Systémy obyčajných diferenciálnych rovníc

Systém lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientmi

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a Operačnej Analýzy
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

16. apríla 2020

Systém lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientmi

Budeme sa zaoberať systémom rovníc v tvare

$$\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{array} \tag{1}$$

alebo maticovo

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

Ak $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$, tak systém nazývame homogénny.

Fundamentálny systém riešení

Každý systém n lineárne nezávislých riešení systému $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ nazývame fundamentálny systém riešení.

Ak $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ je fundamentálny systém riešení systému $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, tak každé riešenie tohto systému je možné písať v tvare

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n.$$

Reálne jednoduché vlastné hodnoty

Nech matica A má n rôznych reálnych vlastných hodnôt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Potom existuje n lineárne nezávislých vlastných vektorov tejto matice $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$.

Fundamentálny systém riešení potom tvoria riešenia

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{h}_1 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathbf{y}_2 = \mathbf{h}_2 \, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \dots, \mathbf{y}_n = \mathbf{h}_n \, \mathrm{e}^{\lambda_n x} .$$

a každé riešenie možno písať v tvare

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{h}_1 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathbf{h}_2 \, \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n \mathbf{h}_n \, \mathrm{e}^{\lambda_n x} .$$

Príklady

1. $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 12y_1 - y_2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 5y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

Komplexné jednoduché vlastné hodnoty

Ak je $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\,\omega$ vlastná hodnota, tak aj komplexne združené číslo $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\,\omega$ je vlastnou hodnotou.

Označme vlastný vektor zodpovedajúci vlastnej hodnote λ ako $\mathbf{g} + \mathrm{i}\,\mathbf{h}$.

Dvojici vlastných hodnôt λ a $\overline{\lambda}$ potom zodpovedajú lineárne nezávislé riešenia

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{g}\cos\omega x - \mathbf{h}\sin\omega x)\,\mathrm{e}^{\sigma x} \\ \mathbf{v} &= (\mathbf{g}\sin\omega x + \mathbf{h}\cos\omega x)\,\mathrm{e}^{\sigma x} \end{aligned}$$

Príklady

1. $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -3y_1 + y_2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

Viacnásobné vlastné hodnoty

Nech matica A má k–násobnú vlastnú hodnotu λ. Ak existuje k lineárne nezávislých vlastných vektorov tejto matice zodpovedajúcich λ, postupujeme rovnako ako pri jednoduchých vl. hodnotách.

Ak je m vlastných vektorov lineárne závislých, definujeme reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ rovnicami:

$$
\begin{aligned}
(A - \lambda E)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \\
(A - \lambda E)\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(A - \lambda E)\mathbf{v}_m &= \mathbf{v}_{m-1}
\end{aligned}
$$

Viacnásobné vlastné hodnoty

Ak $\xi_1, \dots, \xi_m$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov, zodpovedajúcich vlastnej hodnote λ, tak zodpovedajúce lineárne nezávislé riešenia sú:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \xi_1 \, e^{\lambda x} \\
\mathbf{w}_2 &= (\xi_2 + \xi_1 x) \, e^{\lambda x} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{w}_m &= \left(\xi_m + \frac{1}{1!}\xi_{m-1} x + \dots + \frac{1}{(m-1)!}\xi_1 x^{m-1}\right) e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

Príklady

1. $$\begin{aligned} y_1' &= && y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 && \quad + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 && \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 && \\ y_2' &= \quad\;\, - y_2 && + 4y_3 \\ y_3' &= \quad y_1 && - 4y_3 \end{aligned}$$

Nehomogénny systém

Metóda variácie konštánt

Uvažujme nehomogénny systém:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Nech funkcie $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ tvoria fundamentálny systém riešení príslušného homogénneho systému

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{3}$$

Nehomogénny systém

Metóda variácie konštánt

Partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p = (y_{1p}, y_{1p}, \ldots, y_{1p})$ určíme v tvare

$$\begin{aligned} y_{1p} &= C_1(x)y_{11} + C_2(x)y_{21} + \ldots + C_n(x)y_{n1} \\ y_{2p} &= C_1(x)y_{12} + C_2(x)y_{22} + \ldots + C_n(x)y_{n2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{np} &= C_1(x)y_{1n} + C_2(x)y_{2n} + \ldots + C_n(x)y_{nn} \end{aligned} \tag{4}$$

Funkcie $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ volíme tak, aby vyhovovali systému rovníc

$$\begin{aligned} f_1(x) &= C_1'y_{11} + C_2'y_{21} + \ldots + C_n'y_{n1} \\ f_2(x) &= C_1'y_{12} + C_2'y_{22} + \ldots + C_n'y_{n2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) &= C_1'y_{1n} + C_2'y_{2n} + \ldots + C_n'y_{nn} \end{aligned} \tag{5}$$

Nehomogénny systém

Metóda variácie konštánt

Riešenie začiatočnej úlohy:

Veta

Nech $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x) \cdot \mathbf{C}$ je všeobecné riešenie systému (3). Potom vektor

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

je riešením systému (2), spĺňajúcim začiatočnú podmienku $\mathbf{y}(x_0) = 0$.

Príklady

1. $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \cos x \\ y_2' &= -y_1 + 1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + 2\sin x \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ y_2' &= -y_1 + \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1} \\ y_2' &= 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1} \end{aligned}$$

Nehomogénny systém

Špeciálny tvar pravej strany $\mathbf{f}(x) = \mathbf{P}_m(x)$

Veta

Nech $\mathbf{f}(x) = \mathbf{P}_m(x)$ je vektor, ktorého zložky sú polynómy stupňa nanajvýš m a nech nula nie je vlastnou hodnotou matice A, teda $|A| \neq 0$. Potom existuje partikulárne riešenie systému (2), ktorého zložky sú taktiež polynómy stupňa nanajvýš m.

Príklady

1. $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + x \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 - 1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 + 5x \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 + 2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 + 2 \end{aligned}$$

Nehomogénny systém

Špeciálny tvar pravej strany $\mathbf{f}(x) = e^{\alpha x}\,\mathbf{P}_m(x)$

Veta

Nech $\mathbf{f}(x) = e^{\alpha x}\,\mathbf{P}_m(x)$, kde $\mathbf{P}_m(x)$ je vektor, ktorého zložky sú polynómy stupňa nanajvýš m. Potom substitúciou

$$\mathbf{y} = e^{\alpha x}\,\mathbf{u}$$

získame systém, ktorého nehomogénne členy sú polynómy stupňa nanajvýš m.

Príklady

1.
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 + e^x \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - x\,e^x \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 + 4\,e^{5x} \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + 1 + e^x \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 \end{aligned}$$

Nehomogénny systém

Špeciálny tvar pravej strany $\mathbf{f}(x) = \mathbf{P}_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \mathbf{f}(x) = \mathbf{P}_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$

Veta

Nech α, β sú reálne čísla a nech $\mathbf{f}_1(x) = \mathbf{P}_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ a $\mathbf{f}_2(x) = \mathbf{P}_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$. Ak je $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathrm{i}\,\mathbf{v}$ riešením systému rovníc

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{P}_m(x)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)x},$$

tak $\mathbf{u}$ je riešením systému

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}_1(x)$$

a $\mathbf{v}$ je riešením systému

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}_2(x)$$

Príklady

1.
$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + 2y_2 + 5\sin 2x \\ y_2' &= 2y_1 - 5y_2 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \cos x \\ y_2' &= y_1 - y_2 + x \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - 5\,\mathrm{e}^x \sin x \end{aligned}$$