ALGEBRA

Systémy lineárnych rovníc

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

8. decembra 2015

Systém lineárnych rovníc

Nech $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ je množina vektorov vektorového podpriestoru $\mathbb{V}_m$ nad poľom $\mathbb{P}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{V}_m$ vektor tohoto vektorového podpriestoru. Súradnice vektora $\mathbf{b}$ v $\mathcal{A}$ sú prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{P}$ lineárnej kombinácie

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad (\heartsuit)$$

Ak $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}), i = 1, 2, \ldots, n$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ potom $(\heartsuit)$ možno písať v tvare systému m lineárnych rovníc o n neznámych $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots \qquad (\heartsuit\heartsuit)\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Riešením systému (♡♡) je každá n-tica $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $u_i \in \mathbb{P}$, že pre všetky $x_i = u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme m rovností.

Ku systému (♡♡) môžeme prirodzene priradiť maticu systému $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{m \times n}$ a rozšírenú maticu systému $\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Maticový zápis systému (♡♡) s neznámymi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ má tvar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (\heartsuit\heartsuit\heartsuit)$$

ktorý nazveme stručne

- homogénny, ak $\mathbf{b} = \mathbf{0}$,
- nehomogénny, ak $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Príklad 4.1

Majme homogénny systém lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 &= 0, \end{aligned}$$

s maticou systému $\mathbf{A}$, v maticovo tvare ho zapíšeme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

má riešenia $(0,0,0), (1,1,1), (2,2,2)$. Sú ale všetky?

Dva systémy rovníc $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ s rovnakým počtom neznámych sa nazývajú ekvivalentné, ak majú rovnakú množinu riešení t.j. $S_{\tilde{\mathbf{C}}} = S_{\tilde{\mathbf{A}}}$.

Príklad 4.1 – pokračovanie

Systém rovníc nad poľom $\mathbb{Z}_3$ s maticou systému $\mathbf{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

má množinu riešení

$$S_{\tilde{\mathbf{C}}} = S_{\tilde{\mathbf{A}}} = \{(0,0,0), (1,1,1), (2,2,2)\},$$

a tak systémy s maticami $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$ sú ekvivalentné.

Riešiteľnosť systému lineárnych rovníc

Tvrdenie 4.1

Ak rozšírené matice dvoch systémov lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalenté, tak systémy majú rovnakú množinu riešení.

Dôkaz:
Je triviálny, elementárne riadkové operácie nemenia množinu riešení systému. ■

Tvrdenie 4.2 (Frobeniova veta)

Systém lineárnych rovníc o n neznámych $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice systému sa rovná hodnosti rozšírenej matice systému.

(a) *Ak $h(\mathbf{A}) = h(\widetilde{\mathbf{A}}) = n$, potom má systém práve jedno riešenie.*

(b) *Ak $h(\mathbf{A}) = h(\widetilde{\mathbf{A}}) = k < n$, potom má systém v nekonečnom poli $\mathbb{P}$ nekonečne veľa riešení, pričom $n - k$ neznámych je voliteľných.*

Príklad 4.2

Majme nehomogénny systém nad poľom reálnych čísel

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_2 + 2x_3 &= 3, \end{aligned}$$

s maticou systému $\mathbf{A}$ v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jordanovou eliminačnou metódou dostaneme

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = \tilde{\mathbf{C}}$$

Systém má nekonečnú množinu riešení

$$S_{\tilde{\mathbf{A}}} = \{(6 - 3t, 3 - 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Cvičenie 4.1

1. Majme nehomogénny systém lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

   Nájdite jeho maticový tvar, iný ekvivalentný systém rovníc, množinu ich riešení.

2. Majme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Rozpíšte rovnice systému $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, nájdite $\tilde{\mathbf{A}}$, $h(\mathbf{A})$, $h(\tilde{\mathbf{A}})$ a $S_{\tilde{\mathbf{A}}}$.

Homogénny systém m lineárnych rovníc o n neznámych nad poľom $\mathbb{P}$ má tvar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Jeho riešenie $(0, 0, \ldots, 0) \in V_n$ nazývame triviálne riešenie a každé iné riešenie nazývame netriviálne riešenie.

Tvrdenie 4.3

Nech $S_{\tilde{\mathbf{A}}}$ je množina všetkých riešení homogénneho systému s maticou systému $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{m \times n}$. Potom $\mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{A}}}$ je vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{V}_n$ v poli $\mathbb{P}$.

Dôkaz:

$S_{\tilde{\mathbf{A}}} \neq \emptyset$, lebo obsahuje aspoň triviálne riešenie.

Ak $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_{\tilde{\mathbf{A}}}$ potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ a teda i $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ a tak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S_{\tilde{\mathbf{A}}}$.

Ak $\mathbf{u} \in S_{\tilde{\mathbf{A}}}, t \in P$ potom $\mathbf{A} \cdot (t\mathbf{u}) = t \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ a tak aj $t\mathbf{u} \in S_{\tilde{\mathbf{A}}}$. ∎

Príklad 4.2 – pokračovanie

Uvažujme homogénny systém k pôvodnému nehomogénnemu systému nad poľom reálnych čísel s rozšírenou maticou systému $\tilde{\mathbf{D}}$.

$$\tilde{\mathbf{D}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Systém $\mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ má nekonečnú množinu riešení

$$S_{\tilde{\mathbf{D}}} = \{(-3c, -2c, c) | c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{V}_3.$$

Nech $\mathbf{u} = (-3c_1, -2c_1, c_1), \mathbf{v} = (-3c_2, -2c_2, c_2) \in S_{\tilde{\mathbf{D}}}$, kde sú dané $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, 0 \neq c_1 \neq c_2 \neq 0$, nech $t \in \mathbb{R}$ ľubovoľné

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (c_1 + c_2)(-3, -2, 1) \in S_{\tilde{\mathbf{D}}}, \\ t\mathbf{u} &= tc_1(-3, -2, 1) \in S_{\tilde{\mathbf{D}}}. \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_{\tilde{\mathbf{D}}} = [(-3, -2, 1)]$ je vektorovým podpriestorom priestoru $\mathbb{V}_3$.

Tvrdenie 4.4 (Dôsledok Frobeniovej vety)

Homogénny systém lineárnych rovníc o n neznámych $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ má vždy aspoň jedno riešenie a to triviálne riešenie.

(a) *Ak $h(\mathbf{A}) = n$, potom má iba triviálne riešenie.*

(b) *Ak $h(\mathbf{A}) = k < n$, potom má systém v nekonečnom poli $\mathbb{P}$ nekonečne veľa riešení, pričom $n - k$ neznámych je voliteľných.*

Príklad 4.2 – pokračovanie

Všimnite si, že sme nepotrebovali rozšírenú maticu systému, vystačíme si s maticou systému.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nakoľko $h(\mathbf{A}) = 2$, nie je $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ jediné riešenie homogénneho systému $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Riešením je nekonečná množina s jednou voliteľnou neznámou $S_{\mathbf{A}} = \{(-3c, -2c, c) : c \in \mathbb{R}\}$.

Príklad 4.3

Doplňme homogénny systém z vyššie uvedeného príkladu ďalšími dvoma rovnicami

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0, \\
3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Najskôr upravíme maticu systému Jordanovou metódou

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Nakoľko $h(\mathbf{A}) = 3$, je $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ jediné riešenie homogénneho systému $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Tvrdenie 4.5

Nech $\mathbf{x_b}$ *je jedno konkrétne riešenie nehomogénneho systému* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Potom ľubovoľné riešenie tohoto systému možno napísať v tvare*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_b} + \mathbf{x_0},$$

kde $\mathbf{x_0}$ *je riešenie homogénneho systému* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x_0} = \mathbf{0}$.

Dôkaz:

Nech $\mathbf{x_b}$ je zvolené a $\mathbf{u}$ ľubovoľné riešenie nehomogénneho systému t.j. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x_b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}$. Potom $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{x_b}) = \mathbf{0}$. To znamená, že $\mathbf{u} - \mathbf{x_b}$ je riešením homogénneho sytému a tak aj riešenie $\mathbf{u} = \mathbf{x_b} + (\mathbf{u} - \mathbf{x_b})$ je v požadovanom tvare.

Ale ľubovoľný vektor $\mathbf{u} = \mathbf{x_b} + \mathbf{x_0} \in S_{\tilde{\mathbf{A}}}$, pretože platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x_b} + \mathbf{x_0}) = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$. ■

Príklad 4.2 – pokračovanie

Uvažujme nehomogénny systém $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad poľom reálnych čísel

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Zvoľme jedno jeho riešenie napr. $\mathbf{x_b} = (6, 3, 0)$.

Odvodili sme ale všetky riešenia príslušného homogénneho systému v tvare $\mathbf{x_0} = (-3c, -2c, c), c \in \mathbb{R}$. Ľahko sa presvedčíme, že platí $\mathbf{x_b} + \mathbf{x_0} = (6 - 3c, 3 - 2c, c) \in S_{\tilde{\mathbf{A}}}$.

Tvrdenie 4.6

Nech $\mathbf{A}$ *je regulárna matica systému* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Potom tento systém má jediné riešenie* $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Dôkaz:

Ak $\mathbf{A}$ je regulárna matica, potom k nej existuje inverná matica $\mathbf{A}^{-1}$. Z definície inverznej matice a asociatívnosti násobenia matíc dostávame

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

$\blacksquare$

Bonusový príklad 4.1 – puzzle Minisudoku

Je daná matica $\mathbf{A} \in S^{4\times 4}$ s prvkami z množiny $S = \{1, 2, 3, 4\}$, ktorej neznáme prvky treba doplniť tak, aby:

- riadky i stĺpce matice obsahovali všetky prvky z S,
- 2×2 blokové matice obsahoval všetky prvky z S.

Priklad vyriešeného puzzle, čísla boli zadané

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

a) (5b) Formulujte úlohu so štvoricou prípustne zadaných čísel v minisudoku ako riešenie nehomogénneho systému lineárnych rovníc s neznámymi nadobudajúcimi hodnoty $0, 1$.

b) (5b) Rozhodnite, kedy má puzzle viacero riešení.

c) (5b) Rozhodnite, kedy má puzzle jedno riešenie.

Pomoc: neznáma $x_{ijk} = 1$ ak (i, j)-ty prvok matice je rovný k.

Príklad 4.4

Máme nehomogénny systém rovníc $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad poľom reálnych čísel

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 5, \\ x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Najskôr overíme, že matica systému je regulárna a tak existuje inverzná matica k matici systému. Platí $det\mathbf{A} = -5 \neq 0$.

Jediným riešením systému je vektor

$$\mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 & 0.6 \\ -0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & -0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie 4.7

Nech $\mathbf{A}$ *je regulárna matica stupňa* n *systému* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Potom pre jeho riešenie* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *platí*

$$x_i = \frac{det\mathbf{B}_i}{det\mathbf{A}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde $\mathbf{B}_i$ *je matica, ktorá vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *nahradením jej* i*-teho stĺpca vektorom* $\mathbf{b}$.

Príklad 4.4 – pokračovanie

Použite Cramerovo pravidlo na riešenie vyššie uvedeného systému.

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \quad det\mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -25.$$

$det\mathbf{B}_2 = det\mathbf{B}_3 = 0$ a tak riešením je $\mathbf{x} = \frac{1}{-5}(-25, 0, 0) = (5, 0, 0)$.

Matica prechodu z bázy do bázy

Majme dve bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}_n$ nad poľom $\mathbb{P}$ $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ a $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n\}$. Vektor $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{V}_n$ sa dá napísať v súradniciach bázy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ v tvare

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\gamma} &= y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\beta}_n. \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1 &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n &= a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n, \end{aligned}$$

čo skrátene môžeme písať $\mathcal{B} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{A}$ a regulárnu maticu $\mathbf{A} \in \mathbb{V}^{n\times n}$ nazývame matica prechodu z bázy $\mathcal{A}$ do bázy $\mathcal{B}$.

Príklad 4.5

Vo vektorovom priestore $\mathbb{V}_3$ nad poľom $\mathbb{R}$ máme dve rôzne bázy

$$\mathcal{A} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\},$$
$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\},$$

a hľadáme maticu prechodu **A** *z bázy $\mathcal{A}$ do bázy $\mathcal{B}$.*

Treba riešiť sústavu rovníc s 9-timi neznámymi $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + a_{13}\boldsymbol{\alpha}_3,\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + a_{23}\boldsymbol{\alpha}_3,\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= a_{31}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{32}\boldsymbol{\alpha}_2 + a_{33}\boldsymbol{\alpha}_3,
\end{aligned}$$

po dosadení vektorov bázy sústavu rovníc

$$\begin{aligned}
(1,1,1) &= a_{11}(1,1,0) + a_{12}(0,1,1) + a_{13}(1,0,1),\\
(0,1,1) &= a_{21}(1,1,0) + a_{22}(0,1,1) + a_{23}(1,0,1),\\
(0,0,1) &= a_{31}(1,1,0) + a_{32}(0,1,1) + a_{33}(1,0,1)\,T.
\end{aligned}$$

Príklad 4.5 – pokračovanie

Riadkovo ekvivalentnými úpravami blokovej matice $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|\beta_1|\beta_2|\beta_3)$, kde vektory báz zapisujeme ako stĺpce matice, dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Všimnite si, že sme si tak ušetrili ;-) riešenie troch systémov o troch neznámych. A tak dostávame maticu prechodu v tvare

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad det\mathbf{A} = 1.$$

O správnosti riešenia sa presvedčíme overením rovnosti

$$\beta_i = a_{i1} \cdot \alpha_1 + a_{i2} \cdot \alpha_2 + a_{i3} \cdot \alpha_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Tvrdenie 4.8

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{A}}$ *a* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$ *sú súradnice vektora* γ *v bázach* $\mathcal{A}$ *a* $\mathcal{B}$*. Potom*

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

kde $\mathbf{A}$ *je matica prechodu z bázy* $\mathcal{A}$ *do bázy* $\mathcal{B}$*.*

Dôkaz:
Zo vzťahu

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{\beta}_i$$

po dosadení $\mathcal{B} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{A}$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{\beta}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j \sum_{i=1}^{n} y_i a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_j x_j.$$

čo je v maticovom tvare $\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$. Ale $\mathbf{A}$ je regulárna matica, takže je aj $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. ∎

Príklad 4.5 – pokračovanie

Nech $\gamma = (1,2,3)_{\mathcal{A}}$ *sú súradnice vektora* $\gamma \in \mathbb{V}_3$ *v báze* $\mathcal{A}$*.*
Nájdime jeho súradnice v báze $\mathcal{B}$*.*

K matici prechodu od bázy $\mathcal{A}$ k báze $\mathcal{B}$ nájdeme inverznú maticu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podľa vzťahu $\gamma_{\mathcal{B}} = \gamma_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bonusový príklad 4.2

Vytvorte program v Exceli (Calcu, Gnumericu):

1. Pre danú rozšírenú maticu nehomogénneho systému lineárnych rovníc $\widetilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}$
   a) (2b) rozhodne o riešiteľnosti systému,
   b) (3b) nájde riešenie systému pomocou Jordanovej eliminačnej metódy,
   c) (3b) nájde riešenie systému pomocou inverznej matice,
   d) (3b) nájdte riešenie systému pomocou Cramerovho pravidla,
   e) (4b) nájde všetky riešenia systému.
2. Pre danú maticu systému homogénneho systému lineárnych rovníc $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}_7^{5\times 5}$
   a) (2b) rozhodne o riešiteľnosti systému,
   b) (3b) nájde nenulové riešenie systému,
   c) (4b) nájde všetky riešenia systému.
3. Pre dve rôzne bázy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ toho istého vektorové priestoru $\mathbb{V}_5$ v poli reálnych čísel
   a) (3b) overí, že množiny vektorov $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ sú bázami,
   b) (4b) nájde maticu prechodu $\mathbf{A}$ z bázy $\mathcal{A}$ do bázy $\mathcal{B}$,
   c) (5b) vypočíta súradnice vektora $\mathbf{u}_{\mathcal{B}}$ zo súradníc vektora $\mathbf{u}_{\mathcal{A}}$.