ALGEBRA

Maticový počet

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

2. novembra 2015

Nech $\mathbb{P}$ je pole. Obdĺžnikovú schému $m \cdot n$ prvkov poľa $\mathbb{P}$ usporiadaných do m riadkov a n stĺpcov nazývame maticou typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{P}$.

Maticu $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ typu $m \times n$ s prvkami a_{ij}, kde $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ zapisujeme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Množinu všetkých matíc typu $m \times n$ nad poľom $\mathbb{P}$ označíme $\mathbb{P}^{m \times n}$.

Príklad 3.1

Matica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ je reálnou maticou typu 2×3, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ je komplexnou maticou typu 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix}.$$

Hovoríme, že matica $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m \times n}$ je

a) štvorcová matica stupňa (rádu) n, ak $m = n$.

b) nulová matica, ak $a_{ij} = 0$ pre všetky i, j a značíme ju $\mathbf{O}_{m \times n}$ alebo len $\mathbf{O}$.

c) diagonálna matica, ak je štvorcová matica rádu n a pre všetky $i \neq j$ je $a_{ij} = 0$.

d) jednotková matica, ak je diagonálna matica rádu n a pre všetky i je $a_{ii} = 1$ a značíme ju $\mathbf{E}_n$ alebo len $\mathbf{E}$.

e) horná (resp. dolná) trojuholníková matica, ak pre všetky $i > j$ (resp. $i < j$) je $a_{ij} = 0$.

f) symetrická matica, ak je štvorcová matica a pre všetky $i \leq j$ je $a_{ij} = a_{ji}$.

g) antisymetrická matica, ak je štvorcová matica a pre všetky $i \leq j$ je $a_{ij} = -a_{ji}$.

h) bloková matica, ak jej schému možno rozdeliť zvislými a vodorovnými čiarami na bloky – podmatice.

Príklad 3.2

Bloková matica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 6 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 6 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}$$

je tvorená štvorcovými maticami stupňa 2 – blokmi, kde

- $\mathbf{A}_{11}$ je jednotková a $\mathbf{A}_{22}$ diagonálna matica,
- $\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}$ sú nulové matice,
- $\mathbf{A}_{13}$ je horná trojuholníková matica,
- $\mathbf{A}_{23}$ je dolná trojuholníková matica,
- $\mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{32}$ sú antisymetrické matice,
- $\mathbf{A}_{33}$ je symetrická matica.

Rovnosť, súčet a skalárny násobok matíc

Hovoríme, že matica $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{m\times n}$ sa rovná matici $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{P}^{p\times q}$ a píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, ak $m = p$, $n = q$ a pre všetky i, j je $a_{ij} = b_{ij}$.

Nech $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{P}^{m\times n}$, potom

- súčtom matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ rozumieme maticu $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{P}^{m\times n}$ s prvkami $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ a píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$,
- skalárnym násobkom matice $\mathbf{A}$ rozumieme maticu $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{P}^{m\times n}$ s prvkami $c_{ij} = t \cdot a_{ij}$, kde $t \in \mathbb{P}$ a píšeme $\mathbf{C} = t \cdot \mathbf{A}$. Pre $t = -1$ píšeme $\mathbf{C} = -\mathbf{A}$ a maticu $-\mathbf{A}$ nazývame opačnou maticou k matici $\mathbf{A}$.

Príklad 3.2 – pokračovanie

$\mathbf{A}_{33} = \mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{23}$, $\mathbf{A}_{31} = -\mathbf{A}_{32}$.

Poznámka 3.1 – množina matíc ako vektorový priestor

Overte, že binárne operácie $+$ a $\cdot$ na množine všetkých matíc $\mathbb{P}^{m\times n}$ definujú vektorový priestor nad poľom $\mathbb{P}$ s bázou tvorenou množinou matíc $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{E}_{pq} \in \mathbb{P}^{m\times n} : p = 1, 2, \ldots, m; q = 1, 2, \ldots, n\}$, kde

$$\mathbf{E}_{pq} = \big(\text{if } (i = p) \wedge (j = q) \text{ then } 1 \text{ else } 0\big).$$

Pre ľubovoľné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{P}^{m\times n}$ platí $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$. Nulovým prvkom pre sčítanie matíc je nulová matica $\mathbf{O}$ a opačným prvkom k prvku $\mathbf{A}$ je $-\mathbf{A}$.
Platnosť rovností pre operáciu násobenia matíc skalármi $t, s \in \mathbb{P}$ ľahko overíme porovnaním ich ľavých a pravých strán

$$\begin{aligned} t \cdot (s \cdot \mathbf{A}) &= (t \cdot s) \cdot \mathbf{A}, \quad (t + s) \cdot \mathbf{A} = (t \cdot \mathbf{A}) + (s \cdot \mathbf{A}), \\ t \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= (t \cdot \mathbf{A}) + (t \cdot \mathbf{B}), \quad 1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Ľubovoľnú maticu $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu mn matíc bázy $\mathcal{B}_0$ a teda $\mathbf{A} = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{E}_{pq}$.

Príklad 3.1 – pokračovanie

Máme bázu $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{13}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{23}\}$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^{2\times 3}$ nad poľom reálnych čísel. Zvolenú maticu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ zapíšeme jednoznačne v tvare lineárnej kombinácie prvkov bázy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{12} + 4 \cdot \mathbf{E}_{22} + 5 \cdot \mathbf{E}_{23},$$

kde

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Súčin matíc – pravidlo riadok krát stĺpec

Nech $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{P}^{n\times p}$, potom súčinom matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ rozumieme maticu $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{P}^{m\times p}$ s prvkami

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

a značíme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Príklad 3.3

Majme matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pre ktoré platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Násobenie matíc $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *nie je vo všeobecnom prípade komutatívna operácia.*

Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ je štvorcová matica. k-tou mocninou matice $\mathbf{A}$ rozumieme štvorcovú maticu $\mathbf{A}^k$ stupňa n a definujeme takto

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \mathbf{E}_n & \text{ak } k = 0, \\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A} & \text{ak } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Transponovanou maticou k matici $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}$ rozumieme maticu $\mathbf{A}^T = (a_{ij}^T) \in \mathbb{P}^{n\times m}$ s prvkami $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Príklad 3.4

Uvažujme štvorcovú reálnu maticu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{A}^T)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^k)^T.$$

Pravidlá pre počítanie

Tvrdenie 3.1

Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}$; $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{P}^{n\times p}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{P}^{p\times r}$; $t, s \in \mathbb{P}$. *Potom platí*

a) $\mathbf{A}(\mathbf{BD}) = (\mathbf{AB})\mathbf{D}$, *(asociatívnosť)*
b) $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{D} = \mathbf{BD} + \mathbf{CD}$, *(distributív. sprava)*
c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, *(distributív. zľava)*
d) $\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{AE}_n$,
e) $\mathbf{O}_{m\times n} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
f) $\mathbf{O}_{m\times n}\mathbf{B} = \mathbf{O}_{m\times p}$,
g) $\mathbf{BO}_{p\times r} = \mathbf{O}_{n\times r}$,
h) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$,
i) $(\mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$,
j) $(t\mathbf{A})^T = t\mathbf{A}^T$,
k) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Cvičenie 3.1

1. Majme matice nad poľom $\mathbb{R}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 9 & 2 \\ 10 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

   Vypočítajte matice $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}^3 - 3\mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $(3\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, $(\mathbf{C}^T + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{C}$.

2. Vypočítajte súčiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ komplexných matíc

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -i \\ 1-i & i & 2+3i \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3+2i & 3i \\ 4 & 1-i \\ 0 & 4i \end{pmatrix}.$$

3. Vypočítajte $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ postupne v poliach $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Q}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bonusový príklad 3.1

1. (3b) Nájdite také matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, že platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{O} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.
2. (3b) Nájdite všetky reálne matice $\mathbf{X}$, ktoré sú komutatívne s hornou trojuholníkovou maticou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ t.j. pre ktoré platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$.
3. (2b) Maticu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{m\times n}$ uvažujme ako riadok jej stĺpcov t.j. ako maticu $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n)$, kde $\mathbf{u}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$ a $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{P}^n$ stĺpcový vektor. Ukážte, že
$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}.$$
4. (2b) Overte vzťahy a) – k) tvrdenia 3.1 pre komplexné matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3\times 2}; \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{2\times 1}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{1\times 3}$; $t, s \in \mathbb{C}$. (každý vzťah za 2 body)
5. (4b) Overte, že komplexné číslo $a + ib$ môžeme reprezentovať maticou
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Nech $\langle n \rangle = \{1, 2, \ldots, n\}$. Permutácia množiny $\langle n \rangle$ je bijektívne zobrazenie $\pi : \langle n \rangle \to \langle n \rangle$. Množinu všetkých permutácii množiny $\langle n \rangle$ budeme značiť Π_n. Obraz prvku $i \in \langle n \rangle$ v permutácii π budeme značiť $\pi(i)$. Permutáciu π zapisujeme

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

alebo skrátene $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(n))$.
Ak pre $i < j; i, j \in \langle n \rangle$ je $\pi(i) > \pi(j)$, hovoríme, že dvojica (i, j) predstavuje inverziu v permutácii π. Znamienko permutácie π je číslo $zn(\pi) = (-1)^k$, kde k je počet inverzií v permutácii.
Permutácia π je párna (resp. nepárna), ak $zn(\pi) = 1$ (resp. $zn(\pi) = -1$).

Príklad 3.5

Majme permutácie $\pi = (2, 3, 5, 1, 4)$ a $\psi = (2, 1, 5, 3, 4)$ množiny $\langle 5 \rangle$. Potom dvojica $(2, 4)$ predstavuje inverziu v π, ale nie v ψ.
$zn(\pi) = (-1)^4 = 1, zn(\psi) = (-1)^3 = -1$.

Determinant matice

Determinantom štvorcovej matice stupňa n, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{n \times n}$, rozumieme prvok poľa $det\mathbf{A} \in \mathbb{P}$ definovaný vzťahom

$$det\mathbf{A} = \sum_{\pi \in \Pi_n} zn(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot \cdots \cdot a_{n\pi(n)}. \quad (\heartsuit)$$

Označujeme tiež

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinat matice nad číselným poľom je teda súčtom $n!$ sčítancov, každý z nich je tvorený súčinom permutáciou vybraných prvkov matice so znamienkom permutácie.

Sarusovo pravidlo

Príklad 3.6

Majme štvorcovú maticu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$\begin{aligned} det\mathbf{A} = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Matica $\mathbf{A}$ je 3. stupňa, preto $det\mathbf{A}$ obsahuje $3! = 6$ sčítancov. Permutácie $(3,2,1), (1,3,2), (2,1,3)$ sú nepárne a tak sa v súčte vyskytujú so záporným znamienkom.

Pri výpočte determinatu matice tretieho stupňa si môžeme pomôcť Sarusovým pravidlom pomocou schémy

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Vlastnosti determinantu

Tvrdenie 3.2

Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ *je štvorcové matice. Potom platí*

a) $det\mathbf{A} = det\mathbf{A}^T$.

b) $det\mathbf{B} = -det\mathbf{A}$, *ak matica* $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *vzájomnou výmenou* i*-teho a* j*-teho riadku.*

c) $det\mathbf{B} = k \cdot det\mathbf{A}$, *ak matica* $\mathbf{B}$ *vznikne vynásobením jej* i*-teho riadku prvkom* $k \in \mathbb{P}$.

d) $det\mathbf{A} = 0$, *ak má matica* $\mathbf{A}$ *dva riadky rovnaké alebo jeden riadok nulový.*

e) $det\mathbf{B} = det\mathbf{A}$, *ak matica* $\mathbf{B}$ *vznikla z matice* $\mathbf{A}$ *pripočítaním* k*-násobku ľubovoľného riadku k inému riadku.*

f) $det\mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$, *ak matica* $\mathbf{A}$ *je dolná alebo horná trojuholníková matica.*

g) $det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = det\mathbf{A} \cdot det\mathbf{B}$.

Laplaceov rozvoj determinantu

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica $\mathbb{P}^{n\times n}$ a nech $\mathbf{A}_{ij}$ je štvorcová matica stupňa $n-1$, ktorá z nej vznikne vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca.
Prvok $A_{ij} = (-1)^{i+j} det \mathbf{A}_{ij}$ pre $i,j \in \langle n \rangle$ sa nazýva algebraický doplnok prvku a_{ij}. Laplaceovym rozvojom determinantu $det\mathbf{A}$ podľa prvkov i-teho riadku (resp. j-teho stĺpca) matice nazývame vzťahy

$$\begin{aligned} det\mathbf{A} &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \end{aligned}$$

Príklad 3.7

Pomocou Laplaceovho rozvoja podľa 1. stĺpca dostaneme rýchlo

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ 0 & a_6 \end{vmatrix} + 0 = a_1 a_4 a_6.$$

Cvičenie 3.2

1. Zistite znamienka pre všetky permutácie $\pi \in \Pi_3$ a $\psi \in \Pi_4$.
2. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ máme v množine Π_n počet kladných permutácií rovnaký ako počet záporných permutácií.
3. Vypočítajte determinant v poli komplexných čísel
$$\left| \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ 0 & a_3 + ib_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 + id_1 & 0 \\ c_2 + id_2 & c_3 + id_3 \end{pmatrix} \right|.$$
4. Overte na príkladoch matíc zo $\mathbb{Z}_5^{3\times 3}$ vzťahy tvrdenia 3.2.
5. Overte na príklade, že ak matica $\mathbf{B}$ vznikla zo štvorcovej matice $\mathbf{A}$ tak, že k danému riadku pripočítame lineárnu kombináciu iných riadkov, potom $det\mathbf{B} = det\mathbf{A}$.
6. Vypočítajte determinant náhodne zvolenej matice $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_3^{4\times 4}$ s nenulovými prvkami pomocou Laplaceovho rozvoja aj podľa 2. riadku aj podľa 3. stĺpca s nasledným použitím Sarusovho pravidla a výsledky porovnajte.

Skalárny a vektorový súčin vektorov v geometrii

Pre vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{V}_3$ *nad poľom* $\mathbb{R}$ *je skalárny súčin vektorov definovaný predpisom*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Dĺžka vektora $\mathbf{u}$ *je potom definovaná vzťahom* $\| \mathbf{u} \| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. *Pre nenulové vektory sa dokazuje známy vzťah*

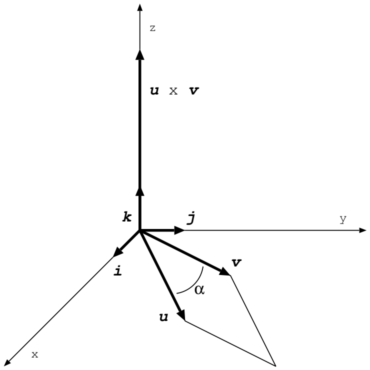
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \, cos\alpha,$$

kde α *je uhol zvieraný vektormi* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$.

Vektorovým súčinom vektorov $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *je tu v jednotkovej báze* $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)\}$ *vektor* $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *určený predpisom*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}^T = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

a jeho dĺžka je rovná $\| \mathbf{w} \| = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \, sin\alpha$.



Obr.: *Vektorový súčin* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *dvoch vektorov v euklidovskom priestore.*

Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je kolmý na rovinu určenú vektormi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Jeho smer určíme pravidlom pravej ruky: Vektor smeruje na tú stranu roviny, na ktorú ukazuje palec, ak zohnuté prsty pravej ruky smerujú po kratšom oblúku od vektora $\mathbf{u}$ k vektoru $\mathbf{v}$. Dĺžka vektora $\mathbf{w}$ zodpovedá obsahu rovnobežníka určeného vektormi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

Bonusový príklad 3.2

1. (3b) Definujte binárnu operáciu $\times$ vektorového súčinu na množine $\mathcal{V} = \{\mathbf{0}, -\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$ v tvare Cayleyho tabuľky.
2. (x2b) Majme vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}_3$ nad poľom $\mathbb{R}$. Odvoďte vzťahy
   (i) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$,
   (ii) $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 + \| \mathbf{x} \times \mathbf{y} \|^2 = \| \mathbf{x} \|^2 \| \mathbf{y} \|^2$,
   (iii) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$,
   (iv) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.
3. (3b) V euklidovskom priestore sú dané body $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ a $C = (c_1, c_2, c_3)$. Vypočítajte pomocou vektorového súčinu vektorov obsah trojuholníka ABC.
4. (3b) Odvoďte vzorec $P = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|$ pre výpočet obsahu kosodĺžnika $ABCD$, kde $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = D - A$.
5. (4b) Odvoďte vzorec $V = \| (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \|$ pre výpočet objemu rovnobežnostena $ABCDEFGH$, kde $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = D - A$ a $\mathbf{w} = E - A$.

Podpriestor prislúchajúci k matici

Nech sú $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektory aritmetického vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ nad poľom $\mathbb{P}$, kde pre $i = 1, \ldots, m$ sú $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Nech matica $\mathbf{A}$ je vytvorená vektormi $\mathbf{a}_i$ ako jej riadkami t.j.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Podpriestor prislúchajúci k matici $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m \times n}$ je vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{V}_n$ nad poľom $\mathbb{P}$ tvorený riadkami matice ako vektormi z $\mathbb{V}_n$; značíme ho $\mathbb{V}_{\mathbf{A}}$.

Príklad 3.8

Riadky matice $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}^{2 \times 4}$ chápeme ako vektory vektorového podpriestoru $\mathbb{V}_{\mathbf{A}} = [(1, 2, 0, 1), (3, 4, 2, 1)]$ prislúchajúceho k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice **A** je dimenzia podpriestoru $\mathbb{V}_{\mathbf{A}}$ prislúchajúceho k matici **A** t.j. maximálny počet lineárne nezávislých riadkových vektorov matice **A**; označujeme ju $h(\mathbf{A})$.

Príklad 3.8 – pokračovanie

Nakoľko dimenzia $\mathbb{V}_{\mathbf{A}} = [(1, 2, 0, 1), (3, 4, 2, 1)]$ *vektorového priestoru prislúchajúceho k matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je rovná 2, je aj $h(\mathbf{A}) = 2$. Vidíme, že hodnosť matice **A** udáva maximálny počet lineárne nezávislých vektorov vo vektorovom podpriestore **A**. Ako ju ale efektívne hľadať?

Elementárnymi riadkovými operáciami na matici rozumieme každú z nasledujúcich úprav matice:

(i) vzájomná výmena dvoch riadkov,

(ii) vynásobenie riadku nenulovým skalárom,

(iii) pripočítanie nenulového násobku niektorého riadku k inému riadku.

Ak sú elementárne operácie vykonávané pre stĺpce matice hovoríme o elementárnych stĺpcových operáciach.

Hovoríme, že matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}^{m \times n}$ sú riadkovo (resp. stĺpcovo) ekvivalentné, ak maticu $\mathbf{B}$ možno dostať z matice $\mathbf{A}$ pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových (resp. stĺpcových) operácii; značíme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Príklad 3.9

Majme maticu **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Riadkovo ekvivalentnú maticu **B** sme dostali takto: Najskôr sme druhý riadok vynásobili $\frac{1}{2}$. Potom sme odčítali 3-násobok prvého riadku od tretieho riadku matice **A**.

Označme $\mathbb{V}_{\mathbf{A}} = [(1,2,0,1),(2,2,2,0),(3,4,2,1)]$ a $\mathbb{V}_{\mathbf{B}} = [(1,2,0,1),(1,1,1,0),(0,-2,2,-2)]$.

Nech $\mathbf{a} = \alpha_1(1,2,0,1) + \alpha_2(2,2,2,0) + \alpha_3(3,4,2,1)$, $\mathbf{b} = \beta_1(1,2,0,1) + \beta_2(1,1,1,0) + \beta_3(0,-2,2,-2)$. potom $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_3 = -\alpha_3/2$. Takže máme $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ a teda aj zhodné vektorové podpriestory $\mathbb{V}_{\mathbf{A}} = \mathbb{V}_{\mathbf{B}}$. Dostávame $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Tvrdenie 3.3

Riadkovo ekvivalentným maticiam prislúcha ten istý vektorový podpriestor.

Dôkaz:

Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m \times n}$ a $\mathbb{V}_{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m]$. Stačí ukázať, že $\mathbb{V}_{\mathbf{A}}$ sa nezmení pri elementárnych riadkových operáciách matice.

(i) $[\ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots] = [\ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots]$,

(ii) Nech $k \neq 0$. $[\ldots, k\mathbf{a}_i, \ldots] = [\ldots, \mathbf{a}_i, \ldots]$,

(iii) Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme len pripočítanie k-násobku 1.riadku k 2.riadku.
Nech pre $k \in \mathbb{P}$ je $\mathbb{V}_{\mathbf{A}'} = [\mathbf{a}_1, k\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m]$. Zrejme platí $\mathbb{V}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathbb{V}_{\mathbf{A}'}$. Pre $c_i \in \mathbb{P}$ platí aj $\mathbb{V}_{\mathbf{A}'} \subseteq \mathbb{V}_{\mathbf{A}}$

$$\begin{aligned} (c_1 - kc_2)\mathbf{a}_1 + c_2(k\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdots + c_n\mathbf{a}_n &\in \mathbb{V}_{\mathbf{A}'}, \\ = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n &\in \mathbb{V}_{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

a tak $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m] = [\mathbf{a}_1, k\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m]$.

Tvrdenie 3.4

Každú nenulovú maticu $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}$ *možno pomocou riadkových a stĺpcových elementárnych operácií upraviť na trojuholníkovú maticu* $\mathbf{G} \in \mathbb{P}^{m\times n}$, *kde* $g_{ii} \neq 0$ *pre* $i = 1, 2, \ldots, k$; $k \leq \min\{m, n\}$, *v tvare*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1k} & \ldots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & g_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & g_{kk} & \ldots & g_{kn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dôkaz: $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, existuje prvok $a_{ij} \neq 0$; riadkovou a stĺpcou výmenou dostaneme $b_{11} = a_{ij}$ a $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$. Pripočítaním vhodného $-b_{11}^{-1}$ násobku k ostatným riadkom dostaneme ekvivalentnú maticu $\mathbf{C} \sim \mathbf{B}$ s nulami pod c_{11}. Postup opakujeme, kým $\mathbf{G} \sim \mathbf{A}$.

Príklad 3.9 – pokračovanie

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Najskôr odpočítame 2-násobok 1.riadku k 2. riadku a 3-násobok 1. riadku k 3. riadku, čím získame prvý stĺpec hľadanej matice. Potom odpočítame 2. riadok od 3.riadku a dostaneme Gaussovu maticu **G**.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}.$$

Presvedčte sa ;-), že len prvé dva nenulové riadky matice **G** sú lineárne nezávislé, takže dostávame $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{G}) = 2$.

Tvrdenie 3.5

Každú nenulovú maticu $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m \times n}$ *možno pomocou riadkových a stĺpcových elementárnych operácií upraviť na trojuholníkovú maticu* $\mathbf{H} \in \mathbb{P}^{m \times n}$, *kde* $h_{ii} \neq 0$ *pre* $i = 1, 2, \ldots, k$; $k \leq \min\{m, n\}$, *v tvare*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \ldots & 0 & h_{1k+1} & \ldots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \ldots & 0 & h_{2k+1} & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & h_{kk} & h_{kk+1} & \ldots & h_{kn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dôkaz: Maticu $\mathbf{A}$ najskôr upravíme Gaussovou eliminačnou metódou na tvar $\mathbf{G}$ a potom pomocou nenulových prvkov na hlavnej diagonále a elementárnych operácii urobíme nulové prvky nad nimi. Postupujeme zdola nahor a zľava doprava, kým $\mathbf{G} \sim \mathbf{H}$. ∎

Príklad 3.9 – pokračovanie

Začneme úpravou Gaussovej matice **G**

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V tomto prípade v nej stačí pripočítať 2.riadok k 1.riadku matice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a máme ekvivalentnú maticu **H** nájdenú Jordanovou eliminačnou metódou.

Vidíme opäť, že len prvé dva nenulové riadky matice **G** zostávajú lineárne nezávislé, a tak dostávame $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{G}) = h(\mathbf{H}) = 2$.

Tvrdenie 3.6

Elementárne riadkové (resp. stĺpcové) operácie nemenia hodnosť matice. Naviac pre každú maticu $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}$ *je* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

Príklad 3.9 – pokračovanie

Najskôr Gaussovu eliminačnou metódou získame

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}'.$$

Potom Jordanovou eliminačnou metódou dostaneme

$$\mathbf{G}' \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{H}'.$$

V zhode s tvrdením 3.5 zisťujeme, že $h(\mathbf{A}^T) = h(\mathbf{H}') = 2 = h(\mathbf{A})$.

Regulárne a singulárne matice

Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Hovoríme, že štvorcová matica stupňa n je

- regulárna, ak $h(\mathbf{A}) = n$,
- singulárna, ak $h(\mathbf{A}) < n$.

Príklad 3.10

Matica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

regulárna, $h(\mathbf{A}) = 3$. Matica $\mathbf{B} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$ je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

singulárna, $h(\mathbf{B}) = 2$.

Tvrdenie 3.7

Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{n \times n}$*. Riadkové vektory matice* $\mathbf{A}$ *sú lineárne závislé, práve vtedy keď* $det\mathbf{A} = 0$*.*

Príklad 3.11

Najdime hodnoty $\lambda \in \mathbb{R}$*, pre ktorú je matica* $\mathbf{A}$ *regulárna resp. singulárna.*

Využijeme tvrdenie 3.7, podľa ktorého poznáme singulárnu maticu, keď jej determinant je nulový.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 2\lambda = 0.$$

Pre $\lambda = -2$ je matica singulárna (3. riadok je súčtom 1. a 2.riadku), pre $\lambda \neq -2$ je regulárna.

Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{n \times n}$ je štvorcová matica stupňa n. Nech existuje štvorcová matica $\mathbf{B} \in \mathbb{P}^{n \times n}$ stupňa n taká, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad (\clubsuit)$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matica stupňa n. Potom hovoríme, že $\mathbf{B}$ je inverzná matica k matici $\mathbf{A}$ a označujeme ju $\mathbf{A}^{-1}$.

Príklad 3.12

Nech $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

Až tak jednoduché to žial vo všeobecnom prípade nie je ;-(!

Tvrdenie 3.8

Pre štvorcovú maticu $\mathbf{A}$ *existuje inverzná matica* $\mathbf{A}^{-1}$ *práve vtedy, keď* $\mathbf{A}$ *je regulárna.*

Dôkaz: $(\Rightarrow)$ Nech má $\mathbf{A}$ invernú maticu $\mathbf{A}^{-1}$. Potom zo vzťahu $\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ máme $1 = det\mathbf{A}det\mathbf{A}^{-1}$ a $det\mathbf{A} \neq 0$, takže je regulárna.

$(\Leftarrow)$ Nech je $\mathbf{A}$ regulárna. Potom ju Jordanovou eliminačnou metódou môžeme upraviť na jednotkovú maticu pomocou len elementárnych riadkových operácií. Tieto úpravy vieme realizovať vynásobením matice $\mathbf{A}$ zľava vhodnou regulárnou maticou t.j. existujú regulárne matice $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_p$ také, že

$$\underbrace{\mathbf{B}_p \cdot \mathbf{B}_{p-1} \ldots \mathbf{B}_1}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

a podľa $(\clubsuit)$ je $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. $\blacksquare$

Príklad 3.10 – pokračovanie

Matica $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ *je regulárna a hľadáme k nej inveznú maticu* $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}|\mathbf{E}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) = \\
&= (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}).
\end{aligned}
$$

Bonusový príklad 3.3

1. (2b) Uveďte príklad matice $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, ktorú nemôžeme upraviť na Gaussovu maticu len pomocou riadkových elementárnych operácií.
2. (x2b) Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{3\times 3}$. Nájdite takú maticu $\mathbf{B} \in \mathbb{P}^{3\times 3}$, že $\mathbf{BA}' = \mathbf{E}$ ak $\mathbf{A}'$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ takto:
   - a) vzájomnou výmenou i-teho a j-teho riadku,
   - b) vynásobenám i-teho riadku skalárom $p, (p \neq 0)$,
   - c) pripočítaním q-násobku $(q \neq 0)$ i-teho riadku ku j-temu riadku.
3. (3b) Riešte maticovú rovnicu $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$, ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = n$.
4. (4b) Pre aké hodnoty α je matica

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

regulárna v poli $\mathbf{Z}_7$?