ALGEBRA

Lineárne zobrazenia

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

7. decembra 2015

Motivácia

Majme v rovine zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a hľadajme takú priamku p prechádzajúcu začiatkom súradnicového systému, pre ktorú je $f(p) = p$, kde

$$p = \{t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}, \ \ f(p) = \{f(t\mathbf{u}) : t \in \mathbb{R}\} = \{tf(\mathbf{u}) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Musí existovať číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ a vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tak, aby $f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$.

Zvoľme v $\mathbb{R}^2$ nejakú bázu, napr. $\mathcal{B}_0 = \{(1,0),(0,1)\}$. Nech $\mathbf{x}$ sú súradnice vektora $\mathbf{u}$ v tejto báze a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je matica prechodu do nejakej inej bázy roviny. Potom musí platiť

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ t.j. } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Takže matica $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ musí byť singulárna, teda $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

Vlastný vektor a vlastná hodnota matice

Majme štvorcovú maticu $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{n \times n}$. Zobrazenie $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ definované systémom $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ nazývame lineárne zobrazenie.

Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{n \times n}$. Determinant matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ nazývame charakteristický polynóm matice $\mathbf{A}$. Rovnicu

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

nazývame charakteristickou rovnicou a jej korene sú vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$.

Ak λ je vlastná hodnota matice $\mathbf{A}$ [značíme $\lambda = \lambda(\mathbf{A})$], potom nenulový vektor $\mathbf{x}$, pre ktorý platí $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, nazývame vlastný vektor prislúchajúci k vlastnej hodnote λ.

Príklad 6.1

Hľadajme vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnica matice **A**

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

má tri rôzne korene, vlastné hodnoty $\lambda_1(\mathbf{A}) = 3, \lambda_2(\mathbf{A}) = 2$, $\lambda_3(\mathbf{A}) = 1$, ktorým prislúchajú tri vlastné vektory matice **A**

$$\mathbf{x}_1 = (1, -1, 1)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, -1)^T, \quad \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Vlastné vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$.

Tvrdenie 6.1

Vlastné vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ *prislúchajúce k rôznym vlastným hodnotám* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *sú lineárne nezávislé.*

Dôkaz: Matematickou indukciou podľa k.
Majme vlastné vektory $\mathbf{x}_j$ prislúchajúce navzájom rôznym vlastným hodnotám λ_j a nech $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \quad (\heartsuit)$. Platí

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{A}(\alpha_j\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\lambda_j\mathbf{x}_j.$$

Vynásobením $(\heartsuit)$ hodnotou λ_k a odčítaním od odvodenej rovnice dostaneme $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(\lambda_j - \lambda_k)\mathbf{x_j} = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j(\lambda_j - \lambda_k)\mathbf{x_j} = \mathbf{0}$.
Podľa indukčného predpokladu sú $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ lineárne nezávislé a preto $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_k) = 0$ pre $j = 1, 2, \dots, k-1$ ale $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sú navzájom rôzne, takže aj $\alpha_j = 0$. Potom z $(\heartsuit)$ je $\alpha_k\mathbf{x_k} = \mathbf{0}$ a teda $\alpha_k = 0$.

Diagonálnu maticu Λ s vlastnými hodnotami matice $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ na hlavnej diagonále nazývame spektrálny rozklad matice $\mathbf{A}$.

Ak je $\mathbf{x}_i$ vlastný vektor matice $\mathbf{A}$ prislúchajúci k vlastnej hodnote λ_i, potom rovnosti

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n,$$

môžeme zapísať tvare maticovej rovnosti

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\Lambda,$$

kde stĺpce matice $\mathbf{X}$ sú vlastné vektory matice $\mathbf{A}$.

Príklad 6.1 – pokračovanie

Λ je spektrálny rozklad matice $\mathbf{A}$, overte rovnosť $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\Lambda$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Príklad 6.2

Hľadajme vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnych matíc

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pre tieto matice je charakteristický polynóm

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda) = p_{\mathbf{C}}(\lambda) = p_{\mathbf{D}}(\lambda) = (2 - \lambda)^3,$$

tzn. že číslo $\lambda = 2$ je vlastnou hodnotou (trojnásobnou) všetkých štyroch matíc.

Príklad 6.2 – pokračovanie

Postupom z príkladu *6.1* zistíme, že vektory

$$\mathbf{x}_1 = (1,0,0)^T, \quad \mathbf{x}_2 = (0,1,0)^T, \quad \mathbf{x}_3 = (0,0,1)^T,$$

sú vlastnými vektormi matice $\mathbf{A}$, ktoré prislúchajú k vlastnému číslu 2. Každá nenulová lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ je tiež vlastným vektorom prislúchajúcim k tomu istému vlastnému číslu.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

Pre maticu $\mathbf{B}$ sú vlastnými vektormi len $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3$ (a ich ľubovoľná nenulová lineárna kombinácia). Pre maticu $\mathbf{C}$ sú potom len $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ a pre maticu $\mathbf{D}$ len vektor $\mathbf{x}_1$.

Poznámka

Vidíme, že počet lineárne nezávislých vlastných vektorov sa pri niektorých maticiach nerovná hodnosti matice, ale menší !

Podobné matice

Hovoríme, že dve štvorcové matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}^{n \times n}$ sú podobné, ak existuje taká regulárna matica $\mathbf{Q} \in \mathbb{P}^{n \times n}$, že platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \qquad (\spadesuit).$$

Tvrdenie 6.2

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm.

Dôkaz: Nech $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ je matica podobná s maticou $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned}
det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) &= det(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{Q}) \\
&= det(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{-1}\lambda\mathbf{E}\mathbf{Q}) \\
&= det(\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}) \\
&= det(\mathbf{Q}^{-1})det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})det(\mathbf{Q}) \\
&= det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}).
\end{aligned}$$

Príklad 6.3

Hľadajme vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dostávame $p_{\mathbf{B}}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ ako v príklade *6.1* s vlastnými hodnotami $\lambda_1(\mathbf{B}) = 3$, $\lambda_2(\mathbf{B}) = 2$, $\lambda_3(\mathbf{B}) = 1$, ale s inými vlastnými vektormi $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$

$$\lambda_1(\mathbf{B}) = 3; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\mathbf{y}_1,$$

$$\lambda_1(\mathbf{B}) = 2; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{y}_2,$$

$$\lambda_2(\mathbf{B}) = 1; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{y}_1,$$

Tvrdenie 6.3

Nech sú $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}^{n \times n}$ *podobné matice a* $\mathbf{Q} \in \mathbb{P}^{n \times n}$ *regulárna matica určená rovnosťou* (♠). *Ak je* $\mathbf{x}$ *vlastný vektor matice* $\mathbf{A}$, *potom je* $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}$ *vlastný vektor matice* $\mathbf{B}$ *prislúchajúci k tej istej vlastnej hodnote.*

Dôkaz:

Nech $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sú vlastné vektory podobných matíc $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ prislúchajúce vlastnej hodnote $\lambda = \lambda(\mathbf{A}) = \lambda(\mathbf{B})$. Potom zo vzťahu (♠) máme $\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ a po úprave $\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{Q}\mathbf{y}$. Ale $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ a tak $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ tzn. $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}$.

■

Poznámka

Z rovnosti vlastných hodnôt matíc však nevyplýva podobnosť matíc. (Overte !)

Príklad 6.3 – pokračovanie

Máme štvorcové matice **A** a **B**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Najskôr zistíme, či sú podobné t.j. či existuje regulárna matica **Q** vyhovujúca $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$. Maticu **Q** vypočítame z maticovej rovnosti $\mathbf{QB} = \mathbf{AQ}$, odkiaľ dostávame homogénny systém lineárnych rovníc s premennými $\mathbf{q} = (q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}, \ldots, q_{33})^T$ a s maticou systému **C**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Príklad 6.3 – pokračovanie

Jedným z netriválnych riešení homogénneho systému $\mathbf{Cq} = \mathbf{0}$ je regulárna matica $\mathbf{Q}$ zapísaná po riadkoch, ku ktorej vypočítame inverznú maticu $\mathbf{Q}^{-1}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zistili sme, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú podobné, preto môžeme použiť tvrdenie *6.3* pre výpočet vlastných vektorov $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ matice $\mathbf{B}$ pomocou známych vlastných vektorov $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 1)^T, \mathbf{x}_2 = (0, 1, -1)^T, \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)^T$ matice $\mathbf{A}$.

$$\lambda_1(\mathbf{B}) = \lambda_1(\mathbf{A}) = 3 \qquad \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2(\mathbf{B}) = \lambda_2(\mathbf{A}) = 2 \qquad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3(\mathbf{B}) = \lambda_3(\mathbf{A}) = 1 \qquad \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie 6.4

Nech $\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \mathbf{D} \in \mathbb{P}^{n \times n}$ *sú štvorcové matice. Nech* $\mathbf{Q}$ *obsahuje nenulové stĺpce a* $\mathbf{D}$ *je diagonálna matica. Potom platí*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}$$

práve vtedy, keď $\mathbf{D}$ *obsahuje vlastné hodnoty matice* $\mathbf{A}$ *a i-ty stĺpec matice* $\mathbf{Q}$ *obsahuje vlastný vektor prislúchajúci k i-tej vlastnej hodnote matice* $\mathbf{D}$*.*

Dôkaz:
Nech $\mathbf{D}$ má na diagonále prvky λ_i. Roznásobením rovnosti $\mathbf{AQ} = \mathbf{QD}$ po stĺpcoch matice $\mathbf{Q} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ dostaneme rovnosti $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$. Tieto rovnosti platia práve, keď λ_i sú vlastné hodnoty a $\mathbf{q}_i$ k nim prislúchajúci vlastný vektor.

■

Ak by bola $\mathbf{Q}$ regulárna, potom $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$. Takže $\mathbf{A}$ bude podobná s diagonálnou maticou $\mathbf{D}$.

Príklad 6.3

Ukážte, že matica **A** *z príkladu 6.1 je podobná s diagonálnou maticou.*

Matica **A** má tri lineárne nezávislé (vlastné) vektory

$$\mathbf{x}_1 = (1, -1, 1)^T, \mathbf{x}_2 = (0, 1, -1)^T, \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)^T$$

Platí $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie 6.5

Matica $\mathbf{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ *je podobná s diagonálnou maticou práve vtedy, keď má n lineárne nezávislých vlastných vektorov.*

Dôkaz:
Stačí tieto vektory napísať do sĺpcov matice $\mathbf{Q}$, ďalej zostaviť diagonálnu maticu z vlastných hodnôt matice $\mathbf{A}$. Platí rovnosť $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$.

$\blacksquare$

Tvrdenie 6.7 (Geršgorinove kruhy, 1931)

Všetky vlastné hodnoty matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ležia v zjednotení kruhov*

$$|z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (\bigstar).$$

Dôkaz:

Nech je λ vlastná hodnota matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, potom

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Môžeme predpokladať, že vektor $\mathbf{x}$ je normalizovaný tak, že jeho maximálna zložka, x_r, je 1. Potom z nerovnosti

$$\lambda - a_{rr} \leq \sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{rj},$$

vyplýva $(\bigstar)$.

Príklad 6.4

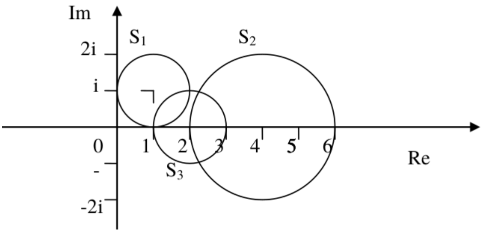
Lokalizujte spektrum (vlastné hodnoty) matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 0 \\ -1 & 4 & i \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zo vzťahu (★) máme tri kruhy určené riadkami matice,

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1+i)| \leq 1\},$$
$$S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 2\},$$
$$S_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\},$$

spektrum matice sa nachádza v zjednotení kruhov $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.



Bonusový príklad 6.1

1. (x3b) Nájdite (so skúškou správnosti) všetky vlastné hodnoty a vlastné vektory matíc

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (5b) Nájdite diagonálnu maticu, ktorá je podobná matici

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & -0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Vytvorte program v Exceli, ktorý načíta maticu $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ a
   a) (3b) lokalizuje a zobrazí spektrum matice $\mathbf{A}$,
   a) (4b) nájde vlastné vektory matice $\mathbf{A}$,
   c) (6b) nájde diagonálnu maticu $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$, ktorá je podobná matici $\mathbf{A}$.

Bonusový príklad 6.2

1. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Odvoďte nasledujúce tvrdenia a overte na ilustračnom príklade:
   a) (5b) $\lambda(\mathbf{A}^{-1}) = \lambda(\mathbf{A})^{-1}$.
   b) (6b) $\lambda(\mathbf{A}^{k}) = \lambda(\mathbf{A})^{k}$, k celé kladné číslo.
   c) (8b) Vlastné čísla symetrickej matice sú reálne.
   d) (10b) Vlastné vektory $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ symetrickej matice $\mathbf{A}$ zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám $\lambda_i \neq \lambda_j$ sú ortogonálne t.j. $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j = 0$.
2. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Odvoďte nasledujúce tvrdenia a overte na ilustračnom príklade:
   a) (6b) $\lambda(\mathbf{A}^{-1}) = \lambda(\mathbf{A})^{-1}$.
   b) (7b) $\lambda(\mathbf{A}^{k}) = \lambda(\mathbf{A})^{k}$, k celé kladné číslo.
   c) (8b) $\lambda(\mathbf{A}^{H}) = \overline{\lambda}(\mathbf{A})$, kde $\overline{\lambda}$ je číslo komplexne združené k λ a matica $\mathbf{A}^{H}$ je hermitovská ($a_{ij} = \overline{a}_{ji}$).