

# Obyčajné diferenciálne rovnice

Lineárna diferenciálna rovnica  $n$ -tého rádu s konštantnými koeficientmi

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a Operačnej Analýzy  
Fakulta Riadenia a Informatiky  
Žilinská Univerzita v Žiline

7. apríla 2020

# Lineárna diferenciálna rovnica $n$ -tého rádu s konštantnými koeficientmi

Je rovnica v tvare

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (1)$$

kde  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  a predpokladáme  $a_n \neq 0$ .

Ak  $f(x) \equiv 0$  nazývame ju **homogénna** a ak  $f(x) \neq 0$ , tak hovoríme o rovnici **nehomogénnej**.

Každé riešenie rovnice (1) je súčtom všeobecného a partikulárneho riešenia.

# Lineárna diferenciálna rovnica $n$ -tého rádu s konštantnými koeficientmi

**Všeobecným riešením** rovnice (1) rozumieme riešenia pridruženej homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

**Partikulárnym riešením** rovnice (1) rozumieme ľubovoľné riešenie pôvodnej nehomogénnej rovnice.

# Fundamentálny systém riešení

Hovoríme, že funkcie  $y_1, \dots, y_n$  tvoria **fundamentálny systém riešení** rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

ak ich **wronskián**

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & , & y_2 & , \dots , & y_n \\ y_1' & , & y_2' & , \dots , & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & , & y_2^{(n-1)} & , \dots , & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

je rôzny od nuly.

# Charakteristická rovnica

Charakteristickou rovnicou rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

nazývame rovnicu

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

# Jednoduché reálne korene

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

má len jednoduché reálne korene  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Potom fundamentálny systém riešení tvoria funkcie

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}.$$

Všeobecné riešenie má teda tvar

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

## Násobný reálny koreň

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

má  $m$ -násobný reálny koreň  $\lambda$ , tak funkcie

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x},$$

sú lineárne nezávislými riešeniami homogénnej rovnice.

Sú teda súčasťou fundamentálneho systému riešení.

# Jednoduché komplexné korene

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

má jednoduchý komplexný koreň  $\lambda = \alpha + \beta i$ , tak má aj komplexne združený koreň  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ . Týmto koreňom zodpovedajú riešenia v tvare

$$e^{(\alpha+\beta i)x}, e^{(\alpha-\beta i)x},$$

odkiaľ s pomocou Eulerových vzťahov dostávame riešenia

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x.$$



# Násobné komplexné korene

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

má  $m$ -násobný komplexný koreň  $\lambda = \alpha + \beta i$ , tak má aj komplexne združený koreň  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$  rovnakej násobnosti. Týmto koreňom zodpovedajú riešenia v tvare

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+\beta i)x}, x e^{(\alpha+\beta i)x}, \dots, x^{m-1} e^{(\alpha+\beta i)x}, \\ e^{(\alpha-\beta i)x}, x e^{(\alpha-\beta i)x}, \dots, x^{m-1} e^{(\alpha-\beta i)x}, \end{aligned}$$

odkiaľ opäť s pomocou Eulerových vzťahov dostávame riešenia

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

# Príklady

Určte fundamentálny systém riešení a všeobecné riešenie rovnice

①  $y'' - 5y' - 6y = 0,$

②  $y'' + 3y' + 2y = 0,$

③  $y'' + 5y' - 2y = 0,$

④  $y'' - 6y' + 13y = 0,$

⑤  $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0,$

⑥  $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0,$

⑦  $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0,$

⑧  $y''' + 8y'' + 25y' + 26y = 0,$

⑨  $y''' + 4y'' + 4y' - 9y = 0.$

# Variácia konštant

Hľadáme riešenie nehomogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Nech funkcie  $y_1, \dots, y_n$  tvoria fundamentálny systém riešení rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice hľadáme v tvare

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n.$$

# Variácia konštánt

Derivovaním a dosadením do pôvodnej rovnice dostávame pre derivácie funkcií  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$  systém rovníc

$$C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0$$

$$C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0$$

.....

$$C_1' y_1^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_n}$$

# Príklady

Určte riešenie diferenciálnej rovnice:

$$\textcircled{1} \quad y''' - 2y'' + y' = \frac{e^x}{1+x}$$

$$\textcircled{2} \quad y'' - y' = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$\textcircled{3} \quad 2y'' + 5y' = \cos^2 x$$

$$\textcircled{4} \quad y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}$$

$$\textcircled{5} \quad y'' + y = -\operatorname{cotg}^2 x$$

## Špeciálny tvar pravej strany

Ak pravá strana rovnice má niektorý z tvarov:

- $P_m(x)$ ,
- $P_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ ,
- $P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,
- $P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x$ ,

kde  $P_m(x)$  je polynóm stupňa  $m$ , tak partikulárne riešenie môžeme určiť metódou tzv. **neurčitých koeficientov**.

Riešenie hľadáme v rovnakom tvare ako je pravá strana rovnice tak, že dourčíme neznáme (neurčité) koeficienty.

## Pravá strana $P_m(x)$

Ak nula nie je koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = Q_m(x)$$

kde  $Q_m(x)$  je polynóm rovnakého stupňa ako  $P_m(x)$ .

Ak nula je  $k$ -násobným koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = x^k \cdot Q_m(x)$$

kde  $Q_m(x)$  je opäť polynóm rovnakého stupňa ako  $P_m(x)$ .

Pravá strana  $P_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ 

Ak  $\alpha$  nie je koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$$

kde  $Q_m(x)$  je polynóm rovnakého stupňa ako  $P_m(x)$ .

Ak  $\alpha$  je  $k$ -násobným koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$$

kde  $Q_m(x)$  je opäť polynóm rovnakého stupňa ako  $P_m(x)$ .



Pravá strana  $P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x$  alebo  $P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x$

Ak  $\alpha + i\beta$  nie je koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = Q_{1m}(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{2m}(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x$$

kde  $Q_{1m}(x)$  a  $Q_{2m}(x)$  sú polynómy rovnakého stupňa ako  $P_m(x)$ .

Ak  $\alpha + i\beta$  je  $k$ -násobným koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = x^k (Q_{1m}(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{2m}(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x)$$

kde  $Q_{1m}(x)$  a  $Q_{2m}(x)$  sú opäť polynómy rovnakého stupňa ako  $P_m(x)$ .

# Príklady

Určte všetky riešenia rovnice

- 1  $y'' - 4y' + 4y = x^2,$
- 2  $y^{(4)} - 2y'' - y' = x^2 - 2x + 2,$
- 3  $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3x e^x,$
- 4  $y'' + y' - 2y = x e^{-2x},$
- 5  $y'' - y = x \cos x e^x,$
- 6  $y'' + 4y = x \sin 2x,$
- 7  $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = (x + 1) e^x,$
- 8  $y'' + y = \sin x - 2 e^{-x}$
- 9  $y'' + 3y' = 9x,$
- 10  $y'' - y = (x - 1) \sin 2x.$