

Obyčajné diferenciálne rovnice

Rovnice prvého rádu

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a Operačnej Analýzy
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

6. apríla 2020

Diferenciálna rovnica

Pod diferenciálnou rovnicou rozumieme rovnicu v tvare

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ je funkcia $n + 2$ premenných definovaná na nejakej oblasti v \mathbb{R}^{n+2} .

Základné pojmy

Rád diferenciálnej rovnice

Najvyšší rád derivácie, ktorá sa v rovnici vyskytuje.

Integrálna krivka

Integrálna krivka diferenciálnej rovnice je krivka s rovnicou $y = \varphi(x)$, kde funkcia $\varphi(x)$ je riešením danej rovnice.

Rovnica prvého rádu

Definícia

Diferenciálne rovnica prvého rádu má všeobecný tvar

$$F(x, y, y') = 0,$$

kde $F(x, y, y')$ je funkcia troch premenných definovaná v nejakej oblasti v trojrozmernom priestore \mathbb{R}^3 .

Tvary rovnice prvého rádu

Normálny tvar

Normálny tvar diferenciálnej rovnice prvého rádu je

$$y' = f(x, y).$$

Tento tvar vznikne zo všeobecného, ak z neho možno deriváciu y' vyjadriť explicitne ako funkciu premenných x a y .

Tvary rovnice prvého rádu

Diferenciálny tvar

Diferenciálny tvar diferenciálnej rovnice prvého rádu je

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

kde $M(x, y)$ a $N(x, y)$ sú funkcie premenných x a y . Tento tvar vznikne z normálneho tak, že dosadíme

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{a} \quad f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Tvary rovnice prvého rádu

Symetrický tvar

Symetrický tvar diferenciálnej rovnice prvého rádu je

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}.$$

Geometrický význam

Smerové pole

Diferenciálna rovnica prvého rádu

$$y' = f(x, y)$$

prirad'uje každému bodu $[x, y]$ definičného oboru $D(f)$ funkcie f smernicu y' príslušného riešenia. Tak je v $D(f)$ určené pole smerov, **smerové pole**.

Toto smerové pole graficky znázorňujeme tak, že vykreslíme body $[x, y] \in D(f)$ a dotyčnice zodpovedajúcich integrálnych kriviek so smernicami $f(x, y)$ vyznačíme vektormi vychádzajúcimi z daných bodov.

Geometrický význam

Izoklíny

Ak položíme $y' = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, získame krivky spĺňajúce rovnicu $f(x, y) = c$, v jednotlivých bodoch týchto kriviek je danou rovnicou predepišaná rovnaká hodnota smernice c . Tieto krivky nazývame **izoklíny**.

Príklady

Zobrazte smerové polia diferenciálnych rovníc:

① $y' = x - y,$

② $y' = xy,$

③ $y' = x + y(1 - y),$

④ $y' = \cos 2x - \frac{x}{y}$

Začiatočná úloha

Začiatočnou úlohou rozumieme diferenciálnu rovnicu

$$y' = f(x, y)$$

so začiatočnou podmienkou

$$y(x_0) = y_0.$$

Geometricky to znamená, že integrálna krivka $y = \varphi(x)$ prechádza bodom $[x_0, y_0]$.

Metóda separácie premenných

Rovnica so separovanými premennými

Rovnicou **so separovanými premennými** nazývame diferenciálnu rovnicu, ktorú možno písať v tvare

$$p(y) \cdot y' = q(x),$$

kde $p(y)$ a $q(x)$ sú spojité funkcie.

Každú diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorá sa dá previesť na tento tvar nazývame rovnicou **so separovateľnými premennými**.

Prechod od rovnice so separovateľnými premennými ku tvaru rovnice so separovanými premennými nazývame **separáciou premenných**.

Metóda separácie premenných

Ak funkcia $y = \varphi(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$p(y) \cdot y' = q(x),$$

na nejakom intervale J , tak

$$p[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = q(x),$$

a po integrácii dostávame

$$\int p[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \int q(x) dx,$$

alebo

$$\int p(y) dy = \int q(x) dx.$$

Príklady

$$\textcircled{1} \quad y' = \cos x + \ln x,$$

$$\textcircled{2} \quad y' = \frac{1}{4+9x^2},$$

$$\textcircled{3} \quad y' = \sin y,$$

$$\textcircled{4} \quad y' = \frac{y^2-2y+5}{y+1},$$

$$\textcircled{5} \quad y' = \frac{1+y}{1-x},$$

$$\textcircled{6} \quad y' = \frac{y(1+x)}{x(y-1)},$$

$$\textcircled{7} \quad (y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0,$$

$$\textcircled{8} \quad y' = \sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$\textcircled{9} \quad y' = e^{x-y},$$

$$\textcircled{10} \quad (1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1 + y)dy = 0.$$

Homogénna rovnica

Homogénna rovnica

Pod **homogénnou rovnicou** rozumieme rovnicu, ktorú je možné zapísať v tvare

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Predpokladáme, že $f(u)$ je spojitá funkcia na intervale (a, b) .

Potom riešime substitúciou $u = \frac{y}{x}$, odkiaľ $y = u \cdot x$ a $y' = u + xu'$
Rovnica tak prejde do tvaru

$$u'x + u = f(u),$$

a túto rovnicu riešime separáciou premenných.

Príklady

- 1 $y' = \frac{y}{x} (1 + \ln \frac{y}{x}),$
- 2 $(x + 2y) dx - x dy = 0,$
- 3 $y' = -\frac{x+y}{x},$
- 4 $(2\sqrt{xy} - y) dx + x dy = 0,$
- 5 $2x^3 \cdot y' = y(2x^2 - y^2),$
- 6 $xy' = y - x e^{\frac{y}{x}},$
- 7 $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x},$
- 8 $(x^2 + y^2)y' = 2xy.$

$$\text{Rovnica } y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

Predpokladáme, že $f(u)$ je spojitá funkcia na intervale (a, b) . Ak by platilo $\gamma = c = 0$, tak by rovnica

$$y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

bola homogénna v prípade, že $\alpha b - \beta a \neq 0$, alebo v tvare $y' = \textit{konst.}$ ak by bolo $\alpha b - \beta a = 0$.

Budeme teda ďalej predpokladať, že platí

$$\gamma^2 + c^2 \neq 0.$$

$$\text{Rovnica } y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

Ak by platilo $\alpha b - \beta a = 0$, tak v prípade, že $\alpha = a = 0$ alebo $\beta = b = 0$, má rovnica separované premenné.

Nech teda platí $\alpha^2 + a^2 \neq 0$ a $\beta^2 + b^2 \neq 0$ a nech je napr. $b \neq 0$.

Potom z rovnice $\alpha b - \beta a = 0$ dostávame

$$\alpha = \frac{a\beta}{b} \Rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma = \frac{a\beta}{b}x + \beta y + \gamma = \frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma,$$

a rovnica má teda tvar

$$y' = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma}{ax + by + c}\right).$$

$$\text{Rovnica } y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

Rovnicu

$$y' = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

prevedieme substitúciou $ax + by = z$ na tvar

$$\frac{1}{b}(z' - a) = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}z + \gamma}{z + c}\right),$$

čo je rovnica so separovanými premennými.

Podobne postupujeme v prípade, že $b = 0$ a $\beta \neq 0$.

$$\text{Rovnica } y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

Ostáva teda vyriešiť prípad $\alpha b - \beta a \neq 0$. Existuje jediná dvojica čísiel h a k taká, že platí

$$\begin{aligned}\alpha h + \beta k + \gamma &= 0 \\ ah + bk + c &= 0\end{aligned}$$

Substitúciou $x = \xi + h$ a $y = \eta + k$ potom rovnicu upravíme na tvar

$$y' = f\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{a\xi + b\eta}\right).$$

$$\text{Rovnica } y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

Rovnicu

$$y' = f\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{a\xi + b\eta}\right).$$

d'alej prevedieme na tvar

$$y' = f\left(\frac{\alpha + \beta\frac{\eta}{\xi}}{a + b\frac{\eta}{\xi}}\right),$$

čo je opäť homogénna rovnica.

Príklady

- 1 $y' = \frac{x+y-3}{x+y-1},$
- 2 $(3y - 7x + 7) dx + (3x - 7y - 3) dy = 0,$
- 3 $(x - y) dx + (2y - x + 1) dy = 0,$
- 4 $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3},$
- 5 $(x + x + 1) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0,$
- 6 $y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2.$

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Lineárna rovnica

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu nazývame **lineárnou**, ak ju možno písať v tvare

$$y' = a(x)y + b(x).$$

O funkciách $a(x)$ a $b(x)$ predpokladáme, že sú spojité.

Ak je $b(x) \equiv 0$, nazývame ju homogénnou.

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Homogénna lineárna diferenciálna rovnica je rovnicou so separovanými premennými

$$y' = a(x)y.$$

Riešenie $y \equiv 0$ nazývame **triviálne**. Pre netriviálne riešenia máme

$$\frac{dy}{y} = a(x) dx$$

odkiaľ

$$\ln y = \int a(x) dx,$$

čo zapisujeme aj v tvare

$$y = C \cdot \exp \left\{ \int a(x) dx \right\}.$$

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Ak je $b(x) \neq 0$, hovoríme o nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici. Jej riešenie určíme metódou **variácie konštant**. Jej podstatou je hľadanie riešenia v tvare

$$y = C(x) \cdot \exp \left\{ \int a(x) dx \right\}.$$

Teda integračnú konštantu v riešení homogénnej rovnice považujeme za funkciu premennej x . Derivovaním dostávame

$$y' = C'(x) \cdot \exp \left\{ \int a(x) dx \right\} + C(x) \cdot \exp \left\{ \int a(x) dx \right\} \cdot a(x).$$

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Po dosadení do rovnice

$$y' = a(x) \cdot y + b(x),$$

sa na oboch stranách rovnice objavia členy

$$C(x) \cdot \exp \left\{ \int a(x) dx \right\} \cdot a(x).$$

Po ich vzájomnom vyrušení získame diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $C(x)$ v tvare

$$C'(x) \cdot \exp \left\{ \int a(x) dx \right\} = b(x),$$

čo je opäť rovnica so separovanými premennými.

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Riešením poslednej rovnice dostávame

$$C(x) = \int b(x) \exp \left\{ - \int a(x) dx \right\} dx,$$

a pre riešenie pôvodnej nehomogénnej rovnice tak platí

$$y = \exp \left\{ \int a(x) dx \right\} \cdot \left(\int b(x) \exp \left\{ - \int a(x) dx \right\} dx + K \right),$$

kde K je integračná konštanta.

Príklady

- 1 $y' = \frac{2}{x \ln x} y + \frac{1}{x},$
- 2 $x^2 y' + xy + 1 = 0,$
- 3 $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$
- 4 $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2,$
- 5 $y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y},$
- 6 $y' \cotg x + y = 2, \quad y(0) = -1,$
- 7 $y' + 2xy = 2x e^{-x^2},$
- 8 $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x},$
- 9 $y' - \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3.$

Bernoulliho diferenciálna rovnica

Bernoulliho rovnica

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu nazývame **Bernoulliho**, ak ju možno písať v tvare

$$y' = a(x)y + b(x)y^r,$$

kde r je konštanta.

O funkciách $a(x)$ a $b(x)$ predpokladáme, že sú spojité a $b(x) \neq 0$.

Taktiež predpokladáme $r \neq 0$ a $r \neq 1$.

Bernoulliho diferenciálna rovnica

Riešime substitúciou

$$y^{1-r} = u.$$

Derivovaním dostávame

$$(1-r)y^{-r}y' = u',$$

a rovnica sa transformuje na rovnicu

$$u' = (1-r)a(x)u + (1-r)b(x),$$

čo je lineárna rovnica, ktorú riešime metódou variácie konštánt.

Príklady

- 1 $y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{y},$
- 2 $y' + xy = x^3y^2,$
- 3 $y' + yx = x^3y^3,$
- 4 $(1 - x^2)y' - xy = \alpha xy^2,$
- 5 $(y \ln x - 2)y dx = x dy,$
- 6 $y - y' \cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x),$
- 7 $xy' + 2y + x^5y^3 e^x = 0,$
- 8 $y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x,$
- 9 $xy dy = (y^2 + x) dx.$

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Rovnica v tvare

$$F(x, y, y') = 0.$$

V tomto prípade je zvykom označovať $y' = p$ a rovnicu zapísať v tvare

$$F(x, y, p) = 0.$$

Riešenie nájdeme tzv. **metódou derivovania** v parametrickom tvare.

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Rovnice, v ktorých sa nevyskytuje neznáma funkcia y , tj. rovnice

$$F(x, y') = 0.$$

Môžu vzniknúť dve špecifické situácie:

$$y' = f(x),$$

čo je rovnica so separovanými premennými, alebo

$$x = g(y') \quad \text{teda} \quad x = g(p).$$

Ďalej sa venujeme druhému prípadu.

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Zo vzťahu

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad dy = p dx,$$

a z rovnice

$$x = g(p) \quad \Rightarrow \quad dx = g'(p) dp$$

máme

$$dy = g'(p) \cdot p dp \quad \Rightarrow \quad y = \int g'(p) \cdot p dp.$$

Parametrické vyjadrenie riešenia teda je

$$x = g(p), \quad y = \int g'(p) \cdot p dp.$$

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Rovnice, v ktorých sa nevyskytuje premenná x , tj. rovnice

$$F(y, y') = 0.$$

Premennú x považujeme za funkciu premennej y , takže platí

$$y' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

čím je rovnica prevedená na predchádzajúci tvar.

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Rovnice, v ktorých sa nevyskytuje premenná x , tj. rovnice

$$F(y, y') = 0.$$

Ak je možné rovnicu previesť na tvar

$$y = \alpha(y') \quad \text{teda} \quad y = \alpha(p).$$

Ďalej platí $p = \frac{dy}{dx}$ odkiaľ

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\alpha'(p)}{p} dp \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{\alpha'(p)}{p} dp.$$

Parametrické vyjadrenie riešenia teda je

$$y = \alpha(p), \quad x = \int \frac{\alpha'(p)}{p} dp.$$

Príklady

- 1 $e^{y'} + y' = x,$
- 2 $y'^3 - 3xy' + x^3 = 0,$
- 3 $x = y' + \ln y',$
- 4 $y = y'^2 + 3,$
- 5 $y = y'^2 - y'x + \frac{1}{2}x^2,$
- 6 $y'^2 e^{y'} = y,$
- 7 $y(1 + y'^2) = 2a$ kde $a \in \mathbb{R},$
- 8 $y = y'^2 + 2y'^3.$

Lagrangeova rovnica

Rovnica tvaru

$$y = x \cdot \alpha(y') + \beta(y').$$

Položíme $y' = p$ a dostávame rovnicu

$$y = x \cdot \alpha(p) + \beta(p).$$

Derivovaním podľa x dostávame

$$p = \alpha(p) + x \cdot \alpha'(p) \frac{dp}{dx} + \beta'(p) \frac{dp}{dx},$$

odkiaľ

$$x' + \frac{\alpha'(p)}{\alpha(p) - p} x = -\frac{\beta'(p)}{\alpha(p) - p},$$

čo je lineárna diferenciálna rovnica.

Príklady

- 1 $y = 2xy' + y'^2,$
- 2 $y = xy'(y' + 2),$
- 3 $y = y'x + \frac{a}{y'}$ kde $a \in \mathbb{R},$
- 4 $y = y'x - 3y'^3.$