne intoxikovaná alkoholom.

Odhaduje sa, že 1% testovaných osôb je intoxikovaných alkoholom. Určte pravdepodobnosť, že:

a) test bude pri najbližšej testovanej osobe pozitívny,

b) daná osoba je intoxikovaná, ak jej test bol pozitívny.

$$[\text{a)}0,0585,\ \text{b)}0,1538]$$

2.4. Vykonáme dva nezávislé hody kockou. Ak vieme, že v prvom hode padlo párne číslo, aká je pravdepodobnosť, že súčet bodov v oboch hodoch je rovný 4?

$$\left[\frac{1}{18}\right]$$

2.5. Systém sa skladá z troch nezávislých komponentov. Pritom systém ostáva funkčný, ak aspoň dva z týchto troch komponentov pracujú bez poruchy. Ak spoľahlivosť každého z nich je 0,95, aká je spoľahlivosť systému ako celku?

$$[\mathbb{P}(\text{Systém funguje}) = 0,99275]$$

2.6. Ak vieme, že v sérii troch hodov mincou aspoň raz padla hlava, aká je pravdepodobnosť, že padla hlava vo všetkých troch pokusoch?

$$\left[\frac{1}{7}\right]$$

2.7. Na štarte dostihu sú tri kone a,b a c. Výsledok bac znamená, že kôň b dobehol prvý, kôň a dobehol ako druhý a kôň c skončil tretí. Možné výsledky dostihu potom sú

$$\Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}.$$

Predpokladajme, že $\mathbb{P}(\{abc\}) = \mathbb{P}(\{acb\}) = \frac{1}{18}$, a každá zo zvyšných štyroch elementárnych udalostí má pravdepodobnosť rovnú $\frac{2}{9}$. Definujme udalosti A=„a dobehne pred b“ a B=„a dobehne pred c“.

a) Tvoria udalosti A a B úplný systém udalostí?

b) Sú udalosti A a B nezávislé?

[a) nie b) sú nezávislé]

2.8. V určitej oblasti bol počas sledovaného obdobia na polovicu dní predpovedaný dážď, pričom spoľahlivosť predpovedí je 2 prípady z troch. Pán X chodí počas tohto obdobia na vychádzky a berie si so sebou dáždnik. Pri tom sa riadi predpoveďami a vždy, keď je predpovedaný dážď si zoberie svoj dáždnik a okrem toho si ho zoberie v jeden z troch dní, kedy dážď predpovedaný nebol. Určte pravdepodobnosť že bude pršať a pán X nebude mať dáždnik.

$\left[\frac{1}{9}\right]$

2.9. Letecká spoločnosť má dva typy lietadiel. Jeden typ je vybavený štyrmi motormi, pričom pre bezpečný dolet je nevyhnutné, aby aspoň tri z nich boli funkčné. Druhý typ je vybavený dvomi motormi, pričom pre bezpečný dolet je nutné, aby aspoň jeden motor bol funkčný. Predpokladajme, že motory pracujú nezávisle na sebe a každý z nich má rovnakú pravdepodobnosť p, že ostane plne funkčný. Ktorý typ lietadiel je bezpečnejší?

[prvý]

2.10. Zamestnanec, ktorý denne dochádza do zamestnania má k dispozícii dva automobily. Jeden bežný osobný automobil a jeden minivan. V troch štvrtinách ciest používa osobný automobil a na zvyšné jazdy použije minivan. Ak cestuje osobným automobilom, vráti sa pred 17,30 v 75% prípadov a ak použije minivan, tak v 60% prípadov. Určte pravdepodobnosť, že:

a) V určitý deň príde domov pred 17,30.

b) Použil osobný automobil, ak prišiel domov až po 17,30 hod.

c) Použije minivan a nepríde pred 17,30 hod.

d) Počas dvoch po sebe idúcich dní sa dostane domov pred 17,30 hod., a nepoužije pri tom ten istý automobil.

[a)$0,7126$, b)$0,6522$, c)$0,1$, d)$0,16875$]

2.11.* V spoločnosti $2n$ ľudí je rovnaký počet mužov a žien. Miesta za stolom sa obsadzujú náhodne. Aká je pravdepodobnosť, že žiadne dve osoby rovnakého pohlavia nebudú sedieť vedľa seba?

$\left[\frac{2\cdot(n!)^2}{(2n)!}\right]$

2.12.* V osudí sa nachádza a bielych a b čiernych guľôčok, $a, b > 0$. Vytiahneme náhodne jednu guľôčku a spolu s ňou vrátime do osudia ďalších c guľôčok rovnakej farby. To opakujeme r-krát. Aká je pravdepodobnosť, že v prvých m pokusoch vytiahneme vždy bielu a vo zvyšných $r - m$ pokusoch vždy čiernu guľôčku?

$$\left[\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(a+ci)\prod_{i=1}^{r-m-1}(b+ci)}{\prod_{i=1}^{r-1}(a+b+ci)}\right]$$

2.13. Jedno osudie obsahuje a červených a b bielych guľôčok, druhé osudie obsahuje c červených a d bielych guľôčok. Z každého osudia vyberieme náhodne po jednej guľôčke a z týchto dvoch potom jednu guľôčku. Aká je pravdepodobnosť, že bude červená?

$$\left[\frac{2ac+ad+bc}{2(a+b)(c+d)}\right]$$

2.14. Súčiastky sú vyrábané tromi strojmi S_1, S_2 a S_3, pričom prvý stroj vyrobí 500 súčiastok, z ktorých je 5% kazových, druhý stroj vyrobí 1 000 súčiastok, z ktorých je 6% kazových a tretí stroj vyrobí za deň 1 500 súčiastok, z ktorých je 7% kazových. Z celodennej produkcie všetkých troch strojov náhodne vyberieme jednu súčiastku.

a) Aká je pravdepodobnosť, že súčiastka bude kazová?

b) Vybraná súčiastka je kazová. Aká je pravdepodobnosť, že ju vyrobil tretí stroj?

$$[\text{a)}0,0633,\ \text{b)}0,5527]$$

2.15. Z balíčka 52 kariet (po 13 kariet v štyroch farbách) jedna karta chýba, avšak nie je známe, ktorá karta to je. Zo zvyšných 51 kariet náhodne vyberieme jednu kartu. Aká je pravdepodobnosť, že je srdcová?

$$\left[\frac{1}{4}\right]$$

2.16. Z balíčka 52 kariet sú náhodne vybrané dve karty. Určte pravdepodobnosť, že:

a) obe sú srdcovej farby, ak prvá má srdcovú farbu,

b) obe sú srdcovej farby, ak jedna má srdcovú farbu,

c) obe sú srdcovej farby, ak jedna z nich je srdcové eso,

d) jedna z nich je srdcové eso, ak sú obidve srdcovej farby.

$$\left[\text{a)}\frac{4}{17},\ \text{b)}\frac{2}{15},\ \text{c)}\frac{4}{17},\ \text{d)}\frac{2}{13}\right]$$

2.17. Firma dodáva na trh žiarovky, ktoré sú vyrábané v 3 závodoch. Z prvého závodu pochádza 40% produkcie, z druhého závodu pochádza 35% produkcie a z tretieho závodu pochádza zvyšných 25% produkcie. Požadovanú životnosť dosahuje 92% produkcie prvého závodu, 95% produkcie druhého závodu a 98% produkcie tretieho závodu. Aká je pravdepodobnosť, že zákazník kúpi žiarovku, ktorá nebude mať požadovanú životnosť?

$$[0,0545]$$

2.18. Dilema Montyho Halla
Predstavte si, že ste účastníkmi súťažnej hry, v ktorej si víťaz vyberá cenu voľbou jedných z trojice zatvorených dverí, pričom len za jednými dverami sa skrýva auto. Po zvolení si jedných dvier moderátor, ktorý vie za ktorými dverami je auto ukryté, otvorí jedny zo zostávajúcich dverí, za ktorými žiadna cena nie je. Potom Vás vyzve, že môžte svoju voľbu zmeniť. Je výhodné voľbu zmeniť?

[je výhodnejšie zmeniť dvere]

2.19.* Krach gamblera
Hráč má v peňaženke m €, $m > 0$. V každom hracom kole staví 1 € na padnutie hlavy pri hode mincou. V jednotlivých kolách teda buď vyhráva alebo stráca 1 €, podľa výsledku hodu. Pokračuje tak dlho, kým jeho hotovosť nedosiahne sumu n €, $n > m$, alebo kým mu nedôjdu peniaze (neskrachuje). Určte pravdepodobnosť skrachovania takéhoto hazardného hráča za predpokladu, že jeho oponent skrachovať nemôže.

$\left[1 - \frac{m}{n}\right]$

2.20. Krvný test na určitý druh ochorenia preukáže infikáciu chorého človeka s pravdepodobnosťou 0,99 a zlyháva s pravdepodobnosťou 0,01. Taktiež označí zdravého človeka za chorého s pravdepodobnosťou 0,02. Je pri tom známe, že ochorenie sa vyskytuje u 0,1% populácie. Aká je pravdepodobnosť, že osoba s pozitívnym testom je skutočne chorá?

$[0,047]$

2.21. Študent absolvuje test s viacnásobnými možnosťami odpovedí na jednotlivé otázky, pričom vždy len jedna alternatíva odpovede je správna. študent pozná správnu odpoveď s pravdepodobnosťou p a ak nepozná správnu odpoveď, tak ju háda, pričom jednotlivé alternatívy volí s rovnakými pravdepodobnosťami $\frac{1}{m}$, kde m je počet alternatívnych odpovedí. Aká je pravdepodobnosť, že správnu odpoveď skutočne poznal, ak na otázku odpovedal správne?

$\left[\frac{mp}{1+(m-1)p}\right]$

2.22.* V stredovekom väzení sedí odsúdenec na smrť. Výstredný panovník mu však chce dať šancu. Prinesie mu 12 bielych a 12 čiernych guľôčok a dá mu dve nádoby, do ktorých má guľôčky rozdeliť. Potom mu oznámi, že na druhý deň ráno príde kat, náhodne si vyberie jednu z nádob a z nej vytiahne jednu guľôčku. Ak bude biela, dostane väzeň slobodu, ak bude čierna, bude okamžite popravený. Ako má väzeň rozdeliť guľôčky do nádob, aby maximalizoval pravdepodobnosť svojho oslobodenia?

[]

2.23. Urna obsahuje jednu bielu a jednu červenú loptičku. Náhodne vyberieme jednu loptičku. Ak je biela, vrátime ju do osudia. Ak je červená, spolu s ňou vrátime do osudia ďalšie dve červené loptičky. Potom vyžrebujeme jednu loptičku po druhý krát. Aká je pravdepodobnosť, že v obidvoch pokusoch vyžrebujeme červenú loptičku?

$\left[\frac{3}{8}\right]$

2.24. V nádobe reaktora prebieha chemická reakcia. Na jednej strane reakčnej nádoby do nej vstupuje plyn alebo kvapalina, ktorá sa zmiešava s obsahom reakčnej nádoby, alebo na druhej stranez nádoby uniká. jednou z charakteristík reakcie je rezidenčný čas, ktorý udáva ako dlho častice zotrvajú v reakčnej nádobe, kým ju opustia. Nech R_t označuje udalosť „častica má rezidenčný čas dlhší než t sekúnd". Udalosti R_t majú pravdepodobnosť e^{-t}. určte pravdepodobnosti:

a) že častica, ktorá zotrvala v rekčnej nádobe 3 sekundy zotrvá v nádobe viac ako 4 sekundy,

b) že častica zotrvala v reakčnej nádobe dlhšie ako 3 sekundy, ak nezotrvala v reaktore dlhšie ako 4 sekundy.

$$\left[\text{a)}\mathrm{e}^{-1} \approx 0,36787,\ \text{b)}\frac{\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{-4}}{1-\mathrm{e}^{-4}} \approx 0,0321\right]$$

2.25. Roztržitý profesor matematiky zabúda dáždnik v obchode s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$, (za predpokladu, že taam s ním vôbec dorazí). Z domu vyrazil s dáždnikom, navštívil 3 obchody a domov prišiel bez dáždnika. Aká je pravdepodobnosť že ho zabudol v prvom, druhom alebo treťom obchode?

$[0,4324$ v prvom, $0,3243$ v druhom, $0,2432$ v treťom$]$

2.26. Cestujúceho lietadlom postupne prepravujú tri letecké spoločnosti. Pravdepodobnosť, straty kufra u 1.spoločnosti je 1%, u druhej 3% a pravdepodobnosť, že u tretej spoločnosti dôjde ku strate je 2%. Keď cestujúci dorazil do cieľa svojej cesty, zistil, že mu kufor stratili. Aká je pravdepodobnosť, že hod stratila prvá, druhá alebo tretia spoločnosť?

$[0,170$ prvá,$0,504$ druhá, $0,326$ tretia$]$

2.27. Pri pokusoch s protihmyzovou látkou sa zistilo, že $\frac{3}{4}$ komárov zahynú pri jej prvom použití. Zvyšní získajú takú odolnosť, že pri druhom použití zahynú len $\frac{3}{8}$ zvyšku. Aká je pravdepodobnosť, že komár prežije dvojnásobnú aplikáciu?

$[0,156]$

3 Opakované pokusy

3.1. Hádžeme 100-krát mincou. Aká je pravdepodobnosť, že padne rovnaký počet hláv a znakov?

$[0,08]$

3.2. Ktorá z týchto udalostí je najpravdepodobnejšia:

a) Pri hode šiestimi kockami padne aspoň jedna šesťka.

b) Pri hode dvanástimi kockami padnú aspoň dve šesťky.

c) pri hode osemnástimi kockami padnú aspoň tri šesťky.

$[\text{a)}0,665,\ \text{b)}0,618,\ \text{c)}0,597]$

3.3. Kráľovský pokladník triedi zlaté mince do mešcov po 100 minciach. Pri tom kráľa okráda tak, že do každého mešca vloží jednu falošnú mincu. Kráľ si ho chce skontrolovať a to tak, že z každého zo 100 naplnených mešcov vyberie po jednej minci.

a) Aká je pravdepodobnosť, že pokladníkov podvod ostane neodhalený?

b) Ako sa táto pravdepodobnosť zmení, ak úlohu zovšeobecníme na n mešcov po n mincí?

$\left[\text{a)}0,366,\ \text{b)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]$

3.4. Pre bezpečný dolet lietadla, ktoré je vo vzduchu je potrebné, aby aspoň polovica jeho motorov bola funkčných. Jednotlivé motory pracujú nezávisle od seba a pravdepodobnosť poruchy každého z nich je $1-p$. Pre aké hodnoty p sú spoľahlivejšie lietadlá so štyrmi motormi než lietadlá s dvomi motormi?

$\left[p \geq \frac{2}{3}\right]$

3.5. Odhadom bolo zistene, že v 16%-tách vozidiel MHD cestuje aspoň jeden čierny pasažier. Koľko vozidiel musí revízor skontrolovať, aby s pravdepodobnosťou aspoň 0,95 pristihol aspoň jedného čierneho pasažiera?

$[18]$

3.6. V krabici sa nachádza 50 tranzistorov, z toho je 10 kusov zlých. Na opravu spotrebiča náhodne vyberieme 10 tranzistorov. Aký je pravdepodobnosť že práve dva budú zlé?

$[0,3369]$

3.7. Dvadsaťkrát hádžeme tromi mincami. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň v jednom hode padnú na všetkých minciach hlavy?

$[0,931]$

3.8. Rozhodnite, ktorá udalosť je pravdepodobnejšia: Vyhrať s rovnocenným súperom tri partie zo štyroch alebo vyhrať s rovnocenným súperom päť partií z ôsmich?

[Tri zo štyroch]

3.9. Na dvojkoľajnom moste sa počas 24 hodín stretnú nanajvýš dva vlaky, a to s pravdepodobnosťou 0,2. Ak predpokladáme, že denné prevádzky sú nezávislé, určte pravdepodobnosť, že počas týždňa sa dva vlaky na moste stretnú:

a) práve trikrát,

b) nanajvýš trikrát,

c) aspoň trikrát.

[a)$0,1147$, b)$0,9667$, c)$0,148$]

3.10. Udalosť A nastane aspoň v jednom z piatich nezávislých opakovaní náhodného pokusu s pravdepodobnosťou 0,9. Aká je pravdepodobnosť nastatia udalosti A v jednom pokuse, ak je pre všetky pokusy rovnaká?

[$p = 0,369$]

3.11. Úloha Chevaliera de Méré

a) Hodíme n-krát za sebou hraciu kocku. Označme A udalosť, že šesťka padne aspoň raz. Aký je minimálny počet hodov, ktoré je potrebné vykonať, aby sme mohli s pravdepodobnosťou aspoň 0,5 očakávať, že udalosť A nastane?

b) Hodíme n-krát za sebou dve hracie kocky. Označme B udalosť, že súčet 12 padne aspoň raz. Aký je minimálny počet hodov, ktoré je potrebné vykonať, aby sme mohli s pravdepodobnosťou aspoň 0,5 očakávať, že udalosť B nastane?

[a)$n \geq 4$, b)$n \geq 25$]

3.12.* V osudí je m guľôčok, z ktorých sú niektoré biele a niektoré sú čierne. Presné zloženie osudia nie je známe. Vie sa len to, že bolo naplnené tak, že niekto hádzal mincou a ak padol znak, tak vložil bielu guľôčku a ak padla hlava, tak vložil čiernu guľôčku. Z osudia náhodne vyberieme jednu guľôčku.

a) Aká je pravdepodobnosť, že vybraná guľôčka bude biela?

b) Guľôčka vytiahnutá z osudia je biela. Aká je pravdepodobnosť, že osudie obsahuje len samé biele guľôčky?

c) Guľôčka vytiahnutá z osudia je biela. Aká je pravdepodobnosť, že všetky ostatné guľôčky v osudí sú čierne?

d) Úlohu vyriešte všeobecne. Teda, guľôčka vytiahnutá z osudia je biela. Aká je pravdepodobnosť, že v osudí je práve $k < m$ bielych guľôčok?

$$\left[\text{a)}\,\frac{1}{2},\ \text{b)}\,\frac{1}{2^{m-1}},\ \text{c)}\,\frac{1}{2^{m-1}},\ \text{d)}\,\frac{\binom{m-1}{k-1}}{2^{m-1}}\right]$$

3.13. Študent sa úplne nepripravený dostaví na skúšku, ktorej obsahom je test, pozostávajúci z desiatich otázok so štyrmi alternatívami odpovedí. Z ponúkaných odpovedí je vždy práve jedna odpoveď správna. Aby bola skúška úspešne splnená, je potrebné správn eodpovedať aspoń šesť otázok. Aká je pravdepodobnosť úspešného zloženia skúšky, ak študent odpovede vyberá náhodne?

[$0,0197$]

4 Náhodná premenná

4.1. Nech náhodná premenná X predstavuje počet padnutých hláv v sérii dvoch hodov mincou. Určte jej pravdepodobnostnú funkciu a distribučnú funkciu a načrtnite ich grafy.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline p(x) & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}, F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{4} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{3}{4} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases})\right]$$

4.2. Hádžeme hracou kockou tak dlho, až kým nepadne prvá šesťka. Nech náhodná premenná X reprezentuje počet vykonaných hodov. Určte jej pravdepodobnostnú funkciu.

$$\left[p(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{6},\ x = 1, 2, 3, \ldots\right]$$

4.3. Predpokladajme, že sa vykoná séria piatich hodov mincou. Sériou hláv budeme rozumieť neprerušenú postupnosť padnutia hlavy v po sebe idúcich hodoch. Tak napríklad vo výsledku (h, z, h, h, z, z) reprezentuje prvá hlava sériu hláv dĺžky jedna a tretí a štvrtý pokus sériu hláv dĺžky dva. Definujme náhodnú premennú X ako dĺžku najdlhšej série hláv v piatich hodoch mincou. Určte pravdepodobnostnú funkciu a distribučnú funkciu náhodnej premennej X.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline p(x) & \frac{1}{32} & \frac{12}{32} & \frac{11}{32} & \frac{5}{32} & \frac{2}{32} & \frac{1}{32} \end{array}\right]$$

4.4. Naorovo rozdelenie
Osudie obsahuje n guľôčok, pričom jedna z nich je červená a ostatné sú biele. Z osudia vytiahneme jednu guľôčku. Ak je biele, tak do osudia namiesto nej vrátime červenú guľôčku a pokus opakujeme, ak je vytiahnutá červená guľôčka, tak sa pokus končí. Nech náhodná premenná X označuje počet vykonaných ťahov. Určte pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej X.

$$\left[p(x) = \frac{(n-1)! \cdot x}{(n-x)! \cdot n^x},\ x = 1, 2, \ldots, n\right]$$

4.5. Predpokladajme, že doba čakania na obsluhu pri priehradke v banke, udávaná v minútach je popísaná náhodnou premennou X s funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{2x^4} & x \geq 1. \end{cases}$$

Určte:

a) Distribučnú funkciu náhodnej premennej X.

b) Podmienenú pravdepodobnosť $\mathbb{P}(X \geq 2 | X \geq 1)$.

$$\left[\text{a)} F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^3} & 1 < x. \end{cases},\ \text{b)} \frac{1}{8}\right]$$

4.6. Predpokladajme, že doba čakania na videnie padajúcej hviezdy počas letnej noci meraná v minútach sa riadi exponenciálnym rozdelením s hustotou pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} & x > 0. \end{cases}$$

Určte konštantu c a vypočítajte pravdepodobnosť, že budeme musieť čakať aspoň desať minút.

$$\left[c = \tfrac{1}{10}, \mathbb{P}\left(X \geq 10\right) = 0,368\right]$$

4.7. Náhodná premenná X má distribučnú unkciu tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ c \cdot x^2 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Určte:

a) konštantu c tak, aby $F(x)$ bola distribučnou funkciou,

b) hustotu pravdepodobnosti náhodnej premennej X,

c) pravdepodobnosť $\mathbb{P}\left(0,25 \leq X < 0,5\right)$.

$$\left[\text{a)}c = 1, \text{ b)}f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1. \end{cases}, \text{ c)}\tfrac{3}{16}\right]$$

4.8. Pre akú hodnotu c je funkcia

a)

$$p(x) = \begin{cases} c\left(\frac{1}{4}\right)^x & x = 1,2,3,4,5 \\ 0 & x \neq 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

b)

$$p(x) = \begin{cases} c\left(\frac{1}{4}\right)^x & x = 1,2,3,\dots \\ 0 & x \neq 1,2,3,\dots \end{cases}$$

pravdepodobnostnou funkciou? Určte $F(4)$ a $\mathbb{P}\left(1 < X \leq 3\right)$.

$$\left[\text{a)}c = \tfrac{80}{341},\ F(4) = \tfrac{63}{64},\ \mathbb{P}\left(1 < X \leq 3\right) = \tfrac{320}{341},\ \text{b)}c = 3,\ F(4) = \tfrac{61}{64},\ \mathbb{P}\left(1 < X \leq 3\right) = \tfrac{15}{64}\right]$$

4.9. Náhodná premenná má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x \notin \langle 0; 2). \end{cases}$$

Určte:

a) konštantu c tak, aby $f(x)$ bola hustotou pravdepodobnosti,

b) distribučnú funkciu $F(x)$,

c) pravdepodobnosť $\mathbb{P}(1 \leq X < 2)$,

d) $\mathbb{P}(X \geq 0,75)$.

$$\left[\text{a)} c = 1, \text{ b)} F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 < x \leq 2. \\ 1 & x > 2 \end{cases}, \text{ c)} \frac{1}{2}, \text{ d)} \frac{23}{32} \right]$$

4.10. Náhodná premenná X má pravdepodobnostnú funkciu

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{7} \cdot (0,7)^x & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Aká je pravdepodobnosť, že táto náhodná premenná nadobudne hodnotu

a) menšiu ako 3,

b) väčšiu ako 4,

c) väčšiu ako 1 ale menšiu než 4.

$$[\text{a)} 0,51, \text{ b)} 0,241, \text{ c)} 0,357]$$

4.11. Pre akú hodnotu c je

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

pravdepodobnostnou funkciou?

$$\left[c = \frac{1}{2}\right]$$

4.12. Náhodná premenná má pravdepodobnostnú funkiu $p(x) = \frac{x}{16}$ pre $x = 1, 3, 5, 7$. Určte

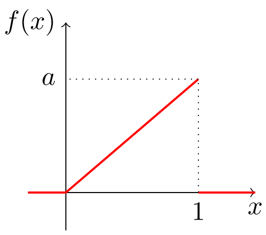
a) $\mathbb{P}(X = 1 \vee X = 3)$,

b) $\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{7}{2}\right)$,

c) $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3)$.

$$\left[\text{a)} \frac{1}{4}, \text{ b)} \frac{1}{4}, \text{ c)} \frac{1}{4}\right]$$

4.13. Náhodná premenná má rozdelenie s hustotou pravdepodobnosti zobrazenou na obrázku. Určte hustotu $f(x)$, distribučnú funkciu $F(x)$ a vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodná premenná X nadobudne hodnotu z intervalu $\langle \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \rangle$.



$$\left[\mathbb{P}\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\right]$$

4.14. Náhodná premenná X má distribučnú funkciu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -5 \\ \frac{x+5}{7} & -5 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

Určte:

a) hustotu pravdepodobnosti náhodnej premennej X,

b) $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$,

c) $\mathbb{P}(X = 2)$,

d) $\mathbb{P}(-6 < X < 1)$.

$$\left[\text{a)} f(X) = \begin{cases} \frac{1}{7} & x \in (-5; 2) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}, \text{ b)} \mathbb{P}(-2 < X < 2) = \tfrac{4}{7}, \text{ c)} \mathbb{P}(X = 2) = 0, \text{ b)} \mathbb{P}(-6 < X < 1) = \tfrac{6}{7} \right]$$

4.15. Náhodná premenná X má distribučnú funkciu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a + b \sin x & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Určte hodnoty a a b a funkciu hustoty.

$$\left[a = 0,\ b = 1,\ f(X) = \begin{cases} \cos x & x \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \right]$$

4.16. Dvaja hráči hrajú šach. Pravdepodobnosť výhry hráča A je 0,4 a pravdepodobnosť, výhry hráča B je 0,6 (remízy neuvažujeme). Hru opakujú dovtedy, kým hráč A nevyhrá. Určte pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej x, ktorá popisuje množstvo odohratých partií.

$$[p(x) = (0,6)^{x-1} \cdot 0,4]$$

4.17. Je známa distribučná funkcia denného počtu obsadených izieb v určitom penzióne. Pre jej hodnoty platí: $F(x) = 0,02,\ 7 < x \leq 8$, $F(x) = 0,05,\ 8 < x \leq 9$, $F(x) = 0,12,\ 9 < x \leq 10$ a $F(x) = 1,\ 10 < x$. Určte pravdepodobnosť, že v náhodne zvolený deň bude obsadených práve 7,8,9 a 10 izieb.

$$[\mathbb{P}(X = 7) = 0,02,\ \mathbb{P}(X = 8) = 0,03,\ \mathbb{P}(X = 9) = 0,07,\ \mathbb{P}(X = 10) = 0,88]$$

4.18. Výška škody v poistení automobilov je náhodná premenná s distribučnou funkciou

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{2\,000}{2\,000 + x}\right)^3 & x > 0. \end{cases}$$

Určte strednú výšku škody a rozptyl výšky poistného plnenia.

$$[\mathbb{E}(X) = 1\,000,\ \mathbb{D}(X) = 3\,000\,000]$$

4.19. Rozdelenie náhodnej premennej je dané pravdepodobnostnou funkciou

$$p(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \cdot 0,2^x \cdot 0,8^{3-x} & x = 0,1,2,3 \\ 0 & x \neq 0,1,2,3. \end{cases}$$

Určte začiatočné momenty $\nu_1(X)$,$\nu_2(X)$,$\nu_3(X)$ a $\nu_4(X)$.

$$[\nu_1(X) = 0,5,\ \nu_2(X) = 0,84,\ \nu_3(X) = 1,368,\ \nu_4(X) = 2,568]$$

4.20. Rozdelenie náhodnej premennej je dané funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2x - x^2) & x \in (0;2) \\ 0 & x \notin (0;2). \end{cases}$$

Určte začiatočné momenty $\nu_1(X)$,$\nu_2(X)$,$\nu_3(X)$ a $\nu_4(X)$.

$$\left[\nu_1(X) = 1,\ \nu_2(X) = 1,2,\ \nu_3(X) = 1,6,\ \nu_4(X) = \tfrac{16}{7}\right]$$

4.21. Rozdelenie náhodnej premennej je dané funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & x \geq 0. \end{cases}$$

Určte centrálne momenty $\mu_2(X)$,$\mu_3(X)$ a $\mu_4(X)$.

$$[\mu_2(X) = 1,\ \mu_3(X) = 2,\ \mu_4(X) = 9]$$

4.22. Náhodná premenná X má rovnomerné rozdelenie na intervale $(0;a)$, teda jej funkcia hustoty je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & x \in (0;a) \\ 0 & x \notin (0;a). \end{cases}$$

Určte:

a) $\mathbb{E}\,(2X + 3)$,

b) $\mathbb{E}\left(3X^2 - 2X + 1\right)$,

c) $\mathbb{D}\,(2X + 3)$,

d) $\mathbb{D}\left(X^2 + 1\right)$.

$$\left[\text{a)}\mathbb{E}\,(()\,2X + 3) = a + 3,\ \text{b)}\mathbb{E}\,(3X^2 - 2X + 1) = a^2 - a + 1,\ \text{c)}\mathbb{D}\,(2X + 3) = \tfrac{a^2}{3},\ \text{d)}\mathbb{D}\,(X^2 + 1) = \tfrac{4a^4}{45}\right]$$

4.23. Rozdelenie náhodnej premennej je dané pravdepodobnostnou funkciou

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{12} & x = 2,4,6 \\ 0 & x \neq 2,4,6. \end{cases}$$

Určte jej strednú hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku.

$$\left[\mathbb{E}\,(X) = \tfrac{14}{3},\ \mathbb{D}\,(X) = \tfrac{20}{9},\ \sigma(X) = \tfrac{2\sqrt{5}}{3}\right]$$

4.24. Rozdelenie náhodnej premennej je dané funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{3}{x^4} & x \geq 1. \end{cases}$$

Určte jej strednú hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku.

$$\left[\mathbb{E}\,(X) = \tfrac{3}{2},\ \mathbb{D}\,(X) = \tfrac{3}{4},\ \sigma(X) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

4.25. Firma dodáva na trh merací prístroj, ktorý sa skladá zo štyroch nezávislých blokov. Porucha ktoréhokoľvek bloku má za dôsledok nefunkčnosť celého prístroja. Pravdepodobnosť nefunkčnosti každého z blokov je 0,02. Výrobné náklady na prístroj predstavujú 40 €. Akú cenu si má firma stanoviť, ak sa chce zaručiť, že za každý chybný dodaný prístroj vráti jeho cenu a navyše 25% z ceny výrobku (bez nároku na jeho vrátenie) a chce dosiahnuť 30%-ný zisk?

$$[c = 97,67 \text{ €}]$$

4.26. V sérii výrobkov pripravených na expedíciu je 8% výrobkov s kazom na povrchovej úprave. Dlhodobým štatistickým pozorovaním bolo zistené, že pravdepodobnosť reklamácie výrobku s kazom na povrchovej úprave je 0,8. Uvažuje sa o dvoch variantoch predaja týchto výrobkov. Buď sa zákazníkovi poskytne 50% zľava v prípade reklamácie alebo sa pôvodná cena plošne zníži o 5% bez možnosti reklamácie. Predpokladaná cena výrobku je c. Ktorý z oboch variantov je pre spotrebiteľa výhodnejší?

[Druhý]

4.27. Podľa úmrtnostných tabuliek mužov SR za rok 2011 je pravdepodobnosť úmrtia muža vo veku 25 rokov v priebehu jedného roka rovná 0,000865. Poisťovňa ponúka mužom v tomto veku za poistné 10 € vyplatiť pozostalým v prípade jeho úmrtia počas jedného roka sume 3 000 €. Aký zisk môže poisťovňa očakávať, ak poistku uzavrie 1 000 mužov vo veku 25 rokov?

$$[\mathbb{E}\,(Y) = 7\,405 \text{ €}]$$

4.28. V reprografickom štúdiu majú 3 kopírovacie stroje. Prvý má pravdepodobnosť poruchy 0,01 a jeho nefunkčnosť spôsobí dennú stratu 600 €. Ďalšie dva s pravdepodobnosťou poruchy 0,002, pričom nefunkčnosť každého z nich spôsobí dennú stratu 1 100 €. Aká je stredná hodnota dennej straty spôsobenej nefunkčnosťou kopírovacích strojov.

$$[\mathbb{E}\,(X) = -10,4]$$

4.29. Náhodná premenná X má rozdelenie s funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x \cdot (1-x)^5 & x \in \langle 0;1 \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0;1 \rangle. \end{cases}$$

Určte jej koeficient asymetrie a špicatosti.

$$\left[\rho = \tfrac{12}{10\sqrt{3}} \approx 0,693,\ \varepsilon = \tfrac{171}{55} - 3 \approx 0,1091\right]$$

4.30. Výrobca klimatizačných zariadení zaručuje, že jeho zariadenie je schopné udržiavať priemernú teplotu 24°C so smerodajnou odchýlkou 0,3°C. Svoje výrobky chce predávať aj do krajín, kde sa teplota meria v stupňoch Fahrenheita. Aké hodnoty má na prospekte uviesť pre priemernú teplotu a smerodajnú odchýlku?

$$[\mathbb{E}\,(F) = 75,2,\ \mathbb{D}\,(F) = 0,2916,\ \sigma(F) = 0,54]$$

4.31. Výrobca topánok vie, že v priemere 0.4% jeho produkcie nie je bez kazu a smerodajná odchýlka počtu kazových párov je 0,3%. Rozhodol sa vrátiť peniaze za celú zásielku 500 párov, ak táto zásielka obsahuje viac ako α kazových párov. Akú hodnotu α má zvoliť, ak nechce vracať peniaze častejšie ako v 5% prípadov?

$$[\alpha \leq 11]$$

4.32. Rozdelenie náhodnej premennej X je dané funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x \cdot \mathrm{e}^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Určte jej modus.

$$[\mathrm{Mo} = 1]$$

4.33. Určte kvantilovú funkciu k rozdeleniu výšky škody v poistení automobilov danú v cvičení 4.18

$$\left[F^{-1}(p) = \frac{2\,000(1-\sqrt[3]{1-p})}{\sqrt[3]{1-p}}\right]$$

4.34. Hustota exponenciálneho rozdelenia je daná vzťahom

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Určte jej kvantilovú funkciu, určte medián, horný kvartil, horný decil a 95-ty percentil.

$$\left[F^{-1}(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda},\ \mathrm{Me} = \lambda^{-1}\ln 2,\ u_{\frac{3}{4}} = -1\ln 4,\ u_{\frac{9}{10}} = -1\ln 10,\ u_{\frac{95}{100}} = -1\ln 20\right]$$

4.35. Náhodná premenná X je daná funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)(2-x) & x \in \langle 1; 2\rangle \\ 0 & x \notin \langle 1; 2\rangle \end{cases}$$

Určte koeficient a, strednú hodnotu $\mathbb{E}\,(X)$, rozptyl DX, módus a medián.

$$\left[a = 6,\ \mathbb{E}(X) = \tfrac{3}{2},\ \mathbb{D}(X) = \tfrac{1}{20},\ \mathrm{Mo} = \tfrac{3}{2},\ \mathrm{Me} = \tfrac{3}{2}\right]$$

4.36. Náhodná premenná X je daná distribučnou funkciou

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{a}\frac{(x-2)^3}{3} & x \in \langle 2; 5\rangle \\ 1 & x > 5. \end{cases}$$

Určte koeficient a, strednú hodnotu $\mathbb{E}\,(X)$, módus Mo, rozptyl $\mathbb{D}\,(X)$ a $\mathbb{P}\,(X > \mathrm{Mo})$.

$$\left[a = 9,\ \mathbb{E}\,(X) = \tfrac{17}{4},\ \mathbb{D}\,(X) = \tfrac{27}{80} = 0,375,\ \mathrm{Mo} = 5, \mathbb{P}\,(X > \mathrm{Mo}) = 0.\right]$$

5 Vytvárajúce funkcie

5.1. Nech náhodná premenná X má diskrétne rovnomerné rozdelenie na množine $\{1, 2, \ldots, n\}$, tj. pre jej pravdepodobnostnú funkciu platí

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & x \neq 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Určte jej pravdepodobnostnú vytvárajúcu funkciu.

$$\left[G(z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{z(z^n - 1)}{z - 1}\right]$$

5.2. Nech náhodná premenná X má Poissonovo rozdelenie s parametrom λ, tj. pre jej pravdepodobnostnú funkciu platí

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & x \neq 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Určte jej pravdepodobnostnú vytvárajúcu funkciu a charakteristickú funkciu. S pomocou vytvárajúcej funkcie pravdepodobnosti určte jej strednú hodnotu a rozptyl.

$$\left[G(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)},\ \chi(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{i\,t}-1)},\ \mathbb{E}\,(X) = \lambda,\ \mathbb{D}\,(X) = \lambda\right]$$

$\boxed{\textbf{5.3.}}$ Pravdepodobnostná vytvárajúca funkcia binomického rozdelenia má tvar $G(z) = (pz + q)^n$, kde n je počet opakovaní a p pravdepodobnosť úspechu v každom pokuse, $p + q = 1$. Ak opakovania zovšeobecníme tak, že pravdepodobnosť úspechu bude v každom pokuse iná a rovná p_i, $p_i + q_i = 1$, tak pre vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti počtu úspechov môžeme písať $G(z) = \prod_{i=1}^{n}(p_i z + q_i)$. Využite tento poznatok na riešenie nasledujúcej úlohy.
Na terč sme vystrelili zo štyroch vzdialeností 4 nezávislé strely. Pravdepodobnosť zásahu sa pre jednotlivé vzdialenosti rovná postupne 0,9; 0,85; 0,8 a 0,75. Aká je pravdepodobnosť že v terči budú:

a) práve dva zásahy,

b) aspoň dva zásahy.

5.4. Náhodná premenná X má binomické rozdelenie s parametrami n a p, teda jej pravdepodobnostná funkcia má tvar

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & x \neq 0, 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

kde $p + q = 1$. Určte jej momentovú vytvárajúcu funkciu a s jej pomocou aj strednú hodnotu a rozptyl rozdelenia.

$$[M_X(t) = (p\mathrm{e}^t + q)^n,\ \mathbb{E}\,(X) = np,\ \mathbb{D}\,(X) = npq]$$

5.5. Náhodná premenná X má geometrické rozdelenie s parametrom p, teda jej pravdepodobnostná funkcia má tvar

$$p(x) = \begin{cases} pq^x & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & x \neq 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

kde $p + q = 1$. Určte jej pravdepodobnostnú vytvárajúcu funkciu, charakteristickú funkciu, momentovú vytvárajúcu funkciu a s jej pomocou aj strednú hodnotu a rozptyl rozdelenia.

$$\left[G(z) = \frac{p}{1 - qz},\ M_X(t) = \frac{p}{1 - q\mathrm{e}^t},\ \chi_X(t) = \frac{p}{1 - q\mathrm{e}^{i\,t}},\ \mathbb{E}\,(X) = \frac{1}{p},\ \mathbb{D}\,(x) = \frac{q}{p^2}\right]$$

5.6. Náhodná premenná X má rovnomerné rozdelenie na intervale $(a;b)$, teda jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a;b) \\ 0 & x \notin (a;b). \end{cases}$$

Určte jej momentovú vytvárajúcu funkciu a s jej pomocou vyjadrite strednú hodnotu a rozptyl rozdelenia.

$$\left[M_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{(b-a)t},\ \mathbb{E}\left(X\right) = \frac{a+b}{2},\ \mathbb{D}\left(X\right) = \frac{(b-a)^2}{12}\right]$$

5.7. Náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ, teda jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Určte jej momentovú vytvárajúcu funkciu a s jej pomocou vyjadrite strednú hodnotu a rozptyl rozdelenia.

$$\left[M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t},\ \mathbb{E}\left(X\right) = \frac{1}{\lambda},\ \mathbb{D}\left(X\right) = \frac{1}{\lambda^2}\right]$$

$\boxed{\textbf{5.8.}}$ Nech je n kladné, a nech náhodné premenné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú nezávislé. Nech ďalej náhodné premenné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ majú momentové vytvárajúce funkcie $M_{X_1}(t)$,$M_{X_2}(t)$,...,$M_{X_n}(t)$. Označme Y náhodnú premennú, ktorá je súčtom $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Odvoďte momentovú vytvárajúcu funkciu $M_Y(t)$ náhodnej premennej Y.

5.9. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné, každá s binomickým rozdelením, $X \sim \mathrm{Bi}(n_1, p)$ a $Y \sim \mathrm{Bi}(n_2, p)$. Určte, aké rozdelenie má náhodná premenná $Z = X + Y$.

$$\left[Z \sim \mathrm{Bin}\left(n_1 + n_2, p\right)\right]$$

$\boxed{\textbf{5.10.}}$ Náhodná premenná x má momentovú vytvárajúcu funkciu $M_X(t)$. Nech $Y = aX + b$. Odvoďte, čomu sa rovná momentová vytvárajúca funkcia $M_Y(t)$ náhodnej premennej Y.

5.11. Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej premennej X má tvar $M_X(t) = \frac{1}{1-t}$. Určte momentovú vytvárajúcu funkciu náhodnej premennej $Y = 3X$ a pomocou nej určte $\mathbb{E}\left(Y\right)$ a $\mathbb{D}\left(Y\right)$.

$$\left[M_Y(t) = \frac{1}{1-3t},\ \mathbb{E}\left(Y\right) = 3,\ \mathbb{D}\left(Y\right) = 9\right]$$

5.12. Pomocou momentových vytvárajúcich funkcií dokážte, že súčet nezávislých náhodných premenných s rozdelením Γ s rovnakým parametrom θ má opäť Γ rozdelenie. O náhodnej premennej X hovoríme, že má rozdelenie Γ s parametrami a a θ, ak pre jej hustotu platí:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(a)\cdot\theta^a} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\Gamma(a)$ je tzv. gama funkcia definovaná vzťahom $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$[]$$

$\boxed{\textbf{5.13.*}}$ Nech sú dané náhodné premenné $X_1, X_2, \ldots, X_N$, nech tieto náhodné premenné sú navzájom nezávislé a identicky rozdelené. Nech je ďalej N diskrétna náhodná premenná s kladnými celočíselnými hodnotami a je nezávislá od náhodných premenných $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Nech $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$. Určte momentovú vytvárajúcu funkciu príp. vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti náhodnej premennej Y.
Upozornenie: V tomto prípade nie je známy presný počet sčítancov vo vyjadrení náhodnej premennej Y. Tento počet je náhodný a je známe len rozdelenie tohto počtu. Takýto typ náhodných premenných sa nazýva *zložené náhodné premenné*, resp. ich rozdelenia sa označujú ako *zložené rozdelenia* a hrajú významnú úlohu napr. pri modelovaní rizík poistného portfólia. Náhodnú premennú N v takom prípade označujeme ako *sčítaciu náhodnú premennú*.

6 Systém náhodných premenných

6.1. Strieľajú sa dva výstrely na určitý cieľ. Pravdeopodobnosť zásahu je pri každom výstrele rovná 0,6. Vyšetrujú sa dve náhodné premenné: X, ktorá udáva počet zásahov cieľa a Y, ktorá udáva počet striel, ktoré minuli cieľ. Zostavte pravdepodobnostnú tabuľku systému (X, Y).

$[]$

6.2. Určte, pre aké konštanty a a b môžeme považovať funkciu

$$F(x, y) = (1 - \mathrm{e}^{-ax})(1 - \mathrm{e}^{-by}), \quad x > 0, y > 0,$$

za distribučnú funkciu systému náhodných premenných (X, Y).

$[a, b > 0]$

6.3. Distribučná funkcia systému (X, Y) je tvaru

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-x})(1 - \mathrm{e}^{-y}) & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte pravdepodobnosť, že hodnota náhodného vektora (X, Y) padne do obdĺžnika s vrcholmi $(1, 1)$,$(2, 1)$,$(2, 3)$ a $(1, 3)$

$[0, 074]$

6.4. Systém náhodných premenných má združenú funkciu hustoty tvaru

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x + y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

kde D je štvorec ohraničený priamkami $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ a $y = 3$. Určte

a) koeficient a tak, aby $f(x, y)$ bola funkciou hustoty,

b) pravdepodobnosť, že náhodný vektor (X, Y) padne do štvorca S ohraničeného priamkami $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$ a $y = 2$,

c) marginálne hustoty náhodných premenných X a Y.

$\left[\text{a)}a = \frac{1}{27},\ \text{b)}\mathbb{P}\left((X, Y) \in S\right) = \frac{1}{9},\ \text{c)}f_X(x) = \frac{x}{9} + \frac{1}{6},\ x \in \langle 0; 3\rangle,\ f_Y(y) = \frac{y}{9} + \frac{1}{6},\ y \in \langle 0; 3\rangle\right]$

6.5. Nech D je trojuholníková oblasť v $\mathbb{R}^2$, $D = \{(x, y) : 0 < x, 0 < y, x + y < 1\}$ a systém náhodných premenných (X, Y) nech má združenú hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy^2 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Určte:

a) konštantu C tak, aby aby $f(x, y)$ bola funkciou hustoty,

b) pravdepodobnosť $\mathbb{P}\left(X < Y\right)$.

$\left[\text{a)}c = 60,\ \text{b)}\mathbb{P}\left(X < Y\right) = \frac{11}{16}\right]$

6.6. Náhodný vektor (X, Y) má združenú hustotu danú vzťahom

$$f(x,y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x(1+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte marginálne hustoty rozdelenia a rozhodnite, či náhodné premenné X a Y sú nezávislé.

$$\left[f_X(x) = \mathrm{e}^{-x},\ x > 0,\ f_Y(y) = \tfrac{1}{(1+y)^2},\ y > 0, \text{nie sú nezávislé}\right]$$

6.7. Systém náhodných premenných (X, Y) má združenú pravdepodobnostnú funkciu tvaru

$$p(x,y) = \frac{\lambda^x \mu^y}{x!y!}\mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)} \quad x, y = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde $\lambda > 0, \mu > 0$. Určte marginálne rozdelenia náhodných premenných X a Y a rozhodnite, či sú tieto náhodné premenné nezávislé.

$$\left[p_X(x) = \tfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ x = 0, 1, \ldots,\ p_Y(y) = \tfrac{\mu^y}{y!}\mathrm{e}^{-\mu},\ X, Y \text{ sú nezávislé}\right]$$

6.8. Spojitý náhodný vektor (X, Y) má združenú hustotu tavru

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Určte:

a) obe marginálne hustoty,

b) združenú distribučnú funkciu,

c) obe marginálne distribučné funkcie.

$$\left[\begin{array}{r} \text{a)} f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\ f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)},\ \text{b)} F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{c)} F_X(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right),\ F_Y(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right]$$

6.9. Združená hustota náhodných premenných (X, Y) má tvar

$$f(x,y) = k(x^2 + y^2), \quad x \in (0;1), y \in (0;1).$$

Určte:

a) konštantu k,

b) obe marginálne hustoty,

c) $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{Y}{3}\right)$.

$$\left[\text{a)} k = \tfrac{3}{2},\ \text{b)} f_X(x) = \tfrac{3}{2}\left(x^2 + \tfrac{1}{3}\right), x \in (0;1),\ f_Y(y) = \tfrac{3}{2}\left(y^2 + \tfrac{1}{3}\right), y \in (0;1),\ \text{c)} \mathbb{P}\left(X \geq \tfrac{Y}{3}\right) = \tfrac{47}{54}\right]$$

6.10. Združená hustota náhodných premenných (X, Y) má tvar

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x+y)}, \quad x, y > 0.$$

Určte $\mathbb{P}(X > Y > 2)$.

$$\left[\mathbb{P}(X > Y > 2) = \tfrac{\mathrm{e}^{-4}}{2}\right]$$

6.11. Združená hustota náhodných premenných (X, Y) má tvar

$$f(x, y) = 8xy, \quad 0 < y \leq x < 1.$$

Určte marginálne hustoty.

$$[f_X(x) = 4x^3, x \in (0;1),\ f_Y(y) = 4y(y^2 - 1), y \in (0;1)]$$

$\boxed{\textbf{6.12.}}$ Sú dané dve združené hustoty pre náhodný vektor (X, Y):

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy) & x \in (-1;1),\ y \in (-1;1) \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

a

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x \in (-1;1),\ y \in (-1;1) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte marginálne hustoty pre obidva prípady združenej hustoty a výsledky porovnajte.
Poznámka: Z porovnania výsledkov vyplýva poznatok, že združená hustota **nie je** marginálnymi hustotami určená jednoznačne.

6.13. Združená distribučná funkcia náhodného vektora (X, Y) má tvar:

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-x})(1 - (1 + 2y)\mathrm{e}^{-2y}) & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte jej združenú hustotu.

$$[f(x, y) = 4y\mathrm{e}^{-x-2y},\ x > 0, y > 0]$$

6.14. Združená hustota náhodného vektora (x, Y) je tvaru

$$f(x, y) = \begin{cases} y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y} & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte $\mathbb{P}(Y > X)$.

$$\left[\mathbb{P}(Y > X) = \tfrac{3}{4}\right]$$

6.15.* Združená hustota náhodného vektora (X, N) je daná vzťahom:

$$f(x, n) = \frac{x^n \mathrm{e}^{-2x}}{n!}, \quad x > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Určte marginálne rozdelenia a pravdepodobnosti $\mathbb{P}(N < 2)$ a $\mathbb{P}(X > 4)$.

$$\left[p_N(n) = \int_0^\infty \tfrac{x^n \mathrm{e}^{-2x}}{n!}\,\mathrm{d}x\, n = 0, 1, 2, \ldots,\ f_X(x) = \mathrm{e}^{-x},\ \mathbb{P}(X < 4) = \mathrm{e}^{-4}\right]$$

7 Podmienené rozdelenia pravdepodobnosti

7.1. Náhodný vektor (X, Y) má združenú funkciu hustoty tvaru

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2(y+x)^2 & 0 \le x < 1,\, 0 \le y < 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte konštantu c, podmienené hustoty.

$$\left[c = \tfrac{180}{101},\, f(x|y) = \tfrac{30x^2(y+x)^2}{10y^2+15y+6},\, f(y|x) = \tfrac{3(y+x)^2}{1+3x+3x^2}\right]$$

7.2. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné, $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$. Nech náhodná premenná $Z = X + Y$. Aké rozdelenie má podmienená náhodná premenná $W = X|Z$?

$$\left[W \sim \text{Bin}\left(z, \tfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)\right]$$

7.3. Podmienená hustota je tvaru

$$f(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2-1} & 1 \le x \le y,\, 1 \le y < 2, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

a marginálna hustota náhodnej premennej Y je

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{9}y(y^2-1) & 1 \le y < 2, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

určte marginálnu hustotu $f_X(x)$ náhodnej premennej X.

$$\left[f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{9}x(4-x^2) & 1 \le x < 2, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}\right]$$

7.4. Nech $a < b < c < d$, a nech náhodná premenná X má rovnomerné rozdelenie $\text{Ro}\,(a, d)$. Nech $A = \{\omega; b < X(\omega) < c\}$. Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej $Y = X|A$.

$$\left[F_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-b}{b-c} & b < y < c \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}\right]$$

$\boxed{\textbf{7.5.}}$ Nech náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie $X \sim \text{E}\,(\lambda)$. Určte $\mathbb{P}\,(X > s + t|X > s)$.
Poznámka: Výsledok ukazuje, že táto $\mathbb{P}\,(X > s + t|X > s)$ je závislá len od hodnoty t a je nezávislá od s. To znamená, že v prípade, kedy je doba čakania na výskyt sledovanej udalosti rozdelená exponenciálne, je táto doba čakania nezávislá od už uplynutého „odčakaného“ času. Niekedy sa hovorí, že *exponenciálne rozdelenie nemá pamäť*.

7.6. Nech náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou rovnou 1. Ak pozorujeme ako realizáciu náhodnej premennej X hodnotu x, následne vygenerujeme náhodnú premennú Y, ktorá má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a rozptylom $x + 1$. Určte združenú hustotu náhodného vektora (X, Y).

$$\left[f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(x+1)}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2x^2+2x+y^2}{2(x+1)}},\; x \ge 0, y \in \mathbb{R}.\right]$$

7.7.* Na rastline sa urodí N semienok, pričom $N \sim \text{Bin}(n, p)$. Každé semienko vyklíči s pravdepodobnosťou γ a to nezávisle od klíčivosti ostatných semienok. Nech S označuje počet zárodkov nových rastliniek. Určte:

a) podmienenú pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej $S|N$,

b) združenú pravdepodobnostnú funkciu náhodného vektora (S, N),

c) pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej S,

d) podmienenú pravdepodobnostnú funkciu náhodnej premennej $N|S$.

$$\left[\begin{array}{r} \text{a)} S|N \sim \text{Bin}(i, \gamma)\,,\ \text{b)}\mathbb{P}(N = i, S = j) = \binom{i}{j}\binom{n}{i}\gamma^j(1-\gamma^{i-j})p^i(1-p^{n-i}), \\ \text{c)} S \sim \text{Bin}(n, \gamma p)\,,\ \text{d)} N|S \sim \text{Bin}\left(n-j, \frac{p-\gamma p}{1-\gamma p}\right) \end{array}\right]$$

7.8. Nech náhodná premenná T má geometrické rozdelenie s parametrom p a nech τ je nezáporné celé číslo. Určte podmienené rozdelenie náhodnej premennej $T - \tau$ za podmienky $T \geq \tau$.

$$[T - \tau \sim \text{Ge}(p)\,.]$$

7.9. Nech náhodná premennáé X_1, X_2 a X_3 majú trinomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami n, p_1, p_2, p_3 t.j.

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} \cdot p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}.$$

Nech ξ_1 je nezáporné celé číslo, $\xi_1 < n$. Určte podmienené rozdelenie náhodnej premennej X_2 za podmienky $X_1 = \xi_1$.

$$\left[Z \sim \text{Bin}\left(n - \xi_1, \frac{p_2}{1-p_1}\right)\right]$$

7.10. Nech X_1 a X_2 sú nezávislé náhodné premenné, každá s binomickým rozdelením, $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p)$ a $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p)$. Potom náhodná premenná $Y = X_1 + X_2$ má binomické rozdelenie $\text{Bin}(n_1 + n_2, p)$ (pozri cvičenie 5.9). Určte podmienené rozdelenie $X_1|Y$.

$$[X_1|Y \sim \text{Hg}(n_1, n_2, p)]$$

7.11. Nech náhodný vektor (X, Y) má združenú funkciu hustoty tvaru:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-x(1+y)} & x, y > 0 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte

a) podmienenú hustotu $X|Y$,

b) podmienenú hustotu $Y|X$,

c) stredné hodnoty a rozptyl podmienených náhodných premenných.

$$\left[\begin{array}{r} \text{a)} f_{X|Y}(x|y) = \frac{x^3(1+y)^4}{6}\mathrm{e}^{-x(1+y)}\ x > 0\ \text{b)} f_{Y|X}(y|x) = x\mathrm{e}^{-xy}\ y > 0 \\ \text{c)}\mathbb{E}(X|Y) = \frac{4}{1+y},\ \mathbb{D}(X|Y) = \frac{4}{(1+y)^2},\ \mathbb{E}(Y|X) = \frac{1}{x},\ \mathbb{D}(X|Y) = \frac{1}{x^2} \end{array}\right]$$

7.12. Nech náhodný vektor (X, Y) má združenú funkciu hustoty tvaru:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy - 2x - 2y + 2 & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte

a) rozdelenie náhodnej premennej X,

b) podmienenú hustotu $Y|X$,

c) strednú hodnotu a rozptyl podmienenej náhodnej premennej.

$\big[$a)$X \sim \text{Ro}\,(0,1)$ b)$f_{Y|X}(y|x) = f(x,y),\ 0 < y < 1$ c)$\mathbb{E}\,(Y|X) = \frac{1}{3}(1+x)\big]$

8 Funkcie náhodných premenných

8.1. Nech náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie $X \sim E(1)$. Určte distribučnú funkciu a funkciu hustoty náhodnej premennej $Y = \alpha X$.

$$\left[F_Y(y) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{y}{\alpha}}, f_y(y) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\alpha}}\right]$$

8.2. Nech X je spojitá náhodná premenná s hustotou $f_X(x)$ a distribučnou funkciou $F_X(x)$. Nech $Y = \alpha X$. Určte distribučnú funkciu a funkciu hustoty náhodnej premennej Y.

$$\left[F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right), f_Y(y) = \frac{1}{\alpha} f_X\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right]$$

8.3. Nech X je náhodná premenná a jej distribučná funkcia nech je $F_X(x)$ resp. jej hustota je $f_X(x)$. Položme $Y = X^{\frac{1}{\tau}}$. Určte distribučnú funkciu a hustotu náhodnej premennej Y.

$$\begin{bmatrix} \tau > 0 & f_Y(y) = \tau f_X(y^\tau) \cdot y^{\tau-1} & F_Y(y) = F_X(y^\tau) \\ \tau < 0 & f_Y(y) = -\tau f_X(y^\tau) \cdot y^{\tau-1} & F_Y(y) = 1 - F_X(y^\tau) \end{bmatrix}$$

8.4. Nech náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie $X \sim \mathrm{E}(1)$. Určte rozdelenie náhodnej premennej $Y = X^\tau$.

$$\begin{bmatrix} \tau = -1 & F_Y(y) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{inverzné exponenciálne rozdelenie} \\ \tau > 0 & F_Y(y) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda y)^\tau} & \text{Weibullovo rozdelenie} \\ \tau < 0 & F_Y(y) = \mathrm{e}^{-(\lambda y)^\tau} & \text{inverzné Weibullovo rozdelenie} \end{bmatrix}$$

8.5. Nech X je náhodná premenná a jej distribučná funkcia nech je $F_X(x)$ resp. jej hustota je $f_X(x)$. Položme $Y = \mathrm{e}^X$. Určte distribučnú funkciu a hustotu náhodnej premennej Y.

$$\left[f_Y(y) = \frac{f_X(\ln y)}{y}, F_Y(y) = F_X(\ln y)\right]$$

8.6. Nech náhodná premenná X má normálne rozdelenie $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Položme $Y = \mathrm{e}^X$. Určte rozdelenie náhodnej premennej Y.

$$\left[f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ logaritmicko-normálne rozdelenie}\right]$$

8.7. Nech náhodná premenná X má gama rozdelenie $X \sim \Gamma(a, \delta)$. Položme $Y = \mathrm{e}^X$. Určte rozdelenie náhodnej premennej Y.

$$\left[f_Y(y) = \frac{\delta^a}{\Gamma(a)}(\ln y)^{a-1} y^{-\delta-1},\ y > 1, \text{ logaritmické gama rozdelenie}\right]$$

8.8. Nech náhodné premenné X a Y sú nezávislé a majú obe exponenciálne rozdelenie $\mathrm{E}(\lambda)$. Určte rozdelenie náhodnej premennej $Z = X + Y$.

$$\left[f_Z(z) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda z} z,\ Z \sim \Gamma(2, \lambda)\right]$$

8.9. Nech náhodné premenné X a Y sú nezávislé a majú gama rozdelenie $X \sim \Gamma(a, \delta)$ a $Y \sim \Gamma(b, \delta)$. Určte rozdelenie náhodnej premennej $Z = X + Y$.

$$\left[f_Z(z) = \frac{\delta^{a+b}}{\Gamma(a+b)} \cdot \mathrm{e}^{-\delta z} \cdot z^{a+b-1},\ Z \sim \Gamma(a + b, \delta)\right]$$

8.10. Nech náhodné premenné X a Y sú nezávislé a hustota náhodnej premennej X je $f(x)$ a hustota náhodnej premennej Y je $g(y)$. Určte

a) hustotu a distribučnú funkciu náhodnej premennej $Z = XY$,

b) hustotu a distribučnú funkciu náhodnej premennej $U = \frac{X}{Y}$.

$$\left[\text{a)} \begin{array}{rcl} H(z) & = & \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{z}{y}\right) g(y)\,\mathrm{d}y \\ h(z) & = & \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z}{y}\right) \frac{1}{|y|} g(y)\,\mathrm{d}y \end{array} \quad \text{b)} \begin{array}{rcl} H(u) & = & \int_{-\infty}^{\infty} F(zy) g(y)\,\mathrm{d}y \\ h(u) & = & \int_{-\infty}^{\infty} f(zy)|y| g(y)\,\mathrm{d}y \end{array} \right]$$

8.11. Janko Rýchly chodí autom zo Žiliny do Bratislavy, čo predstavuje vzdialenosť 200 km. Jeho priemerná rýchlosť je rovnomerne rozdelená medzi 120 a 150 km za hodinu. Určte hustotu rozdelenia doby trvania jeho cesty.

$$\left[f_Y(y) = \begin{cases} \frac{20}{3y^2} & \frac{4}{3} < y < \frac{5}{3} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \right]$$

8.12. Nech X a Y sú náhodné premenné s hustotami $f_X(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $x > 0$ a $f_Y(y) = \frac{1}{\pi}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, $|y| < 1$. Určte rozdelenie náhodnej premennej $Z = XY$.

$$[Z \sim \mathrm{N}(0,1)]$$

8.13. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné s geometrickým rozdelením, $X \sim \mathrm{Ge}(p_1)$, $Y \sim \mathrm{Ge}(p_2)$. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej $Z = \min\{X, Y\}$

$$[Z \sim \mathrm{Ge}(p_1 p_2)]$$

8.14. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné a pre ich združenú pravdepodobnostnú funkciu platí

$$p(x,y) = \frac{\lambda^x \cdot \mu^y}{x!y!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots$$

Určte rozdelenie náhodnej premennej $Z = X + Y$.

$$[Z \sim \mathrm{Po}(\lambda + \mu)]$$

8.15. Dopyt po komodite
Na párty bolo pozvaných 40 osôb, pričom množstvo vína, ktoré každý hosť skonzumuje sa riadi exponenciálnym rozdelením s parametrom $\lambda = 8$ (v decilitroch). Aká je pravdepodobnosť, že dopyt po víne prevýši ponuku, ak sú pripravené dva demižóny, každý s objemom 20 l?

$$[p \approx 0,065]$$

8.16. Náhodná premenná X má Cauchyho rozdelenie s funkciou hustoty

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Definujeme náhodnú premennú $Y = \frac{a}{1+X^2}$. Určte funkciu hustoty náhodnej premennej Y.

$$\left[f(y) = \frac{2}{\sqrt{y(a-y)}}, y \in \langle 0; a \rangle. \right]$$

8.17. Náhodné premenné X a Y sú nezávislé a definujeme náhodnú premennú $V = \max\{X, Y\}$. Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej V a strednú hodnotu $\mathbb{E}(V)$, ak $X, Y \sim \mathrm{E}(1)$.

$$\left[F_V(v) = 1 - 2\mathrm{e}^{-v} + \mathrm{e}^{-2v},\ f_V(v) = 2\mathrm{e}^{-v} - 2\mathrm{e}^{-2v},\ \mathbb{E}(V) = \tfrac{3}{2}\right]$$

8.18. Zákazník nakupuje v dvoch nezávislých oddeleniach obchodného domu, v každom z nich má doba obsluhy exponenciálne rozdelenie $\mathrm{E}(1)$. Určte pravdepodobnosť, že celková doba čakania nepresiahne 1,5 časovej jednotky.

$$[\mathbb{P}(X < 1,5) \approx 0,4422]$$

8.19. Náhodná premenná X má Rayleighovo rozdelenie s funkciou hustoty v tvare

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Určte distribučnú funkciu a hustotu náhodnej premennej $Y = \mathrm{e}^X$.

$$\left[F(y) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 y}{2a^2}},\ f(y) = \frac{\ln y\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 y}{2a^2}}}{a^2 y},\ y > 1\right]$$

8.20. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné a položme $U = \min\{X, Y\}$. Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej U. Aké rodelenie má náhodná premenná U, ak X a Y majú exponenciálne rozdelenie $\mathrm{E}(1)$?

$$[U \sim \mathrm{E}(2)]$$

8.21. Nech $X \sim \mathrm{Ro}(0, 1)$ a položme $Y = -\ln X$. Určte rozdelenie náhodnej premennej Y

$$[Y \sim \mathrm{E}(1)]$$

9 Charakteristiky systémov náhodných premenných

9.1. Náhodný vektor (X, Y) má združenú hustotu tvaru

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & \text{ak } 0 < x < y \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte:

a) marginálnu hustotu náhodnej premennej Y,

b) podmienenú hustotu $f_{X|Y}(x)$,

c) podmienenú strednú hodnotu $\mathbb{E}\,(X|Y = y)$ a s jej pomocou určte $\mathbb{E}\,(X)$.

$$\left[\text{a)} f_Y(y) = y\mathrm{e}^{-y},\ 0 < y,\ \text{b)} f_{X|Y}(x) = \tfrac{1}{y},\ 0 < x < y,\ \text{c)} \mathbb{E}\,(X|Y = y) = \tfrac{y}{2},\ \mathbb{E}\,(X) = 1\right]$$

9.2. Náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na trojuholníkovej oblasti

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{ak } x, y \geq 0,\ x + y \leq 1 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte stredné hodnoty a rozptyly jednotlivých náhodných premenných X a Y a kovarianciu X a Y.

$$\left[\mathbb{E}\,(X) = \tfrac{1}{3},\ \mathbb{E}\,(Y) = \tfrac{1}{3},\ \mathbb{D}\,(X) = \tfrac{1}{18},\ \mathbb{D}\,(Y) = \tfrac{1}{18},\ \operatorname{cov}(X, Y) = -\tfrac{1}{36}\right]$$

9.3. Nech náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na jednotkovom kruhu, t.j. jeho hustota je tvaru

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{ak } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte podmienenú strednú hodnotu $\mathbb{E}_Y(X)$ a podmienený rozptyl $\mathbb{D}_Y(X)$.

$$\left[\mathbb{E}_Y(X) = 0,\ \mathbb{D}_Y(X) = \tfrac{1-y^2}{3}\right]$$

9.4. Nech náhodný vektor (X, Y) má hustotu tvaru

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{ak } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte podmienenú strednú hodnotu $\mathbb{E}_Y(X)$ a podmienený rozptyl $\mathbb{D}_Y(X)$.

$$\left[\mathbb{E}_Y(X) = \tfrac{2+3y}{3+6y},\ \mathbb{D}_Y(X) = \tfrac{1+6y+6y^2}{18(1+2y)^2}\right]$$

9.5. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné obe s exponenciálnym rozdelením $\mathrm{E}\,(1)$. Určte

a) podmienené rozdelenie náhodnej premennej X za podmienky $X + Y = t$,

b) podmienenú strednú hodnotu $\mathbb{E}\,(X|X + Y)$,

c) podmienený rozptyl $\mathbb{D}\,(X|X + Y)$.

$$\left[\text{a)} f_{X|T}(x|t) = \tfrac{1}{t},\ \text{b)} \mathbb{E}\,(X|X + Y) = \tfrac{t}{2},\ \text{c)} \mathbb{D}\,(X|X + Y) = \tfrac{t^2}{12}\right]$$

9.6. Nech U, V a W sú nezávislé náhodné premenné každá s rovnomerným rozdelením Ro $(0, 1)$. Nech ďalej $X = \max\{U, V, W\}$ a $Y = \min\{U, V, W\}$. Určte podmienenú hustotu a podmienenú strednú hodnotu náhodnej premennej ň X pri podmienke $Y = y$.

$$\left[f(x|y) = \frac{2(x-y)}{(1-y)^2}, \mathbb{E}\,(X|Y) = \frac{y+2}{3}\right]$$

9.7. Počítačový program je niekoľkokrát opravovaný, pričom po každej oprave existuje pravdepodobnosť p, že program nebude pracovať správne, a to nezávisle od predchádzajúcich úprav. Aká je stredná hodnota a rozptyl počtu opráv, potrebných per správny chod programu?

$$\left[\mathbb{E}\,(X) = \frac{1}{p},\ \mathbb{D}\,(X) = \frac{1-p}{p^2}\right]$$

9.8. Predpokladajme, že $2m$ jedincov uzavrie m manželstiev v rovnaký deň. Zaujíma nás počet tých manželstiev, ktoré pretrvajú po určitý dátum v budúcnosti. Predpokladajme pri tom, že každý jedinec je v tento deň nažive s pravdepodobnosťou p, nezávisle od ostatných. nech A je počet jedincov, ktorí sú nažive a S je počet tých manželstiev, v ktorých sú obidvaja partneri nažive. Určte $\mathbb{E}\,(S|A)$.

$$\left[\mathbb{E}\,(S|A = a) = \frac{a(a-1)}{2m(2m-1)}\right]$$

$\boxed{\textbf{9.9.}}$ Nech $X_1, \ldots, X_N$ sú nezávislé náhodné premenné s konečnými strednými hodnotami $\mathbb{E}\,(X_i) = \mu_i$ a N nech je nezáporná diskrétna náhodná premenná, ktorá je nezávislá od náhodných premenných $X_1, \ldots, X_N$. Položme $Z = X_1 + \cdots X_N$. Určte strednú hodnotu $\mathbb{E}\,(Z|N)$, a za predpokladu, že $X_1, \ldots, X_N$ sú identicky rozdelené aj strednú hodnotu $\mathbb{E}\,(Z)$.

$$[\mathbb{E}\,(Z|N) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i,\ \mathbb{E}\,(Z) = \mathbb{E}\,(X_1) \cdot \mathbb{E}\,(N)]$$

9.10. Začíname s palicou dĺžky l, ktorú zlomíme v náhodne zvolenom bode, pričom bod zlomu má rovnomerné rozdelenie po celej dĺžke palice. Ponecháme si tú časť palice, ktorá obsahuje jej pôvodný ľavý koniec. S touto časťou proces opakujeme. Aká je stredná hodnota a rozptyl dĺžky tej časti palice, ktorú si ponecháme po druhom zlome.

$$\left[\mathbb{E}\,(X) = \frac{l}{4},\ \mathbb{D}\,(X) = \frac{7l^2}{144}\right]$$

10 Zákony veľkých čísel

10.1. Hádžeme 100-krát mincou. Nech náhodná premenná S_n označuje počet padnutí hláv v tejto sérii. Odhadnite $\mathbb{P}(45 \leq S_n \leq 55)$.

$[\mathbb{P}(45 \leq S_n \leq 55) \approx 0,72867]$

10.2. Predpokladajme, že dve prieskumné agentúry vykonávajú prieskum volebných preferencií kandidátov a to na vzorke 200 voličov. Možné odpovede sú áno–nie. Určte hornú hranicu pravdepodobnosti, že odhad preferencií u oboch agentúr sa bude odlišovať o viac ako 4%.

$[p \leq 0,576]$

10.3. Predpokladajme, že priemerná hmotnosť v populácii je 80 kg a smerodajná odchýlka je σ=15 kg. Odhadnite pravdepodobnosť, že celková hmotnosť 169 pasažierov na palube lietadla prekročí 14 000 kg.

$[p \approx 0,0069]$

10.4. Vo voľbách si konkurujú dvaja kandidáti, pričom 52% voličov podporuje kandidáta A a 48% voličov podporuje kandidáta B. Bol vykonaný prieskum na vzorke 1 400 voličov. Aká je pravdepodobnosť, že odhad určuje víťaza volieb?

$[p \approx 0,9332]$

10.5. Opäť uvažujme volebný prieskum preferencií medzi dvomi kandidátmi, pričom podiel voličov, ktorí podporujú kandidáta A je p a kandidáta B $1-p$. Prieskum sa vykoná na vzorke n respondentov.

a) Aká veľká musí byť hodnota n, aby sme so spoľahlivosťou aspoň 95% vedeli určiť skutočný výsledok volieb s chybou menšou ako 2%?

b) Aká veľká má byť táto hodnota n, ak je podiel p neznámy?

$[\text{a)}9\,604p(1-p),\ \text{b)}n = 2\,401]$

10.6. Hádžeme 20-krát kockou, pričom výhru získame vtedy, ak geometrický priemer všetkých hodov prekročí hodnotu 3,5. Aké sú šance na výhru?[2]

$[p(\text{výhra}) \approx 0,129]$

10.7. Šprintér robí pri behu kroky s priemernou dĺžkou 140 cm a smerodajnou odchýlkou 5 cm. Aká je pravdepodobnosť, že trať s dĺžkou 100 m prebehne:

a) nanajvýš 70 krokmi,

b) nanajvýš 72 krokmi.

$[\text{a)}p(\text{kroky} \leq 70) \approx 0,\ \text{b)}p(\text{kroky} \leq 72) \approx 0,9706]$

[2] Geometrický priemer $n > 0$ čísel $a_1, \dots, a_n$ určíme ako $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$

10.8. Pravdepodobnosť, že výrobok je výbornej kvality je 0,85.

a) Odhadnite pravdepodobnosť, že z 1 000 výrobkov (výber s vrátením) je odchýlka relatívnej početnosti výrobkov výbornej kvality od teoretickej pravdepodobnosti v absolútnej hodnote menšia ako 0,2.

b) Koľko výrobkov treba skontrolovať, aby sa s pravdepodobnosťou aspoň 0,99 zaručilo, že rozdiel relatívnej početnosti a teoretickej pravdepodobnosti bol v absolútnej hodnote menší než 0,1?

[a)$p \approx 0,9968$, b)$n \geq 1\,275$]

10.9. Určte pravdepodobnosť, že aritmetický priemer z 1 000 nezávislých meraní udáva skutočnú hodnotu meranej veličiny u s presnosťou 0,01, ak disperzia jednotlivých výsledkov merania nepersahuje 0,2.

[$p \geq 0,98$]

10.10. Poisťovňa poisťuje 1 000 osôb rovnakého veku. Pravdepodobnosť úmrtia v priebehu jedného roka je pre každého z nich 0,005. Overte ziskovosť poisťovne v prípade, že poistné bude stanovené na 20 € a poistná suma je 6 700 €.

[$\mathbb{P}\,(\text{strata}) \approx 0,816.$]

10.11. Koľkokrát treba zmerať danú veličinu, ktorej presná hodnota je a, aby sme s pravdepodobnosťou nie menšou ako 0,95 mohli tvrdiť, že aritmetický priemer týchto meraní sa od presnej hodnoty odchyľuje o menej ako 2, ak smerodajná odchýlka každého merania je menšia ako 10?

[$n \geq 500$]

10.12. V osudí sa nachádza 100 bielych a 100 čiernych guľôčok. S vrátením bolo postupne vytiahnutých 50 guľôčok. Odhadnite pravdepodobnosť, že počet k bielych vytiahnutých guľôčok vyhovuje nerovnici $15 < k < 35$.

[$p > \frac{7}{8}$]

10.13. Zásielka obsahuje 3 000 výrobkov určitého druhu. Je známe, že pravdepodobnosť vyrobenia závadného výrobku je 0,04.

a) Odhadnite pravdepodobnosť, že absolútna odchýlka podielu závadných výrobkov v zásielke a pravdepodobnosti vyrobenia závadného výrobku bude menšia než 0,01.

b) Ako sa zmení výsledok, ak pravdepodobnosť vyrobenia závadného výrobku je 0,004 a zásielka bude obsahovať 30 000 kusov?

[a)$p \approx 0,872$, b)$p \approx 0,998672$]

10.14. Pravdepodobnosť narodenia chlapca je 0,515. Aká je pravdepodobnosť že medzi 10 000 novorodencami bude:

a) viac dievčat ako chlapcov,

b) 5 000 až 5 300 chlapcov,

c) relatívna početnosť chlapcov bude medzi 0,515 a 0,517.

[a)$p \approx 0,00135$, b)$p \approx 0,99730$, c)$p \approx 0,15542$]

11 Výberové charakteristiky a odhady parametrov

11.1. Pri organizácii výroby sa zisťoval čas, potrebný na vykonanie určitej pracovnej operácie. Opakovaným meraním sa získali tieto hodnoty trvania v sekundách

34; 34,5; 35; 37; 36; 38; 34; 33; 37; 39.

Určte výberové charakteristiky trvania pracovnej operácie.

$$[\overline{x} = 37,5;\ s^2 = 3,46; s \approx 1,86;\ A = 1,65;\ V = 0,052;\ R = 6, \tilde{x} = 35,5]$$

11.2. Baliaci automat, ktorý má plniť vrecká s 1 kg mletého cukru bol opravovaný. Pri skúšobnej prevádzke sa zistilo, že 20 naplnených vreciek obsahuje tieto množstvá cukru v kilogramoch:

1,00; 1,01; 1,05; 0,99; 0,95; 1,00; 0,98; 0,99; 1,04; 1,06; 0,93; 1,00; 1,03; 0,97; 1,00; 0,99; 1,05; 1,01; 0,94; 1,00.

Určte výberové charakteristiky hmotnosti náplne jedného vrecka.

$$[\overline{x} = 0,995 \approx 1;\ s^2 = 0,00232; s \approx 0,048;\ A = 0,0385;\ V = 0,048;\ R = 0,13, \tilde{x} = 1,00]$$

11.3. Nech $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výber z rovnomerného rozdelenia Ro $(0, \theta)$, kde θ je neznámy parameter. Ukážte, že štatistika $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ je konzistentným, ale vychýleným odhadom parametra θ. Na základe výsledkov zostrojte nevychýlený odhad parametra θ

$$\left[\hat{\theta} = \tfrac{n+1}{n} X_{(n)}\right]$$

11.4. Odhad pravdepodobnostináhodnej udalosti
Nech A je náhodná udalosť a $p = \mathbb{P}(A)$ jej neznáma pravdepodobnosť. X je náhodná premenná s alternatívnym rozdelením, $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. (Identifikátorová funkcia nastatia udalosti A). Určte najvierohodnejší odhad pravdepodobnosti p.

$$[\hat{p} = \overline{x_n}]$$

11.5. Nájdite najvierohodnejší odhad strednej hodnoty a rozptylu normálneho rozdelenia N (μ, σ^2)

$$[\mu = \overline{x},\ \sigma^2 = s^2]$$

11.6. Momentovou metódou nájdite odhad parametra λ Poissonovho rozdelenia.

$$\left[\hat{\lambda} = \overline{x}\right]$$

11.7. Nech $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výber z rovnomerného rozdelenia Ro (a, b). Momentovou metódou určte odhady parametrov a a b.

$$\left[\hat{a} = \overline{x} - s\sqrt{3},\ \hat{b} = \overline{x} + s\sqrt{3}\right]$$

11.8. Náhodná premenná X, ktorá znamená počet kilometrov, ktoré auto prejde do prvej poruchy má dvojparametrické exponenciálne rozdelenie $\mathrm{E}(A, \delta)$ s funkciou hustoty

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-A}{\delta}\right)} & x > A \\ 0 & x \leq A \end{cases}$$

U desiatich automobilov boli namerané tieto prejdené vzdialenosti v kilometroch:

1 900; 2 500; 2 400; 2 000; 2 300; 1 800; 2 200; 2 500; 1 800; 2 000;

Odhadnite hodnoty parametrov A a δ.

$$\left[\hat{A} = 1878,5,\ \delta = 261,5\right]$$

11.9. Nech $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výber z Poissonovho rozdelenia. Nájdite najvierohodnejší odhad parametra λ.

$$\left[\hat{\lambda} = \overline{x}\right]$$

11.10. Zostrojte 95%-ný interval spoľahlivosti pre parameter μ normálneho rozdelenia $\mathrm{N}(\mu, 25)$, ak z náhodného výberu o rozsahu $n = 100$ bolo určené $\overline{x} = 10$.

$$[\mu \in (9,1775; 10,8225)]$$

11.11. Za účelom odhadnutia priemernej doby potrebnej na vykonanie určitej technickej operácie bol urobený náhodný výber o rozsahu $n = 20$ a na jeho základe bolo určené $\overline{x} = 30$ a $s = 8$. Určte 95%-ný interval spoľahlivosti strednej doby trvania technickej operácie.

$$[\mu \in (25,814; 34,186)]$$

11.12. Za účelom zistenia priemernej dĺžky vyrábanej súčiastky bol vykonaný náhodný výber o rozsahu $n = 2000$ a na jeho základe bolo určené $s^2 = 81$ a $\overline{x} = 200$. Určte 95%-ný a 99%-ný interval spoľahlivosti pre priemernú dĺžku.

$$[\mu \in (199,669; 200,331)\ \mu \in (199,532; 200,468)]$$

11.13. Za účelom odhadu rozptylu času potrebného na vykonanie určitej technickej operácie bol vykonaný náhodný výber o rozsahu $n = 10$ a na jeho základe získaný odhad $s^2 = 4$ min. Určte 95%-ný interval spoľahlivosti pre rozptyl.

$$[\sigma^2 \in (1,893; 13,33)]$$

11.14. K dispozícii máme náhodný výber o rozsahu $n = 2\,400$ výrobkov, medzi ktorými je 30 nepodarkov. Odhadnite percento nepodarkov v produkcii so spoľahlivosťou 99%.

$$[p \in (0,72; 1,78)]$$

11.15. Koľko pozorovaní je potrebné vykonať, aby sme so spoľahlivosťou aspoň 99 % odhadli dobu potrebnú na vykonanie určitej operácie, ak vieme, že $\sigma = 30$ sec. a požadujeme, aby chyba odhadu neprekročila hranicu 10 sec.

$$[n \geq 59]$$

11.16. Koľko pozorovaní je potrebné vykonať, aby sme so spoľahlivosťou aspoň 95 % odhadli počet výrobkov 1.akosti z produkcie určitej automatickej linky, ak vieme že u iná podobná linka produkuje 85 % výrobkov prvej akosti? Ako sa táto hodnota zmení, ak nemáme k dispozícii doplňujúcu informáciu z druhej linky?

$$[n \geq 196,\ n \geq 385]$$

11.17. Nech $X_1, \ldots, X_n$ je výber z rozdelenia náhodnej premennej X, ktorá má funkciu hustoty danú vzťahom

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \theta^{-1} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, \quad x > 0,\ \theta > 0.$$

(Rozdelenie náhdnej premennej $Y = |X|$, kde $X \sim \mathrm{N}\left(0, \theta^2\right)$.) Momentovou metódou určte odhad parametra θ a rozhodnite, či je tento odhad nevychýlený a konzistentný.

$$\left[\hat{\theta} = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\,\overline{x},\ \text{je nevychýlený aj konzistentný.}\right]$$

11.18. Nech $Z_1, \ldots, Z_n$ je náhodný výber z rozdelenia náhodnej premennej $Z = X + Y$, kde $X \sim \mathrm{Po}\,(\lambda_1)$ a $Y \sim \mathrm{Po}\,(\lambda_1)$. Nájdite odhad parametrov λ_1 a λ_2.

$$\left[\hat{\lambda}_1 = \overline{x} - s,\ \hat{\lambda}_2 = s\right]$$

11.19. Náhodná premenná X má Maxwellovo rozdelenie s hustotou:

$$f(x) = \frac{2}{a^3\sqrt{2\pi}} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad a > 0, x > 0.$$

Nájdite odhad parametra a.

$$\left[\hat{a} = \tfrac{\sqrt{\pi}\,\overline{x}}{2\sqrt{2}}\right]$$

11.20. Náhodná premenná má Rayleighovo rozdelenie s parametrom $b > 0$, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \frac{x}{b^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b^2}}, \quad x > 0.$$

Určte najvierohodnejší odhad parametra b

$$\left[\hat{b} = \sqrt{\tfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}} = \sqrt{\tfrac{v_2}{2}}\right]$$

11.21. Momentovou metódou nájdite odhady parametrov a a b logistického rozdelenia, ktorého funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \frac{b \cdot \mathrm{e}^{-(a+bx)}}{\left[1 + \mathrm{e}^{-(a+bx)}\right]^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}\, b \in \mathbb{R}^+.$$

$$\left[a = -\tfrac{\overline{x}\sqrt{\pi}}{s\sqrt{3}}, b = \sqrt{\tfrac{\pi}{3s^2}}\right]$$

12 Testovanie hypotéz

12.1. Automat vyrába tabuľky čokolády, ktoré majú mať hmotnosť 100 g. pri kontrole bolo zvážených 1 600 tabuliek a bola zistená ich preimerná hmotnosť 99,7 g. vieme, že smerodajná odchýlka váženia je σ=5 g. Chceme overiť, či automat pracuje v rámci normy a to so spoľahlivosťou 95 % resp. 99 %.

[Pri spoľahlivosti 95 % zamietame, pri 99 % nezamietame.]

12.2. Pre overenie spotreby u automobilov dvoch rôznych značiek bolo vykonaných niekoľko meraní u oboch áut. Namerané výsledky sú zoradené do nasledujúcej tabuľky:

Číslo merania	1	2	3	4	5	6	7	$\overline{x}$	s
1.auto	6,1	6,2	6,0	6,3	5,9	6,1	6,5	6,158	0,2
2.auto	6,5	6,3	6,6	6,4	6,3	6,5	6,7	6,471	0,15

Rozhodnite so spoľahlivosťou 95 %, či spotreba má u oboch automobilov rovnakú priemernú hodnotu a rozptyl.

[Pre priemer zamietame, pre rozptyly nezamietame]

12.3. Pri výstupnej kontrole bolo skontrolovaných 2 400 spomedzi ktorých bolo zistených 32 nepodarkov. So spoľahlivosťou 95 % rozhodnite, či nepodarkovosť neprekračuje povolenú hranicu 2 %.

[Hypotézu nezamietame]

12.4. V urne sa nachádza určitý, veľký počet čiernych a bielych guľôčok, ktoré sú hmatom nerozlíšiteľné. Predpokladáme, že počet bielych a čiernych guľôčok v urne je rovnaký. Túto hypotézu nezamietneme v prípade, ak medzi 80 vybranými guľôčkami je počet čiernych guľôčok v tomto výbere v rozpätí 30–50 guľôčok. Aká je spoľahlivosť tohto testu?

[$98,68\,\%$]