Matematická analýza 1

2018/2019

11. Neurčitý integrál

Obsah

Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

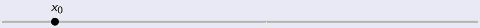
Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t) = 2t + 2$, $t \in \langle 0; \infty)$.

Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2,\ t\in\langle 0;\infty)$.

V čase $t_0=0$ sa nachádza v bode x_0.



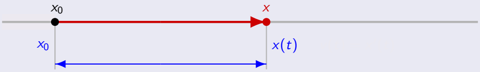
Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2$, $t\in\langle 0;\infty)$.

V čase $t_0=0$ sa nachádza v bode x_0.

Hľadáme funkciu $x(t)$, $t\in\langle 0;\infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,



Primitívna funkcia

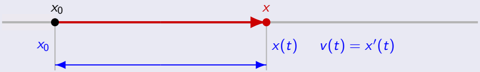
Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2,\ t\in\langle 0;\infty)$.

V čase $t_0=0$ sa nachádza v bode x_0.

Hľadáme funkciu $x(t),\ t\in\langle 0;\infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,

t. j. aby platilo $x'(t)=v(t)=2t+2,\ t\in\langle 0;\infty)$



Primitívna funkcia

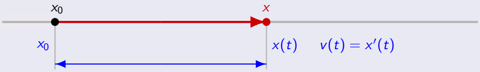
Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2$, $t\in\langle 0;\infty)$.

V čase $t_0 = 0$ sa nachádza v bode x_0.

Hľadáme funkciu $x(t)$, $t\in\langle 0;\infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,

t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t+2$, $t\in\langle 0;\infty)$ a $x(t_0) = x(0) = x_0$.



Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2$, $t\in\langle 0;\infty)$.

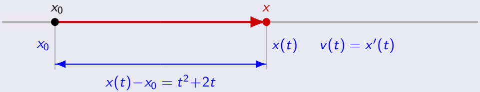
V čase $t_0 = 0$ sa nachádza v bode x_0.

Hľadáme funkciu $x(t)$, $t\in\langle 0;\infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,

t. j. aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2$, $t\in\langle 0;\infty)$ a $x(t_0) = x(0) = x_0$.

Prvej podmienke vyhovuje

každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c$, $t\in\langle 0;\infty)$, kde $c\in R$ je ľubovoľné.



Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2,\ t\in\langle 0;\infty)$.

V čase $t_0=0$ sa nachádza v bode x_0.

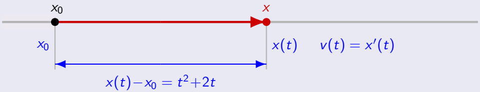
Hľadáme funkciu $x(t),\ t\in\langle 0;\infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,

t. j. aby platilo $x'(t)=v(t)=2t+2,\ t\in\langle 0;\infty)$ a $x(t_0)=x(0)=x_0$.

Prvej podmienke vyhovuje

každá funkcia $x(t)=t^2+2t+c,\ t\in\langle 0;\infty)$, kde $c\in R$ je ľubovoľné.

Ešte musíme určiť $c\in R$ tak, aby $x(0)=x_0$, t. j. $x_0=0^2+2\cdot 0+c=c$,



Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2$, $t\in\langle 0;\infty)$.

V čase $t_0=0$ sa nachádza v bode x_0.

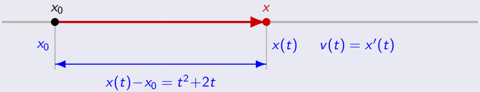
Hľadáme funkciu $x(t)$, $t\in\langle 0;\infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,

t. j. aby platilo $x'(t)=v(t)=2t+2$, $t\in\langle 0;\infty)$ a $x(t_0)=x(0)=x_0$.

Prvej podmienke vyhovuje

každá funkcia $x(t)=t^2+2t+c$, $t\in\langle 0;\infty)$, kde $c\in R$ je ľubovoľné.

Ešte musíme určiť $c\in R$ tak, aby $x(0)=x_0$, t. j. $x_0=0^2+2\cdot 0+c=c$, potom $c=x_0$.



Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2$, $t\in\langle 0;\infty)$.

V čase $t_0=0$ sa nachádza v bode x_0.

Hľadáme funkciu $x(t)$, $t\in\langle 0;\infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,

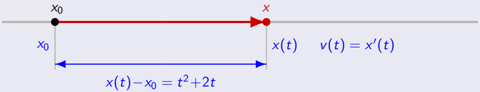
t. j. aby platilo $x'(t)=v(t)=2t+2$, $t\in\langle 0;\infty)$ a $x(t_0)=x(0)=x_0$.

Prvej podmienke vyhovuje

každá funkcia $x(t)=t^2+2t+c$, $t\in\langle 0;\infty)$, kde $c\in R$ je ľubovoľné.

Ešte musíme určiť $c\in R$ tak, aby $x(0)=x_0$, t. j. $x_0=0^2+2\cdot 0+c=c$, potom $c=x_0$.

Hľadanou funkciou dráhy pohybu je $x(t)=t^2+2t+x_0$, $t\in\langle 0;\infty)$.



Primitívna funkcia

Dráha pohybu bodu v čase t s rýchlosťou $v(t)$.

Bod sa pohybuje po priamke rýchlosťou $v(t)=2t+2,\ t\in\langle 0;\infty)$.

V čase $t_0=0$ sa nachádza v bode x_0.

Hľadáme funkciu $x(t),\ t\in\langle 0;\infty)$, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu,

t. j. aby platilo $x'(t)=v(t)=2t+2,\ t\in\langle 0;\infty)$ a $x(t_0)=x(0)=x_0$.

Prvej podmienke vyhovuje

každá funkcia $x(t)=t^2+2t+c,\ t\in\langle 0;\infty)$, kde $c\in R$ je ľubovoľné.

Ešte musíme určiť $c\in R$ tak, aby $x(0)=x_0$, t. j. $x_0=0^2+2\cdot 0+c=c$, potom $c=x_0$.

Hľadanou funkciou dráhy pohybu je $x(t)=t^2+2t+x_0,\ t\in\langle 0;\infty)$.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I,

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I,

ak:
- pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I,

ak:
- pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I,

ak:
- pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I,

ak:
- pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.

Ak by bol interval I uzavretý alebo polouzavretý,
potom v krajných bodoch myslíme jednostranné derivácie.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I,

ak:
- pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.

Ak by bol interval I uzavretý alebo polouzavretý,
potom v krajných bodoch myslíme jednostranné derivácie.

V ľavom krajnom bode deriváciu sprava. 

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

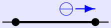
Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna k funkcii** $f(x)$, $x \in I$ **na intervale** I,

ak:
- pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.

Ak by bol interval I uzavretý alebo polouzavretý,

potom v krajných bodoch myslíme jednostranné derivácie.



V pravom krajnom bode deriváciu zľava.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I,

ak:
- pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.

Ak by bol interval I uzavretý alebo polouzavretý,
potom v krajných bodoch myslíme jednostranné derivácie.

V ľavom krajnom bode deriváciu sprava.  V pravom krajnom bode deriváciu zľava.

Primitívna funkcia

$f(x),\ x\in I$ je funkcia, $\quad I\subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x),\ x\in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x),\ x\in I$ na intervale I,

ak:
- pre všetky $x\in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x\in I$ platí $F'(x)=f(x)$.

Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I\subset R$.

Ak by bol interval I uzavretý alebo polouzavretý,

potom v krajných bodoch myslíme jednostranné derivácie.

V ľavom krajnom bode deriváciu sprava.  V pravom krajnom bode deriváciu zľava.

$f(x),\ x\in I$ je funkcia, $\quad I\subset R$ je otvorený interval.

$F(x),\ x\in I$ je primitívna k funkcii $f(x),\ x\in I$ na intervale I

$\Longrightarrow$ funkcia F je na intervale I spojitá.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I,

ak:
- pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$,
- pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.

Ak by bol interval I uzavretý alebo polouzavretý,
potom v krajných bodoch myslíme jednostranné derivácie.

V ľavom krajnom bode deriváciu sprava.  V pravom krajnom bode deriváciu zľava.

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je otvorený interval.

$F(x)$, $x \in I$ je primitívna k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I

$\xRightarrow{\text{definícia primitívnej funkcie}}$ funkcia F je na intervale I spojitá.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval, $c \in R$ [konštanta].

$F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I

$G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na I.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval, $c \in R$ [konštanta].

$F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na I.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval, $c \in R$ [konštanta].

$F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na I.

Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x)+c]' = F'(x)+c' = f(x)+0 = f(x)$,

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval, $c \in R$ [konštanta].

$F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na I.

Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x)+c]' = F'(x)+c' = f(x)+0 = f(x)$,

t. j. funkcia $G(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I.

Primitívna funkcia

$f(x),\ x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval, $c \in R$ [konštanta].

$F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow\ G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na I.

Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x)+c]' = F'(x)+c' = f(x)+0 = f(x)$,

t. j. funkcia $G(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I.

$f(x),\ x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

$F(x),\ G(x)$ sú primitívne k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow\ (F - G)(x)$ je konštantná funkcia na intervale I

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval, $c \in R$ [konštanta].

$F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na I.

Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x)+c]' = F'(x)+c' = f(x)+0 = f(x)$,

t. j. funkcia $G(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I.

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

$F(x)$, $G(x)$ sú primitívne k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $(F-G)(x)$ je konštantná funkcia na intervale I.

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval, $c \in R$ [konštanta].

$F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na I.

Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x)+c]' = F'(x)+c' = f(x)+0 = f(x)$,

t. j. funkcia $G(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I.

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

$F(x)$, $G(x)$ sú primitívne k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $(F-G)(x)$ je konštantná funkcia na intervale I.

Pre všetky $x \in I$ platí

$$(F-G)'(x) = \left[F(x)-G(x)\right]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0,$$

Primitívna funkcia

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval, $c \in R$ [konštanta].

$F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $G(x) = F(x) + c$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na I.

Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = [F(x)+c]' = F'(x)+c' = f(x)+0 = f(x)$,

t. j. funkcia $G(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I.

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

$F(x)$, $G(x)$ sú primitívne k $f(x)$ na intervale I

$\Rightarrow$ $(F-G)(x)$ je konštantná funkcia na intervale I.

Všetky primitívne funkcie k danej funkcii f sa na intervale I líšia o konštantu.

Pre všetky $x \in I$ platí

$$(F-G)'(x) = \left[F(x)-G(x)\right]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0,$$

t. j. funkcia $F-G$ je konštantná na intervale I.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

$F(x)$ – primitívna funkcia [ľubovoľná z primitívnych funkcií]

- Na určenie $\int f(x)\,dx$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$, $x \in I$, $c \in R$.

- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$, $x \in I$, $c \in R$.

začiatok integrálu [integračný znak]

- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$,

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.
Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

začiatok integrálu [integračný znak] koniec integrálu [diferenciál x]

- Na určenie $\int f(x)\,dx$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$, na konci symbolom diferenciálu dx

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.
Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$, $x \in I$, $c \in R$.

začiatok integrálu [integračný znak] koniec integrálu [diferenciál x]

- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$, na konci symbolom diferenciálu $\mathrm{d}x$ [zátvorky medzi $\int$ a $\mathrm{d}x$ nie sú nutné, ale doporučujú sa].

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$, $x \in I$, $c \in R$.

→ definičný obor [obor definície]

- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$, na konci symbolom diferenciálu $\mathrm{d}x$ [zátvorky medzi $\int$ a $\mathrm{d}x$ nie sú nutné, ale doporučujú sa].
- Ak nie je obor definície integrálu zadaný,

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.
Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $x \in I$, $c \in R$.

definičný obor [obor definície]

- Na určenie $\int f(x)\,dx$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$, na konci symbolom diferenciálu dx [zátvorky medzi $\int$ a dx nie sú nutné, ale doporučujú sa].
- Ak nie je obor definície integrálu zadaný, potom myslíme maximálny interval, resp. zjednotenie intervalov, na ktorých integrál existuje.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

integračná funkcia [integrand]

- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$, na konci symbolom diferenciálu $\mathrm{d}x$ [zátvorky medzi $\int$ a $\mathrm{d}x$ nie sú nutné, ale doporučujú sa].
- Ak nie je obor definície integrálu zadaný, potom myslíme maximálny interval, resp. zjednotenie intervalov, na ktorých integrál existuje.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$, $x \in I$, $c \in R$.

integračná premenná

- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$, na konci symbolom diferenciálu $\mathrm{d}x$ [zátvorky medzi $\int$ a $\mathrm{d}x$ nie sú nutné, ale doporučujú sa].
- Ak nie je obor definície integrálu zadaný, potom myslíme maximálny interval, resp. zjednotenie intervalov, na ktorých integrál existuje.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

integračná konštanta

- Na určenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$, na konci symbolom diferenciálu $\mathrm{d}x$ [zátvorky medzi $\int$ a $\mathrm{d}x$ nie sú nutné, ale doporučujú sa].
- Ak nie je obor definície integrálu zadaný, potom myslíme maximálny interval, resp. zjednotenie intervalov, na ktorých integrál existuje.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je funkcia, $I \subset R$ je interval.

Neurčitý integrál funkcie f na intervale I sa nazýva

množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I.

Označuje sa $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$

- $\int$ — začiatok integrálu [integračný znak]
- $f(x)$ — integračná funkcia [integrand]
- x — integračná premenná
- $F(x)$ — primitívna funkcia [ľubovoľná z primitívnych funkcií]
- c — integračná konštanta
- I — definičný obor [obor definície]
- dx — koniec integrálu [diferenciál x]

- Na určenie $\int f(x)\,dx$ postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia F.
- Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva integrovanie.
- Zápis neurčitého integrálu je určený na začiatku integračným znakom $\int$, na konci symbolom diferenciálu dx [zátvorky medzi $\int$ a dx nie sú nutné, ale doporučujú sa].
- Ak nie je obor definície integrálu zadaný, potom myslíme maximálny interval, resp. zjednotenie intervalov, na ktorých integrál existuje.

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1; 1)$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1; 1)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } x < 0, \\ 1 & \text{pre } x > 0, \end{cases}$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } x < 0, \end{cases}$ t. j. $F(x) = -x + c$, $c \in R$ je primitívna k f na $(-1;0)$,

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1; 1)$

$f(x) = \{$ 1 pre $x > 0$, t. j. $F(x) = x + c$, $c \in R$ je primitívna k f na $(0; 1)$.

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1; 1)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x < 0, \text{ t. j. } F(x) = -x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1; 0), \\ 1 \text{ pre } x > 0, \text{ t. j. } F(x) = x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0; 1). \end{cases}$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1; 1)$

$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x < 0, & \text{t. j. } F(x) = -x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1; 0), \\ 1 \text{ pre } x > 0, & \text{t. j. } F(x) = x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0; 1). \end{cases}$

$f(0) = 0,$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1; 1)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x < 0, \text{ t. j. } F(x) = -x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1; 0), \\ 1 \text{ pre } x > 0, \text{ t. j. } F(x) = x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0; 1). \end{cases}$$

$f(0) = 0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0) = f(0) = 0$.

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1; 1)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, \text{ t. j. } F(x) = -x+c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 \text{ pre } x>0, \text{ t. j. } F(x) = x+c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_{-}(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1,$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$

$f(x)=\begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, & \text{t. j. } F(x)=-x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ \ \ 1 \text{ pre } x>0, & \text{t. j. } F(x)=\ \ x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$F'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} F'(x)=-1, \quad F'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} F'(x)=1,$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x < 0, \text{ t. j. } F(x) = -x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 \text{ pre } x > 0, \text{ t. j. } F(x) = x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$$

$f(0) = 0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0) = f(0) = 0$.

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} F'(x) = -1, \quad F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} F'(x) = 1, \text{ t. j. } F'_-(0) \neq F'_+(0).$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$

$$f(x)=\begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, \text{ t. j. } F(x)=-x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0),\\ \ \ 1 \text{ pre } x>0, \text{ t. j. } F(x)=\ \ x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1).\end{cases}$$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} F'(x)=-1, \quad F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} F'(x)=1, \text{ t. j. } F'_-(0)\neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje,

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$$f(x)=\begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, \text{ t. j. } F(x)=-x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 \text{ pre } x>0, \text{ t. j. } F(x)=\ \ x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-} F'(x)=-1, \quad F'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+} F'(x)=1, \text{ t. j. } F'_{-}(0)\neq F'_{+}(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, & \text{t. j. } F(x) = -x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 \text{ pre } x>0, & \text{t. j. } F(x) = x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1, \quad F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1, \text{ t. j. } F'_-(0) \neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x \in R-\{0\},\ f(0) = 0$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{pre } x<0, \text{ t. j. } F(x)=-x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0),\\ 1 & \text{pre } x>0, \text{ t. j. } F(x)=\ \ x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1).\end{cases}$$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} F'(x)=-1, \quad F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} F'(x)=1, \text{ t. j. } F'_-(0)\neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\},\ f(0)=0$

Funkcia f je nespojitá v bode $x=0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, \text{ t. j. } F(x) = -x+c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 \text{ pre } x>0, \text{ t. j. } F(x) = x+c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1, \quad F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1, \text{ t. j. } F'_-(0) \neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\},\ f(0) = 0$

Funkcia f je nespojitá v bode $x=0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

$$F'(x) = \left[x^2 \sin \frac{1}{x}\right]'$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } x<0, \text{ t. j. } F(x) = -x+c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 & \text{pre } x>0, \text{ t. j. } F(x) = x+c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1, \quad F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1, \text{ t. j. } F'_-(0) \neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x \in R - \{0\},\ f(0) = 0$

Funkcia f je nespojitá v bode $x = 0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

$$F'(x) = \left[x^2 \sin\frac{1}{x}\right]' = 2x \sin\frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x}$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, \text{ t. j. } F(x) = -x+c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 \text{ pre } x>0, \text{ t. j. } F(x) = x+c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1, \quad F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1, \text{ t. j. } F'_-(0) \neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\},\ f(0) = 0$

Funkcia f je nespojitá v bode $x=0$, pretože $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

$$F'(x) = \left[x^2 \sin \tfrac{1}{x}\right]' = 2x \sin \tfrac{1}{x} - x^2 \tfrac{1}{x^2} \cos \tfrac{1}{x} = 2x \sin \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x} = f(x) \text{ pre } x \neq 0,$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } x<0, \text{ t. j. } F(x) = -x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 & \text{pre } x>0, \text{ t. j. } F(x) = x + c,\ c \in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1, \quad F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$, t. j. $F'_-(0) \neq F'_+(0)$.

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},\ x \in R - \{0\},\ f(0) = 0$

Funkcia f je nespojitá v bode $x = 0$, pretože $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

$F'(x) = \left[x^2 \sin \frac{1}{x}\right]' = 2x \sin \frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = f(x)$ pre $x \neq 0$,

$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } x<0, \text{ t. j. } F(x) = -x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 & \text{pre } x>0, \text{ t. j. } F(x) = x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1, \quad F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1, \text{ t. j. } F'_-(0) \neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\},\ f(0)=0$

Funkcia f je nespojitá v bode $x=0$, pretože $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

$$F'(x) = \left[x^2 \sin\tfrac{1}{x}\right]' = 2x\sin\tfrac{1}{x} - x^2\tfrac{1}{x^2}\cos\tfrac{1}{x} = 2x\sin\tfrac{1}{x} - \cos\tfrac{1}{x} = f(x) \text{ pre } x\neq 0,$$

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$$f(x)=\begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, \text{ t. j. } F(x)=-x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0),\\ 1 \text{ pre } x>0, \text{ t. j. } F(x)=x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1).\end{cases}$$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} F'(x)=-1, \quad F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} F'(x)=1, \text{ t. j. } F'_-(0)\neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\},\ f(0)=0$

Funkcia f je nespojitá v bode $x=0$, pretože $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

$$F'(x)=\left[x^2\sin\tfrac{1}{x}\right]'=2x\sin\tfrac{1}{x}-x^2\tfrac{1}{x^2}\cos\tfrac{1}{x}=2x\sin\tfrac{1}{x}-\cos\tfrac{1}{x}=f(x) \text{ pre } x\neq 0,$$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x\sin\tfrac{1}{x}=0=f(0) \text{ pre } x=0,$$

Neurčitý integrál

$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-1;1)$ nemá primitívnu funkciu na $(-1;1)$.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pre } x<0, & \text{t. j. } F(x) = -x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (-1;0), \\ 1 \text{ pre } x>0, & \text{t. j. } F(x) = x+c,\ c\in R \text{ je primitívna k } f \text{ na } (0;1). \end{cases}$$

$f(0)=0$, t. j. pre primitívnu funkciu musí platiť $F'(0)=f(0)=0$.

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1, \quad F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1, \text{ t. j. } F'_-(0) \neq F'_+(0).$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje.

$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\},\ f(0)=0$ má primitívnu funkciu na R.

Funkcia f je nespojitá v bode $x=0$, pretože $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

$$F'(x) = \left[x^2\sin\frac{1}{x}\right]' = 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = f(x) \text{ pre } x\neq 0,$$

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0) \text{ pre } x=0,$$

t. j. $F(x) = x^2\sin\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\},\ F(0)=0$ je primitívnou funkciou k f na R.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I k f existuje primitívna funkcia

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Každá spojitá funkcia definovaná na intervale má primitívnu funkciu.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Každá spojitá funkcia definovaná na intervale má primitívnu funkciu.

Nie vždy dokážeme jej integrál vyjadriť pomocou elementárnych funkcií,

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Každá spojitá funkcia definovaná na intervale má primitívnu funkciu.

Nie vždy dokážeme jej integrál vyjadriť pomocou elementárnych funkcií,
niekedy sa dá vyjadriť iba ako rozvoj nekonečných funkcionálnych radov.

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Každá spojitá funkcia definovaná na intervale má primitívnu funkciu.

Nie vždy dokážeme jej integrál vyjadriť pomocou elementárnych funkcií, niekedy sa dá vyjadriť iba ako rozvoj nekonečných funkcionálnych radov.

Sú to napríklad integrály $(m \in N \cup \{0\},\ n \in N,\ m+n \geq 2)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int \frac{e^{\pm x^n}}{x^m}\, dx, \qquad \int \frac{\sin(x^n)}{x^m}\, dx, \qquad \int \frac{\cos(x^n)}{x^m}\, dx.$$

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Každá spojitá funkcia definovaná na intervale má primitívnu funkciu.

Nie vždy dokážeme jej integrál vyjadriť pomocou elementárnych funkcií, niekedy sa dá vyjadriť iba ako rozvoj nekonečných funkcionálnych radov.

Sú to napríklad integrály $(m \in N \cup \{0\},\ n \in N,\ m+n \geq 2)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int \frac{e^{\pm x^n}}{x^m}\,dx, \qquad \int \frac{\sin(x^n)}{x^m}\,dx, \qquad \int \frac{\cos(x^n)}{x^m}\,dx.$$

Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I.

Funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale I, $c \in R$,

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Každá spojitá funkcia definovaná na intervale má primitívnu funkciu.

Nie vždy dokážeme jej integrál vyjadriť pomocou elementárnych funkcií,
niekedy sa dá vyjadriť iba ako rozvoj nekonečných funkcionálnych radov.

Sú to napríklad integrály $(m \in N \cup \{0\},\ n \in N,\ m+n \geq 2)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int \frac{e^{\pm x^n}}{x^m}\,dx, \qquad \int \frac{\sin(x^n)}{x^m}\,dx, \qquad \int \frac{\cos(x^n)}{x^m}\,dx.$$

Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I.

Funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale I, $c \in R$,

potom pre všetky $x \in I$ platí

$$\int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+c,$$

Neurčitý integrál

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I

$\Rightarrow$ na intervale I ku f existuje primitívna funkcia.

Existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Každá spojitá funkcia definovaná na intervale má primitívnu funkciu.

Nie vždy dokážeme jej integrál vyjadriť pomocou elementárnych funkcií,
niekedy sa dá vyjadriť iba ako rozvoj nekonečných funkcionálnych radov.

Sú to napríklad integrály $(m \in N \cup \{0\},\ n \in N,\ m+n \geq 2)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}, \qquad \int \frac{e^{\pm x^n}}{x^m}\, dx, \qquad \int \frac{\sin(x^n)}{x^m}\, dx, \qquad \int \frac{\cos(x^n)}{x^m}\, dx.$$

Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I.
Funkcia F je primitívna k funkcii f na intervale I, $c \in R$,

potom pre všetky $x \in I$ platí

$$\int F'(x)\, dx = \int f(x)\, dx = F(x)+c, \qquad \left[\int f(x)\, dx\right]' = [F(x)+c]' = f(x).$$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a\in R,\ c\in R,\ k\in Z$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a \in R,\ c \in R,\ k \in Z$

$\int dx = \int 1\, dx = x + c$	$x \in R$	$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$x \in R - \{0\}$, $a \neq -1$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a \in R,\ c \in R,\ k \in Z$

$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \in R - \{0\}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	$f(x) \neq 0,$ $x \in D(f)$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a \in R,\ c \in R,\ k \in Z$

$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$	$x \in R,\ a \neq 0$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in R,$ $a > 0,\ a \neq 1$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a \in R,\ c \in R,\ k \in Z$

$\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$	$x \in R,\ a \neq 0$	$\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + c$	$x \in R,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c$	$x \in R,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{k\pi}{a}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c$	$x \in R,\ a \neq 0,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a \in R,\ c \in R,\ k \in Z$

$\int \sinh ax\, dx = \frac{\cosh ax}{a} + c$	$x \in R,\ a \neq 0$	$\int \cosh ax\, dx = \frac{\sinh ax}{a} + c$	$x \in R,\ a \neq 0$
$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c$	$x \in R - \{0\}$, $a \neq 0$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c$	$x \in R,\ a \neq 0$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a\in R,\ c\in R,\ k\in Z$

$\int dx = \int 1\,dx = x + c$	$x\in R$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$x\in R-\{0\}$, $a\neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$x\in R-\{0\}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	$f(x)\neq 0$, $x\in D(f)$
$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$	$x\in R,\ a\neq 0$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x\in R$, $a>0,\ a\neq 1$
$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$	$x\in R,\ a\neq 0$	$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$	$x\in R,\ a\neq 0$
$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c$	$x\in R,\ a\neq 0$, $x\neq \frac{k\pi}{a}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c$	$x\in R,\ a\neq 0$, $x\neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}$
$\int \sinh ax\,dx = \frac{\cosh ax}{a} + c$	$x\in R,\ a\neq 0$	$\int \cosh ax\,dx = \frac{\sinh ax}{a} + c$	$x\in R,\ a\neq 0$
$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c$	$x\in R-\{0\}$, $a\neq 0$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c$	$x\in R,\ a\neq 0$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a > 0,\ c \in R$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a > 0,\ c \in R$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c_2$	$x \in R$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a > 0,\ c \in R$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	$x \in R - \{a\}$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a > 0,\ c \in R$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\lvert a \rvert} + c_1 = -\arccos \frac{x}{\lvert a \rvert} + c_2$	$x \in (-a; a)$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$x \in (-a; a)$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a > 0,\ c \in R$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + c$	$x \in (-\infty; a) \cup (a; \infty)$
$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$x \in (-\infty; a) \cup (a; \infty)$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a > 0,\ c \in R$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$	$x \in R$
$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$x \in R$

Integrály elementárnych funkcií

Neurčité integrály základných elementárnych funkcií $a>0,\ c\in R$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\text{arctg}\,\frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\,\text{arccotg}\,\frac{x}{a} + c_2$	$x\in R$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	$x\in R-\{a\}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_1 = -\arccos\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_2$	$x\in(-a;a)$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$x\in(-a;a)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$	$x\in(-\infty;a)\cup(a;\infty)$
$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$x\in(-\infty;a)\cup(a;\infty)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$	$x\in R$
$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$x\in R$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \, ; \; k \in Z\}, \; c \in R.$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \, ; \; k \in Z\}, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \, ; \, k \in Z\}, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \, ; \; k \in Z\}, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \, ; \; k \in Z\}, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c,$$

$$x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \, ; \; k \in Z \right\}, \; c \in R.$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \, ; \, k \in Z\}, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c,$$
$$x \in R - \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \, ; \, k \in Z\right\}, \; c \in R.$$

$$\int \sqrt[5]{x^3} \, dx$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \, ; \, k \in Z\}, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c,$$

$$x \in R - \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \, ; \, k \in Z\right\}, \; c \in R.$$

$$\int \sqrt[5]{x^3} \, dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{5}} \, dx$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \,;\, k \in Z\}, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c,$$
$$x \in R - \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in Z\right\}, \; c \in R.$$

$$\int \sqrt[5]{x^3} \, dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{5}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c$$

Integrály elementárnych funkcií

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$= \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c, \; x \in R - \{k\pi \, ; \; k \in Z\}, \; c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c,$$
$$x \in R - \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \, ; \; k \in Z\right\}, \; c \in R.$$

$$\int \sqrt[5]{x^3} \, dx = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + c$$

$$= \int x^{\frac{3}{5}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + c, \; x \in \langle 0; \infty), \; c \in R.$$

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ sú funkcie, $I \subset R$ je interval.

F, G sú primitívne k f, g na I, $a,b \in R$, $|a| + |b| > 0$

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ sú funkcie, $I \subset R$ je interval.
F, G sú primitívne k f, g na I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na I

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ sú funkcie, $I \subset R$ je interval.
F, G sú primitívne k f, g na I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na I a platí

$$\int [af(x) + bg(x)] \, \mathrm{d}x = a \int f(x) \, \mathrm{d}x + b \int g(x) \, \mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I, \ c \in R.$$

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ sú funkcie, $I \subset R$ je interval.
F, G sú primitívne k f, g na I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na I a platí

$$\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x) + bG(x) + c,$$
$$x \in I,\ c \in R.$$

$\left[aF(x) + bG(x) + c\right]' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x)$ pre $x \in I$.

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x),\ g(x),\ x\in I$ sú funkcie, $I\subset R$ je interval.
$F,\ G$ sú primitívne k $f,\ g$ na I, $a,b\in R,\ |a|+|b|>0$

$\Rightarrow$ $aF+bG$ je primitívna k funkcii $af+bg$ na I a platí

$$\int\big[af(x)+bg(x)\big]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x)+bG(x)+c,\quad x\in I,\ c\in R.$$

$$\big[aF(x)+bG(x)+c\big]' = aF'(x)+bG'(x) = af(x)+bg(x) \text{ pre } x\in I.$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$$

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ sú funkcie, $I \subset R$ je interval.
F, G sú primitívne k f, g na I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na I a platí

$$\int [af(x) + bg(x)] \, dx = a \int f(x) \, dx + b \int g(x) \, dx = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I, \ c \in R.$$

$$[aF(x) + bG(x) + c]' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x) \text{ pre } x \in I.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right] dx$$

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ sú funkcie, $I \subset R$ je interval.
F, G sú primitívne k f, g na I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na I a platí

$$\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x) + bG(x) + c,$$
$$x \in I,\ c \in R.$$

$\left[aF(x) + bG(x) + c\right]' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x)$ pre $x \in I$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right] dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x\in I$ sú funkcie, $I\subset R$ je interval.
F, G sú primitívne k f, g na I, $a,b\in R$, $|a|+|b|>0$

$\Rightarrow$ $aF+bG$ je primitívna k funkcii $af+bg$ na I a platí

$$\int [af(x)+bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x)+bG(x)+c,$$
$$x\in I,\ c\in R.$$

$\big[aF(x)+bG(x)+c\big]' = aF'(x)+bG'(x) = af(x)+bg(x)$ pre $x\in I$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

$$= \int \Big[\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\Big]dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$$
$$x\in R,\ x\neq \frac{k\pi}{2},\ k\in Z,\ c\in R.$$

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ sú funkcie, $I \subset R$ je interval.
F, G sú primitívne k f, g na I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na I a platí

$$\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I,\ c \in R.$$

$$[aF(x) + bG(x) + c]' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x) \text{ pre } x \in I.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right] dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c, \quad x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$$

Namiesto zápisu $\int \frac{1}{f(x)}\,dx$

Metóda rozkladu

Metóda rozkladu $f(x)$, $g(x)$, $x \in I$ sú funkcie, $I \subset R$ je interval.
F, G sú primitívne k f, g na I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$

$\Rightarrow$ $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na I a platí

$$\int [af(x) + bg(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx = aF(x) + bG(x) + c,$$
$$x \in I,\ c \in R.$$

$[aF(x) + bG(x) + c]' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x)$ pre $x \in I$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right] dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$$
$$x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$$

Namiesto zápisu $\int \frac{1}{f(x)}\,dx$ sa často používa zápis $\int \frac{dx}{f(x)}$.

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] dx$$

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \Big[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big] dx = \operatorname{tg} x - x + c,$$

$$x \in R, \; x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \; k \in Z, \; c \in R.$$

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right] dx = \operatorname{tg} x - x + c,$$

$$x \in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x} \, dx$$

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \Big[\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big] dx = \operatorname{tg} x - x + c,$$

$$x \in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x} \, dx$$

$$= \int \frac{x^2-2x+1}{x} \, dx$$

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \Big[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big] dx = \operatorname{tg} x - x + c,$$

$$x \in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x} \, dx$$

$$= \int \frac{x^2-2x+1}{x} \, dx = \int \Big[x - 2 + \frac{1}{x}\Big] \, dx$$

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] dx = \operatorname{tg} x - x + c,$$

$$x \in R, \ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \ k \in Z, \ c \in R.$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

$$= \int \frac{x^2-2x+1}{x} \, dx = \int \left[x - 2 + \frac{1}{x}\right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,$$

$$x \in R - \{0\}, \ c \in R.$$

Metóda rozkladu

$$\int \mathrm{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \mathrm{tg}\, x - x + c$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] dx = \mathrm{tg}\, x - x + c,$$

$$x \in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

$$= \int \frac{x^2-2x+1}{x} \, dx = \int \left[x - 2 + \frac{1}{x}\right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,$$

$$x \in R - \{0\},\ c \in R.$$

$$\int \left[2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right] dx$$

Metóda rozkladu

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] dx = \operatorname{tg} x - x + c,$$

$$x \in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in Z,\ c \in R.$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c$$

$$= \int \frac{x^2-2x+1}{x} \, dx = \int \left[x - 2 + \frac{1}{x}\right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,$$

$$x \in R - \{0\},\ c \in R.$$

$$\int \left[2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\right] dx = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + c$$

$$= 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx, \quad x \in I.$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx, \quad x \in I.$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

$$\left[u(x)v(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \text{pre } x \in I.$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx, \quad x \in I.$$

$$\int \left[u(x)v(x)\right]' dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx \text{ pre } x \in I.$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

$$u(x)v(x) = \int \left[u(x)v(x)\right]'\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \text{ pre } x \in I.$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx, \quad x \in I.$$

$$u(x)v(x) = \int \big[u(x)v(x)\big]' dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx \text{ pre } x \in I.$$

$\int \ln x \, dx$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx, \quad x \in I.$$

$$u(x)v(x) = \int \big[u(x)v(x)\big]' dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx \text{ pre } x \in I.$$

$\int \ln x \, dx$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & \\ v' = 1 & \end{array} \right]$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx, \quad x \in I.$$

$$u(x)v(x) = \int \big[u(x)v(x)\big]' dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx \text{ pre } x \in I.$$

$\int \ln x \, dx$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' & = \frac{1}{x} \\ v' & = 1 & v & = x \end{array} \right] = x \ln x$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

$$u(x)v(x) = \int \big[u(x)v(x)\big]'\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \text{ pre } x \in I.$$

$\int \ln x\,\mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' & = \frac{1}{x} \\ v' & = 1 & v & = x \end{array}\right] = x \ln x - \int \mathrm{d}x$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx, \quad x \in I.$$

$$u(x)v(x) = \int \big[u(x)v(x)\big]' dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx \text{ pre } x \in I.$$

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' & = \frac{1}{x} \\ v' & = 1 & v & = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c, \; x \in (0; \infty), \; c \in R.$$

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

$$u(x)v(x) = \int \big[u(x)v(x)\big]' \mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x \ \text{ pre } x \in I.$$

$$\int \ln x\, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' & = \frac{1}{x} \\ v' & = 1 & v & = x \end{array} \right] = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + c, \ x \in (0; \infty), \ c \in R.$$

Zápis $\int \mathrm{d}x$ predstavuje integrál funkcie $f(x) = 1$,

Metóda per partes

Metóda per partes u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Rightarrow \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

$$u(x)v(x) = \int \big[u(x)v(x)\big]'\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \text{ pre } x \in I.$$

$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' & = \frac{1}{x} \\ v' & = 1 & v & = x \end{array}\right] = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c, \; x \in (0;\infty), \; c \in R.$$

Zápis $\int \mathrm{d}x$ predstavuje integrál funkcie $f(x)=1$, t. j. $\int \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x$.

Metóda per partes

$\int x \cos x \, dx$

Metóda per partes

$$\int x \cos x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & \\ v' = \cos x & \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u' = x & \\ v = \cos x & \end{array} \right]$$

Metóda per partes

$$\int x \cos x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array} \right] = \frac{x^2 \cos x}{2}$$

Metóda per partes

$$\int x \cos x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \cos x & v & = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' & = x & u & = \frac{x^2}{2} \\ v & = \cos x & v' & = -\sin x \end{array} \right] = \frac{x^2 \cos x}{2} - \int \frac{-x^2 \sin x}{2} \, dx$$

Metóda per partes

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \cos x & v & = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Nasledujúca voľba funkcií u a v nevedie k cieľu. Vždy treba zvážiť výber funkcií u a v.

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' & = x & u & = \frac{x^2}{2} \\ v & = \cos x & v' & = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,dx = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x\,dx}{2} = \cdots.$$

Metóda per partes

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \cos x & v & = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Nasledujúca voľba funkcií u a v nevedie k cieľu. Vždy treba zvážiť výber funkcií u a v.

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' & = x & u & = \frac{x^2}{2} \\ v & = \cos x & v' & = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,dx = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x\,dx}{2} = \cdots.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx$$

Metóda per partes

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u &= x & u' &= 1 \\ v' &= \cos x & v &= \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

Nasledujúca voľba funkcií u a v nevedie k cieľu. Vždy treba zvážiť výber funkcií u a v.

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' &= x & u &= \frac{x^2}{2} \\ v &= \cos x & v' &= -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,dx = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x\,dx}{2} = \cdots.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|l} u' &= 1 & \\ v &= \operatorname{arctg} x & \end{array}\right]$$

Metóda per partes

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \cos x & v & = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Nasledujúca voľba funkcií u a v nevedie k cieľu. Vždy treba zvážiť výber funkcií u a v.

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' & = x & u & = \frac{x^2}{2} \\ v & = \cos x & v' & = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,dx = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x\,dx}{2} = \cdots.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' & = 1 & u & = x \\ v & = \operatorname{arctg} x & v' & = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x$$

Metóda per partes

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$= \left[\begin{matrix} u & = x \\ v' & = \cos x \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u' & = 1 \\ v & = \sin x \end{matrix} \right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Nasledujúca voľba funkcií u a v nevedie k cieľu. Vždy treba zvážiť výber funkcií u a v.

$$= \left[\begin{matrix} u' & = x \\ v & = \cos x \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u & = \frac{x^2}{2} \\ v' & = -\sin x \end{matrix} \right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,dx = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x\,dx}{2} = \cdots.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} u' & = 1 \\ v & = \operatorname{arctg} x \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u & = x \\ v' & = \frac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

Metóda per partes

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \cos x & v & = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c,\; x\in R,\; c\in R.$$

Nasledujúca voľba funkcií u a v nevedie k cieľu. Vždy treba zvážiť výber funkcií u a v.

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' & = x & u & = \frac{x^2}{2} \\ v & = \cos x & v' & = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,dx = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x\,dx}{2} = \cdots.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' & = 1 & u & = x \\ v & = \operatorname{arctg} x & v' & = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,dx$$

Metóda per partes

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u = x & & u' = 1 & \\ v' = \cos x & & v = \sin x & \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Nasledujúca voľba funkcií u a v nevedie k cieľu. Vždy treba zvážiť výber funkcií u a v.

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = x & & u = \frac{x^2}{2} & \\ v = \cos x & & v' = -\sin x & \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} - \int \frac{-x^2\sin x}{2}\,dx = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x\,dx}{2} = \cdots.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = 1 & & u = x & \\ v = \operatorname{arctg} x & & v' = \frac{1}{1+x^2} & \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Metóda per partes

$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$

Metóda per partes

$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$

$= \left[\begin{array}{lcl|} u' & = & \cos 5x \\ v & = & \sin 4x \end{array} \quad \right]$

$= \left[\begin{array}{lcl|} u' & = & \cos 5x \\ v & = & \sin 4x \end{array} \quad \right]$

Metóda per partes

$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \cos 5x & u = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v = & \sin 4x & v' = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \cos 5x & u = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v = & \sin 4x & v' = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5}$$

Metóda per partes

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{lll|lll} u' & = & \cos 5x & u & = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v & = & \sin 4x & v' & = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{lll|lll} u' & = & \cos 5x & u & = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v & = & \sin 4x & v' & = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

Metóda per partes

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} u' = \cos 5x \\ v = \sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} u' = \sin 5x \\ v = \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[\quad \right]$$

Pri opakovanom použití metódy per partes treba dávať pozor,

$$= \left[\begin{array}{l} u' = \cos 5x \\ v = \sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} u' = \cos 4x \\ v = \sin 5x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[\quad \right]$$

Metóda per partes

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u' & = & \cos 5x & u & = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v & = & \sin 4x & v' & = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u' & = & \sin 5x & u & = & -\frac{\cos 5x}{5} \\ v & = & \cos 4x & v' & = & -4\sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[- \frac{\cos 5x \cos 4x}{5} \right]$$

Pri opakovanom použití metódy per partes treba dávať pozor,

$$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u' & = & \cos 5x & u & = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v & = & \sin 4x & v' & = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u' & = & \cos 4x & u & = & \frac{\sin 4x}{4} \\ v & = & \sin 5x & v' & = & 5\cos 5x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[\frac{\sin 5x \sin 4x}{4} \right]$$

Metóda per partes

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4\sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[-\frac{\cos 5x \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right]$$

Pri opakovanom použití metódy per partes treba dávať pozor,

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v = \sin 5x & v' = 5\cos 5x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[\frac{\sin 5x \sin 4x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right]$$

Metóda per partes

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \cos 5x & u = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v = & \sin 4x & v' = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \sin 5x & u = & -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = & \cos 4x & v' = & -4\sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[-\frac{\cos 5x \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right]$$

$$= \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I$$

Pri opakovanom použití metódy per partes treba dávať pozor, aby sa nezneutralizovali, t. j. aby nevznikol pôvodne riešený integrál.

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \cos 5x & u = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v = & \sin 4x & v' = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \cos 4x & u = & \frac{\sin 4x}{4} \\ v = & \sin 5x & v' = & 5\cos 5x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[\frac{\sin 5x \sin 4x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right] = I.$$

Metóda per partes

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{lll|lll} u' & = & \cos 5x & u & = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v & = & \sin 4x & v' & = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{lll|lll} u' & = & \sin 5x & u & = & -\frac{\cos 5x}{5} \\ v & = & \cos 4x & v' & = & -4\sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[-\frac{\cos 5x \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right]$$

$I = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I$, t. j. rovnica s neznámym parametrom I.

Pri opakovanom použití metódy per partes treba dávať pozor, aby sa nezneutralizovali, t. j. aby nevznikol pôvodne riešený integrál.

$$= \left[\begin{array}{lll|lll} u' & = & \cos 5x & u & = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v & = & \sin 4x & v' & = & 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{lll|lll} u' & = & \cos 4x & u & = & \frac{\sin 4x}{4} \\ v & = & \sin 5x & v' & = & 5\cos 5x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[\frac{\sin 5x \sin 4x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right] = I.$$

Metóda per partes

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx = \frac{5 \sin 5x \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cos 4x}{9} + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \cos 5x & u = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v = & \sin 4x & v' = & 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \sin 5x & u = & -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = & \cos 4x & v' = & -4 \sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[-\frac{\cos 5x \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right]$$

$$= \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I,$$ t. j. rovnica s neznámym parametrom I.

$$\Rightarrow \quad I = \frac{5 \sin 5x \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cos 4x}{9} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

Pri opakovanom použití metódy per partes treba dávať pozor,
aby sa nezneutralizovali, t. j. aby nevznikol pôvodne riešený integrál.

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \cos 5x & u = & \frac{\sin 5x}{5} \\ v = & \sin 4x & v' = & 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u' = & \cos 4x & u = & \frac{\sin 4x}{4} \\ v = & \sin 5x & v' = & 5 \cos 5x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[\frac{\sin 5x \sin 4x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right] = I.$$

Metóda per partes

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx$ $\qquad n \in N$

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \, e^x \, dx \qquad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x^n \\ v' = e^x \end{array} \right| \qquad \left. \right]$$

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \, e^x \, dx \qquad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x$$

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \qquad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = n x^{n-1} \\ v' & = \mathrm{e}^x & v & = \mathrm{e}^x \end{array} \right] = x^n \, \mathrm{e}^x - n \int x^{n-1} \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^n \,\mathrm{e}^x - n \cdot I_{n-1} \qquad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = \mathrm{e}^x & v & = \mathrm{e}^x \end{array} \right] = x^n \,\mathrm{e}^x - n \int x^{n-1} \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^n \,\mathrm{e}^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^n \,\mathrm{e}^x - n \cdot I_{n-1} \qquad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = \mathrm{e}^x & v & = \mathrm{e}^x \end{array} \right] = x^n \,\mathrm{e}^x - n \int x^{n-1} \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^n \,\mathrm{e}^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$I_n = \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1}$ $\qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_1 = x \, e^x - I_0$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n\, e^x\, dx = x^n\, e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n\, e^x - n \int x^{n-1}\, e^x\, dx = x^n\, e^x - n \cdot I_{n-1},\ x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0\, e^x\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$$

$$I_1 = x\, e^x - I_0 = x\, e^x - e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$I_n = \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1}$ $\qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_1 = x e^x - I_0 = x e^x - e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2 I_1$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_1 = x \, e^x - I_0 = x \, e^x - e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_2 = x^2 \, e^x - 2 I_1 = x^2 \, e^x - 2 \left[x \, e^x - e^x \right] + c$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n\, e^x\, dx = x^n\, e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n\, e^x - n \int x^{n-1}\, e^x\, dx = x^n\, e^x - n \cdot I_{n-1},\ x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0\, e^x\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$$

$$I_1 = x\, e^x - I_0 = x\, e^x - e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$$

$$I_2 = x^2\, e^x - 2I_1 = x^2\, e^x - 2\left[x\, e^x - e^x\right] + c = x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + c,$$

$$x \in R,\ c \in R,$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_1 = x e^x - I_0 = x e^x - e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2 I_1 = x^2 e^x - 2 \left[x e^x - e^x \right] + c = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c, \quad x \in R, \; c \in R,$$

$$I_3 = x^3 e^x - 3 I_2$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_1 = x \, e^x - I_0 = x \, e^x - e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_2 = x^2 \, e^x - 2I_1 = x^2 \, e^x - 2\left[x \, e^x - e^x\right] + c = x^2 \, e^x - 2x \, e^x + 2 \, e^x + c, \quad x \in R, \; c \in R,$$

$$I_3 = x^3 \, e^x - 3I_2 = x^3 \, e^x - 3\left[x^2 \, e^x - 2x \, e^x + 2 \, e^x\right]$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_1 = x e^x - I_0 = x e^x - e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2\left[x e^x - e^x\right] + c = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c, \quad x \in R, \; c \in R,$$

$$I_3 = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3\left[x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x\right] = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 e^x + c, \; x \in R, \; c \in R, \quad \ldots .$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n \, e^x - n \int x^{n-1} \, e^x \, dx = x^n \, e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 \, e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_1 = x \, e^x - I_0 = x \, e^x - e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_2 = x^2 \, e^x - 2I_1 = x^2 \, e^x - 2\left[x \, e^x - e^x \right] + c = x^2 \, e^x - 2x \, e^x + 2 \, e^x + c, \quad x \in R, \; c \in R,$$

$$I_3 = x^3 \, e^x - 3I_2 = x^3 \, e^x - 3\left[x^2 \, e^x - 2x \, e^x + 2 \, e^x \right]$$
$$= x^3 \, e^x - 3x^2 \, e^x + 6x \, e^x - 6 \, e^x + c, \; x \in R, \; c \in R, \quad \ldots .$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$I_n = \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1} \qquad I_0 = e^x + c, \quad n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} \\ v' & = e^x & v & = e^x \end{array} \right] = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx = x^n e^x - n \cdot I_{n-1}, \; x \in R.$$

$$I_0 = \int x^0 e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_1 = x e^x - I_0 = x e^x - e^x + c, \; x \in R, \; c \in R,$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2\left[x e^x - e^x\right] + c = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c, \quad x \in R, \; c \in R,$$

$$I_3 = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3\left[x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x\right] = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 e^x + c, \; x \in R, \; c \in R, \quad \ldots.$$

Integrál I_n sme vyjadrili rekurentným vzťahom pomocou integrálu I_{n-1}.

Pre konkrétne $n \in N$ musíme tento vzťah použiť n-krát za sebou.

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \end{array} \right| \quad \right]$$

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \end{array} \right| \qquad \left. \right]$$

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov

$\int p(x)\, e^{ax}\, dx,$

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0)\cup(0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov

$\int p(x)\,e^{ax}\,dx$, $\int p(x)\cos ax\,dx$, $\int p(x)\sin ax\,dx$,

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov

$$\int p(x)\,e^{ax}\,dx,\quad \int p(x)\cos ax\,dx,\quad \int p(x)\sin ax\,dx,\quad \int p(x)\ln q(x)\,dx,$$

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov

$$\int p(x)\, e^{ax}\,dx,\quad \int p(x) \cos ax\,dx,\quad \int p(x) \sin ax\,dx,\quad \int p(x) \ln q(x)\,dx,\quad \int p(x) \operatorname{arctg} q(x)\,dx,$$

kde $p(x)$, $q(x)$ sú reálne polynómy, $a \in R$, $a \neq 0$.

Metóda per partes

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & u' = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} = x^{-2} & v = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{array} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c_1$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arccos x + c_2,\ x \in (-1;0) \cup (0;1),\ c_1, c_2 \in R.$$

Metóda per partes je vhodná na výpočet integrálov typov

$$\int p(x)\, e^{ax}\, dx,\quad \int p(x) \cos ax\, dx,\quad \int p(x) \sin ax\, dx,\quad \int p(x) \ln q(x)\, dx,\quad \int p(x) \operatorname{arctg} q(x)\, dx,$$

kde $p(x)$, $q(x)$ sú reálne polynómy, $a \in R$, $a \neq 0$.

Vyššie uvedené funkcie môžeme samozrejme integrovať aj inými metódami.

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$.

Odhadneme $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c \;\Rightarrow\; f(x) = F'(x)$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c \;\Rightarrow\; f(x) = F'(x) \;\Rightarrow$ systém rovníc

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c \;\Rightarrow\; f(x) = F'(x) \;\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c \Rightarrow f(x) = F'(x) \Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n e^x\,dx$ $\quad n \in N$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ $\Rightarrow$ $f(x) = F'(x)$ $\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n e^x \,dx$ $\quad n \in N$

$$\left[\begin{array}{ll} u = x^n \\ v' = e^x \end{array} \middle| \quad \middle| \quad \middle| \quad \middle| \quad \right]$$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ $\Rightarrow$ $f(x) = F'(x)$ $\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n e^x \, dx$ $\qquad n \in N$

$$\left[\begin{array}{ll|ll|} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \quad \middle| \quad \middle| \quad \right]$$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ $\Rightarrow$ $f(x) = F'(x)$ $\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n\, e^x\, dx$ $\qquad n \in N$

$$\left[\begin{array}{l|l|l|l|} u = x^n & u' = nx^{n-1} & u'' = n(n-1)x^{n-2} & \\ v' = e^x & v = e^x & \int v = e^x & \end{array} \right]$$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ $\Rightarrow$ $f(x)=F'(x)$ $\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n e^x\,dx$ $\qquad n \in N$

$$\left[\begin{array}{ll|ll|ll|ll|} u & = x^n & u' & = nx^{n-1} & u'' & = n(n-1)x^{n-2} & u''' & = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ v' & = e^x & v & = e^x & \int v & = e^x & \int\left[\int v\right] & = e^x \end{array} \right]$$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ $\Rightarrow$ $f(x) = F'(x)$ $\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n \, e^x \, dx$ $\qquad n \in N$

$$\left[\begin{array}{l|l|l|l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} & u'' = n(n-1)x^{n-2} & u''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3} & \text{stupeň polynómu sa znižuje} \\ v' = e^x & v = e^x & \int v = e^x & \int\left[\int v\right] = e^x & e^x \text{ sa nemení,} \end{array}\right]$$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \dots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \dots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x)+c \;\Rightarrow\; f(x)=F'(x) \;\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n\, e^x\, dx$ $\quad n \in N$

$$\left[\begin{array}{l|l|l|l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} & u'' = n(n-1)x^{n-2} & u''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3} & \text{stupeň polynómu sa znižuje} \\ v' = e^x & v = e^x & \int v = e^x & \int\left[\int v\right] = e^x & e^x \text{ sa nemení, } uv = x^n e^x \end{array}\right]$$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ $\Rightarrow$ $f(x) = F'(x)$ $\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n\, e^x\, dx$ $\qquad n \in N$

$$\left[\begin{array}{l|l|l|l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} & u'' = n(n-1)x^{n-2} & u''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3} & \text{stupeň polynómu sa znižuje} \\ v' = e^x & v = e^x & \int v = e^x & \int\left[\int v\right] = e^x & e^x \text{ sa nemení,} \quad uv = x^n e^x \end{array}\right]$$

Odhad primitívnej funkcie má tvar

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda neurčitých koeficientov

Primitívnu funkciu k $f(x)$, t. j. $\int f(x)\,dx$ odhadneme neurčitým výrazom $F(x)$ s konečným počtom neznámych parametrov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie F naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes.

Položíme $f(x) = F'(x)$. Vypočítame neznáme parametre $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Nahradíme proces integrovania derivovaním a pre neznáme $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dostaneme systém algebraických rovníc.

Odhadneme $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ $\Rightarrow$ $f(x)=F'(x)$ $\Rightarrow$ systém rovníc $\Rightarrow$ hľadaná F.

$I_n = \int x^n e^x\,dx = e^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) + c$ $\quad n \in N$

$$\left[\begin{array}{l|l|l|l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} & u'' = n(n-1)x^{n-2} & u''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3} & \text{stupeň polynómu sa znižuje} \\ v' = e^x & v = e^x & \int v = e^x & \int\left[\int v\right] = e^x & e^x \text{ sa nemení}, \quad uv = x^n e^x \end{array}\right]$$

Odhad primitívnej funkcie má tvar

$$I_n = F(x) = e^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) + c,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sú neznáme koeficienty, ktoré musíme vypočítať.

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) \, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x$

$\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right] e^x$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c,\; x \in R,\; c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$

Derivácia odhadu $\quad x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x$

$$\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right] e^x \qquad\qquad e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right]$$

Metóda neurčitých koeficientov

$$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$$

Odhad $I_3 = (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $x^3\, e^x = (3x^2+2\alpha x+\beta)\, e^x + (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x$

$$\left[x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right] e^x \quad = \quad e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $x^3 \, e^x = (3x^2+2\alpha x+\beta)\, e^x + (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x$

$$\left[x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right] e^x = e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $\quad x^3 \, e^x = (3x^2+2\alpha x+\beta)\, e^x + (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x$

$$\left[x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right] e^x = e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$0 = 3 + \alpha$ pre x^2,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $x^3 \, e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\, e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x$

$$\left[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right] e^x = e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$0 = 3 + \alpha$ pre x^2, $0 = 2\alpha + \beta$ pre x^1,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

Odhad $I_3 = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $\quad x^3\,\mathrm{e}^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x$

$$\left[x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0\right]\mathrm{e}^x \quad = \quad \mathrm{e}^x\left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$0 = 3 + \alpha$ pre x^2, $\quad 0 = 2\alpha + \beta$ pre x^1, $\quad 0 = \beta + \gamma$ pre x^0,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $\quad x^3\, e^x = (3x^2+2\alpha x+\beta)\, e^x + (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x$

$$\left[x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right] e^x \quad = \quad e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$0 = 3 + \alpha$ pre x^2, $\quad 0 = 2\alpha + \beta$ pre x^1, $\quad 0 = \beta + \gamma$ pre x^0,

$$\Downarrow$$

$\alpha = -3$,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $x^3 \, e^x = (3x^2+2\alpha x+\beta)\, e^x + (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x$

$$\left[x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right] e^x \quad = \quad e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$0 = 3 + \alpha$ pre x^2, $0 = 2\alpha + \beta$ pre x^1, $0 = \beta + \gamma$ pre x^0,

$\Downarrow$ $\alpha = -3$, $\Downarrow$ $\beta = -2\alpha = 6$,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x + c,\ x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma \in R.$

Derivácia odhadu $\quad x^3\, e^x = (3x^2+2\alpha x+\beta)\, e^x + (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x$

$$\left[x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right] e^x \quad = \quad e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$0 = 3+\alpha$ pre x^2, $\quad 0 = 2\alpha+\beta$ pre x^1, $\quad 0 = \beta+\gamma$ pre x^0,

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$\alpha = -3, \qquad \beta = -2\alpha = 6, \qquad \gamma = -\beta = -6,$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \, e^x \, dx$

Odhad $I_3 = (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x + c$, $x\in R$, $c\in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $\quad x^3\, e^x = (3x^2+2\alpha x+\beta)\, e^x + (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x$

$$\left[x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right] e^x = e^x \left[x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha+\beta)x + (\beta+\gamma)\right].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$0 = 3+\alpha$ pre x^2, $\quad 0 = 2\alpha+\beta$ pre x^1, $\quad 0 = \beta+\gamma$ pre x^0,

$\Downarrow$

$\alpha = -3$, $\quad \beta = -2\alpha = 6$, $\quad \gamma = -\beta = -6$,

t. j. $(x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\, e^x = (x^3-3x^2+6x-6)\, e^x$.

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 e^x \, dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x + c$

Odhad $I_3 = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Derivácia odhadu $x^3 e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta) e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^x$

$$[x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0] e^x = e^x [x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)].$$

Tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$0 = 3 + \alpha$ pre x^2, $0 = 2\alpha + \beta$ pre x^1, $0 = \beta + \gamma$ pre x^0,

$\Downarrow$ $\alpha = -3$, $\beta = -2\alpha = 6$, $\gamma = -\beta = -6$,

t. j. $(x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x$.

Riešenie $\int x^3 e^x \, dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x + c$, $x \in R$, $c \in R$.

Metóda neurčitých koeficientov

$$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$$

Metóda neurčitých koeficientov

$$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

[V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \cos x + (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu) \sin x$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$
$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \sin x$$
$$+ (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu) \sin x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \cos x,$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$

$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x =$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\big[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\sin x + \big[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\cos x =$$
$$= \big[-\alpha x^3 \qquad \big]\sin x$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\big[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\sin x + \big[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\cos x =$$
$$= \big[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 \qquad\qquad \big]\sin x$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \sin x + (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu) \sin x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \cos x,$$

$$\left[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right] \sin x + \left[0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right] \cos x =$$

$$= \left[-\alpha x^3 + (3\psi - \beta) x^2 + (2\varphi - \gamma) x \qquad \right] \sin x$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0]\sin x + [0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0]\cos x = \\ = [-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)]\sin x$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$

$x \in R, \ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \sin x + (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu) \sin x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \cos x,$$

$$\left[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right] \sin x + \left[0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right] \cos x =$$

$$= \left[-\alpha x^3 + (3\psi - \beta) x^2 + (2\varphi - \gamma) x + (\mu - \delta)\right] \sin x + \left[\psi x^3 \qquad \right] \cos x.$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \sin x + (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu) \sin x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \cos x,$$

$$\big[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\big] \sin x + \big[0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\big] \cos x =$$

$$= \big[-\alpha x^3 + (3\psi - \beta) x^2 + (2\varphi - \gamma) x + (\mu - \delta)\big] \sin x + \big[\psi x^3 + (3\alpha + \varphi) x^2 \qquad \big] \cos x.$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$

$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3+(3\psi-\beta)x^2+(2\varphi-\gamma)x+(\mu-\delta)\right]\sin x + \left[\psi x^3+(3\alpha+\varphi)x^2+(2\beta+\mu)x \qquad\right]\cos x.$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0]\sin x + [0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0]\cos x = \\ = [-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)]\sin x \\ + [\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)]\cos x.$$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\big[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\sin x + \big[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\cos x = \\ = \big[-\alpha x^3+(3\psi-\beta)x^2+(2\varphi-\gamma)x+(\mu-\delta)\big]\sin x \\ + \big[\psi x^3+(3\alpha+\varphi)x^2+(2\beta+\mu)x+(\gamma+\nu)\big]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu$:

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\right]\sin x \\ + \left[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu$:

$\sin x:$ $1=-\alpha$ pre x^3,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$

$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\right]\sin x \\ + \left[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu$:

$\sin x:$ $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \sin x + (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu) \sin x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \cos x,$$

$$\big[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\big] \sin x + \big[0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\big] \cos x = \\ = \big[-\alpha x^3 + (3\psi - \beta) x^2 + (2\varphi - \gamma) x + (\mu - \delta)\big] \sin x \\ + \big[\psi x^3 + (3\alpha + \varphi) x^2 + (2\beta + \mu) x + (\gamma + \nu)\big] \cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1 = -\alpha$ pre x^3, $0 = 3\psi - \beta$ pre x^2, $0 = 2\varphi - \gamma$ pre x^1,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\right]\sin x + \left[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu$:

$\sin x:$ $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x =$$
$$= \left[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\right]\sin x + \left[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu\in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\big[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\sin x + \big[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\cos x =$$
$$= \big[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\big]\sin x + \big[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\big]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi,\varphi,\mu,\nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\right]\sin x \\ + \left[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2, $0=2\beta+\mu$ pre x^1,

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\right]\sin x \\ + \left[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2, $0=2\beta+\mu$ pre x^1, $0=\gamma+\nu$ pre x^0.

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \sin x + (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu) \sin x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \cos x,$$

$$\big[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\big] \sin x + \big[0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\big] \cos x = \\ = \big[-\alpha x^3 + (3\psi - \beta) x^2 + (2\varphi - \gamma) x + (\mu - \delta)\big] \sin x \\ + \big[\psi x^3 + (3\alpha + \varphi) x^2 + (2\beta + \mu) x + (\gamma + \nu)\big] \cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x:$ $1 = -\alpha$ pre x^3, $0 = 3\psi - \beta$ pre x^2, $0 = 2\varphi - \gamma$ pre x^1, $0 = \mu - \delta$ pre x^0,

$\cos x:$ $0 = \psi$ pre x^3, $0 = 3\alpha + \varphi$ pre x^2, $0 = 2\beta + \mu$ pre x^1, $0 = \gamma + \nu$ pre x^0.

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$

$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\right]\sin x \\ + \left[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$:	$1=-\alpha$ pre x^3,	$0=3\psi-\beta$ pre x^2,	$0=2\varphi-\gamma$ pre x^1,	$0=\mu-\delta$ pre x^0,
$\cos x$:	$0=\psi$ pre x^3,	$0=3\alpha+\varphi$ pre x^2,	$0=2\beta+\mu$ pre x^1,	$0=\gamma+\nu$ pre x^0.

$\Rightarrow\ \alpha = -1,$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0]\sin x + [0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0]\cos x = \\ = [-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)]\sin x \\ + [\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2, $0=2\beta+\mu$ pre x^1, $0=\gamma+\nu$ pre x^0.

$\Rightarrow \alpha = -1,\ \varphi = 3,$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0]\sin x + [0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0]\cos x = \\ = [-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)]\sin x \\ + [\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2, $0=2\beta+\mu$ pre x^1, $0=\gamma+\nu$ pre x^0.

$\Rightarrow\ \alpha=-1,\ \varphi=3,\ \gamma=6,$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\left[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\sin x + \left[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\right]\sin x \\ + \left[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2, $0=2\beta+\mu$ pre x^1, $0=\gamma+\nu$ pre x^0.

$\Rightarrow\ \alpha=-1,\ \varphi=3,\ \gamma=6,\ \nu=-6,$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu)\sin x + c,$
$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x + (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu)\sin x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu)\cos x,$$

$$\big[1\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0\big]\sin x + \big[0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0\big]\cos x = \big[-\alpha x^3 + (3\psi - \beta)x^2 + (2\varphi - \gamma)x + (\mu - \delta)\big]\sin x + \big[\psi x^3 + (3\alpha + \varphi)x^2 + (2\beta + \mu)x + (\gamma + \nu)\big]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x:$ $1 = -\alpha$ pre x^3, $0 = 3\psi - \beta$ pre x^2, $0 = 2\varphi - \gamma$ pre x^1, $0 = \mu - \delta$ pre x^0,

$\cos x:$ $0 = \psi$ pre x^3, $0 = 3\alpha + \varphi$ pre x^2, $0 = 2\beta + \mu$ pre x^1, $0 = \gamma + \nu$ pre x^0.

$\Rightarrow\ \alpha = -1,\ \varphi = 3,\ \gamma = 6,\ \nu = -6,$ resp. $\psi = 0,$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu)\sin x + c,$

$x \in R,\ c \in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x + (3\psi x^2 + 2\varphi x + \mu)\sin x + (\psi x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu)\cos x,$$

$$\left[1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right]\sin x + \left[0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\right]\cos x = \\ = \left[-\alpha x^3 + (3\psi - \beta)x^2 + (2\varphi - \gamma)x + (\mu - \delta)\right]\sin x \\ + \left[\psi x^3 + (3\alpha + \varphi)x^2 + (2\beta + \mu)x + (\gamma + \nu)\right]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x:$ $1 = -\alpha$ pre x^3, $0 = 3\psi - \beta$ pre x^2, $0 = 2\varphi - \gamma$ pre x^1, $0 = \mu - \delta$ pre x^0,

$\cos x:$ $0 = \psi$ pre x^3, $0 = 3\alpha + \varphi$ pre x^2, $0 = 2\beta + \mu$ pre x^1, $0 = \gamma + \nu$ pre x^0.

$\Rightarrow \alpha = -1,\ \varphi = 3,\ \gamma = 6,\ \nu = -6,$ resp. $\psi = 0,\ \beta = 0,$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$

$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\big[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\sin x + \big[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\cos x = \\ = \big[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\big]\sin x \\ + \big[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\big]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2, $0=2\beta+\mu$ pre x^1, $0=\gamma+\nu$ pre x^0.

$\Rightarrow\ \alpha=-1,\ \varphi=3,\ \gamma=6,\ \nu=-6,$ resp. $\psi=0,\ \beta=0,\ \mu=0,$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$
$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm \sin x)' = \pm \cos x$, $(\pm \cos x)' = \mp \sin x$.]

$$x^3 \sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\big[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\sin x + \big[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\cos x = \\ = \big[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\big]\sin x \\ + \big[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\big]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x$: $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x$: $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2, $0=2\beta+\mu$ pre x^1, $0=\gamma+\nu$ pre x^0.

$\Rightarrow\ \alpha = -1,\ \varphi = 3,\ \gamma = 6,\ \nu = -6,$ resp. $\psi = 0,\ \beta = 0,\ \mu = 0,\ \delta = 0.$

Metóda neurčitých koeficientov

$I_3 = \int x^3 \sin x \, dx = (-x^3+6x)\cos x + (3x^2-6)\sin x + c$

Odhad $I_3 = (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\cos x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\sin x + c,$

$x\in R,\ c\in R,$ kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu \in R.$

Derivácia odhadu [V odhade musí byť $\sin x$ a aj $\cos x$, pretože $(\pm\sin x)' = \pm\cos x$, $(\pm\cos x)' = \mp\sin x$.]

$$x^3\sin x = (3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)\cos x - (\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\sin x + (3\psi x^2+2\varphi x+\mu)\sin x + (\psi x^3+\varphi x^2+\mu x+\nu)\cos x,$$

$$\big[1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\sin x + \big[0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\big]\cos x = \\ = \big[-\alpha x^3 + (3\psi-\beta)x^2 + (2\varphi-\gamma)x + (\mu-\delta)\big]\sin x + \big[\psi x^3 + (3\alpha+\varphi)x^2 + (2\beta+\mu)x + (\gamma+\nu)\big]\cos x.$$

Osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi, \mu, \nu$:

$\sin x:$ $1=-\alpha$ pre x^3, $0=3\psi-\beta$ pre x^2, $0=2\varphi-\gamma$ pre x^1, $0=\mu-\delta$ pre x^0,

$\cos x:$ $0=\psi$ pre x^3, $0=3\alpha+\varphi$ pre x^2, $0=2\beta+\mu$ pre x^1, $0=\gamma+\nu$ pre x^0.

$\Rightarrow\ \alpha=-1,\ \varphi=3,\ \gamma=6,\ \nu=-6,$ resp. $\psi=0,\ \beta=0,\ \mu=0,\ \delta=0.$

Riešenie $I_3 = (-x^3+6x)\cos x + (3x^2-6)\sin x + c,\ x\in R,\ c\in R.$

Metóda substitúcie – 1. metóda (jednostranná)

1. metóda substitúcie $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x=\varphi(t)$ má deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale J, $\varphi(J)\subset I$.

Metóda substitúcie – 1. metóda (jednostranná)

1. metóda substitúcie $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x=\varphi(t)$ má deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale J, $\varphi(J) \subset I$.

$\Rightarrow$ $F[\varphi(t)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J

Metóda substitúcie – 1. metóda (jednostranná)

1. metóda substitúcie $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x=\varphi(t)$ má deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale J, $\varphi(J)\subset I$.

$\Rightarrow$ $F[\varphi(t)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J a platí

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx = F(x)+c = F[\varphi(t)]+c,\; t\in J,\; c\in R.$$

Metóda substitúcie – 1. metóda (jednostranná)

1. metóda substitúcie $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x=\varphi(t)$ má deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale J, $\varphi(J)\subset I$.

$\Rightarrow$ $F[\varphi(t)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J a platí

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+c=F[\varphi(t)]+c,\ t\in J,\ c\in R.$$

Zložená funkcia $F(x)=F[\varphi(t)]$ je primitívna k $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$, pretože

$F'(x)=\big[F[\varphi(t)]\big]'=F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ pre $x\in I$, $x=\varphi(t)$, $t\in J$.

Metóda substitúcie – 1. metóda (jednostranná)

1. metóda substitúcie $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x=\varphi(t)$ má deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale J, $\varphi(J)\subset I$.

$\Rightarrow$ $F[\varphi(t)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J a platí

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c = F[\varphi(t)]+c,\ t\in J,\ c\in R.$$

Zložená funkcia $F(x)=F[\varphi(t)]$ je primitívna k $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$, pretože

$$F'(x)=\big[F[\varphi(t)]\big]'=F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) \text{ pre } x\in I,\ x=\varphi(t),\ t\in J.$$

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$.

Metóda substitúcie – 1. metóda (jednostranná)

1. metóda substitúcie $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x=\varphi(t)$ má deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale J, $\varphi(J) \subset I$.

$\Rightarrow$ $F[\varphi(t)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J a platí

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx = F(x)+c = F[\varphi(t)]+c,\ t\in J,\ c\in R.$$

Zložená funkcia $F(x) = F[\varphi(t)]$ je primitívna k $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$, pretože

$$F'(x) = \big[F[\varphi(t)]\big]' = F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) \text{ pre } x\in I,\ x=\varphi(t),\ t\in J.$$

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t)$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a diferenciál $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$, t. j. substitúcia.

Metóda substitúcie – 1. metóda (jednostranná)

1. metóda substitúcie $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x=\varphi(t)$ má deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale J, $\varphi(J)\subset I$.

$\Rightarrow$ $F[\varphi(t)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J a platí

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c = F[\varphi(t)]+c,\ t\in J,\ c\in R.$$

Zložená funkcia $F(x)=F[\varphi(t)]$ je primitívna k $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$, pretože

$$F'(x)=\big[F[\varphi(t)]\big]'=F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) \text{ pre } x\in I,\ x=\varphi(t),\ t\in J.$$

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a diferenciál $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\varphi(t)=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. substitúcia.
- Nájdeme primitívnu funkciu $F(x)$, t. j. vypočítame $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Metóda substitúcie – 1. metóda (jednostranná)

1. metóda substitúcie $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x=\varphi(t)$ má deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale J, $\varphi(J)\subset I$.

$\Rightarrow$ $F[\varphi(t)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J a platí

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+c=F[\varphi(t)]+c,\ t\in J,\ c\in R.$$

Zložená funkcia $F(x)=F[\varphi(t)]$ je primitívna k $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$, pretože

$$F'(x)=\big[F[\varphi(t)]\big]'=F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\text{ pre } x\in I,\ x=\varphi(t),\ t\in J.$$

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a diferenciál $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\varphi(t)=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, t. j. substitúcia.
- Nájdeme primitívnu funkciu $F(x)$, t. j. vypočítame $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Rovnakou substitúciou $x=\varphi(t)$ dostaneme primitívnu funkciu $F[\varphi(t)]$.

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \, \cos t \, \mathrm{d}t$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \, \cos t \, dt$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad x & = \sin t & t \in R \\ dx & = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \, \cos t \, dt$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad x &= \sin t & t \in R \\ dx &= \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx$$

Metóda substitúcie

$\int \sin^3 t \cos t \, dt$

$$= \left[\begin{array}{r r c l | l} \text{Subst.} & x & = & \sin t & t \in R \\ & dx & = & \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \, \cos t \, dt$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad x & = \sin t & t \in R \\ dx & = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & x = \sin t & t \in R \\ & dx = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \; t \in R, \; c \in R.$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & x = \sin t & t \in R \\ & dx = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \ t \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1}$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & x = \sin t & t \in R \\ & dx = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \; t \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = x^4 & x \in R \\ & dt = 4x^3 \, dx & t \in R \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad x = & \sin t & t \in R \\ dx = & \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \ t \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad t = & x^4 & x \in R \\ dt = & 4x^3 \, dx & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \, \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & x = \sin t & t \in R \\ & \mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \; t \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8 + 1}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = x^4 & x \in R \\ & \mathrm{d}t = 4x^3 \, \mathrm{d}x & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1}$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad x = & \sin t & t \in R \\ dx = & \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \; t \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad t = & x^4 & x \in R \\ dt = & 4x^3 \, dx & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst.} \quad x = \sin t \\ dx = \cos t \, dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} t \in R \\ x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \; t \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst.} \quad t = x^4 \\ dt = 4x^3 \, dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in R \\ t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & x = \sin t & t \in R \\ dx & = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \; t \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = x^4 & x \in R \\ dt & = 4x^3 \, dx & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & x = \sin t & t \in R \\ & dx = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \; t \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = x^4 & x \in R \\ & dt = 4x^3 \, dx & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } t = f(x) \\ dt = f'(x) \, dx \end{array} \right]$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = f(t) \\ dx = f'(t) \, dt \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst.} \quad x = \sin t \\ dx = \cos t \, dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} t \in R \\ x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \ t \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst.} \quad t = x^4 \\ dt = 4x^3 \, dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in R \\ t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst.} \ t = f(x) \\ dt = f'(x) \, dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst.} \ x = f(t) \\ dx = f'(t) \, dt \end{array} \right] = \int \frac{dx}{x}$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad x = \sin t & & t \in R \\ dx = \cos t \, dt & & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \ t \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad t = x^4 & & x \in R \\ dt = 4x^3 \, dx & & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \ t = f(x) \\ dt = f'(x) \, dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \ x = f(t) \\ dx = f'(t) \, dt \end{array} \right] = \int \frac{dx}{x}$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad x = & \sin t & t \in R \\ dx = & \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \; t \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} \quad t = & x^4 & x \in R \\ dt = & 4x^3 \, dx & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst.} \; t = f(x) \\ dt = f'(x) \, dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst.} \; x = f(t) \\ dx = f'(t) \, dt \end{array} \right] = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

Metóda substitúcie

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \frac{\sin^4 t}{4} + c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \sin t & t \in R \\ dx = \cos t \, dt & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \ t \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^4 & x \in R \\ dt = 4x^3 \, dx & t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } t = f(x) \\ dt = f'(x) \, dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c$$
$$= \ln |f(x)| + c, \ x \in D(f), \ c \in R.$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)} \, dt = \ln |f(t)| + c$$

$$= \left[\begin{array}{r} \text{Subst. } x = f(t) \\ dx = f'(t) \, dt \end{array} \right] = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$
$$= \ln |f(t)| + c, \ t \in D(f), \ c \in R.$$

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(t+b)\,\mathrm{d}t$$

$$\int f(-t)\,\mathrm{d}t$$

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = at+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & dx = a\,dt \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array}\right]$$

$$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = t+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & dx = dt \end{array}\right]$$

$$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = -t & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & dx = -\,dt \end{array}\right]$$

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = at+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & dx = a\,dt \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a}$$

$$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = t+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & dx = dt \end{array}\right] = \int f(x)\,dx$$

$$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = -t & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & dx = -\,dt \end{array}\right] = -\int f(x)\,dx$$

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = at+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a}$$

$$\int f(t+b)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = t+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f(-t)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = -t & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = -\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = at+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & dx = a\,dt \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array} \right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a} + c$$

$$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = t+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & dx = dt \end{array} \right] = \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = -t & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & dx = -\,dt \end{array} \right] = -\int f(x)\,dx = -F(x) + c$$

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x = at+b & t\in(\alpha;\beta) \\ x\in(a\alpha+b;\, a\beta+b) & dx = a\,dt \\ \text{resp. } x\in(a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c,$$
$$t\in(\alpha;\beta),\ c\in R.$$

$$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x = t+b & t\in(\alpha;\beta) \\ x\in(\alpha+b;\, \beta+b) & dx = dt \end{array}\right] = \int f(x)\,dx = F(x)+c = F(t+b)+c,$$
$$t\in(\alpha;\beta),\ c\in R.$$

$$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x = -t & t\in(\alpha;\beta) \\ x\in(-\beta;\, -\alpha) & dx = -\,dt \end{array}\right] = -\int f(x)\,dx = -F(x)+c = -F(-t)+c,$$
$$t\in(\alpha;\beta),\ c\in R.$$

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x = at+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (a\alpha+b;\, a\beta+b)$ pre $a > 0$, resp. na $I = (a\beta+b;\, a\alpha+b)$ pre $a < 0$,

---

$$\int f(t+b)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x = t+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F(t+b) + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (\alpha+b;\, \beta+b)$,

---

$$\int f(-t)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x = -t & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = -\int f(x)\,\mathrm{d}x = -F(x) + c = -F(-t) + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (-\beta;\, -\alpha)$,

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = at+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & dx = a\,dt \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (a\alpha+b;\, a\beta+b)$ pre $a > 0$, resp. na $I = (a\beta+b;\, a\alpha+b)$ pre $a < 0$,
$\frac{F(at+b)}{a}$ je primitívna k $f(at+b)$ na $J = (\alpha;\beta)$,

---

$$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = t+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & dx = dt \end{array}\right] = \int f(x)\,dx = F(x) + c = F(t+b) + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (\alpha+b;\, \beta+b)$, $F(t+b)$ je primitívna k $f(t+b)$ na $J = (\alpha;\beta)$,

---

$$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = -t & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & dx = -\,dt \end{array}\right] = -\int f(x)\,dx = -F(x) + c = -F(-t) + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (-\beta;\, -\alpha)$, $-F(-t)$ je primitívna k $f(-t)$ na $J = (\alpha;\beta)$,

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = at+b & t \in (\alpha; \beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & dx = a\,dt \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array} \right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c, \quad t \in (\alpha; \beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (a\alpha+b;\, a\beta+b)$ pre $a > 0$, resp. na $I = (a\beta+b;\, a\alpha+b)$ pre $a < 0$,

$\frac{F(at+b)}{a}$ je primitívna k $f(at+b)$ na $J = (\alpha; \beta)$,

$x = \varphi(t) = at+b$ má na $J = (\alpha; \beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = a$,

---

$$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = t+b & t \in (\alpha; \beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & dx = dt \end{array} \right] = \int f(x)\,dx = F(x) + c = F(t+b) + c, \quad t \in (\alpha; \beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (\alpha+b;\, \beta+b)$, $F(t+b)$ je primitívna k $f(t+b)$ na $J = (\alpha; \beta)$,

$x = \varphi(t) = t+b$ má na $J = (\alpha; \beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = 1$,

---

$$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x = -t & t \in (\alpha; \beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & dx = -\,dt \end{array} \right] = -\int f(x)\,dx = -F(x) + c = -F(-t) + c, \quad t \in (\alpha; \beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (-\beta;\, -\alpha)$, $-F(-t)$ je primitívna k $f(-t)$ na $J = (\alpha; \beta)$,

$x = \varphi(t) = -t$ má na $J = (\alpha; \beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = -1$,

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.

$$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x = at+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & dx = a\,dt \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c,\quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (a\alpha+b;\, a\beta+b)$ pre $a > 0$, resp. na $I = (a\beta+b;\, a\alpha+b)$ pre $a < 0$,

$\frac{F(at+b)}{a}$ je primitívna k $f(at+b)$ na $J = (\alpha;\beta)$,

$x = \varphi(t) = at+b$ má na $J = (\alpha;\beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = a$, $dx = \varphi'(t)\,dt = a\,dt$,

---

$$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x = t+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & dx = dt \end{array}\right] = \int f(x)\,dx = F(x) + c = F(t+b) + c,\quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (\alpha+b;\, \beta+b)$, $F(t+b)$ je primitívna k $f(t+b)$ na $J = (\alpha;\beta)$,

$x = \varphi(t) = t+b$ má na $J = (\alpha;\beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = 1$, $dx = \varphi'(t)\,dt = dt$,

---

$$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x = -t & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & dx = -\,dt \end{array}\right] = -\int f(x)\,dx = -F(x) + c = -F(-t) + c,\quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (-\beta;\, -\alpha)$, $-F(-t)$ je primitívna k $f(-t)$ na $J = (\alpha;\beta)$,

$x = \varphi(t) = -t$ má na $J = (\alpha;\beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = -1$, $dx = \varphi'(t)\,dt = -\,dt$,

Metóda substitúcie

F je primitívna k f na intervale I, $\alpha, \beta \in R,\ \alpha < \beta, \quad a, b \in R,\ a \neq 0.$

$$\int f(at+b)\,dt = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\quad x = at+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (a\alpha+b;\, a\beta+b) & dx = a\,dt \\ \text{resp. } x \in (a\beta+b;\, a\alpha+b) & \end{array}\right] = \int \frac{f(x)\,dx}{a} = \frac{F(x)}{a} + c = \frac{F(at+b)}{a} + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (a\alpha+b;\, a\beta+b)$ pre $a > 0$, resp. na $I = (a\beta+b;\, a\alpha+b)$ pre $a < 0$,
$\frac{F(at+b)}{a}$ je primitívna k $f(at+b)$ na $J = (\alpha;\beta)$,
$x = \varphi(t) = at+b$ má na $J = (\alpha;\beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = a$, $dx = \varphi'(t)\,dt = a\,dt$, $\varphi(J) = I$.

$$\int f(t+b)\,dt = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\quad x = t+b & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (\alpha+b;\, \beta+b) & dx = dt \end{array}\right] = \int f(x)\,dx = F(x) + c = F(t+b) + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (\alpha+b;\, \beta+b)$, $F(t+b)$ je primitívna k $f(t+b)$ na $J = (\alpha;\beta)$,
$x = \varphi(t) = t+b$ má na $J = (\alpha;\beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = 1$, $dx = \varphi'(t)\,dt = dt$, $\varphi(J) = I$.

$$\int f(-t)\,dt = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\quad x = -t & t \in (\alpha;\beta) \\ x \in (-\beta;\, -\alpha) & dx = -\,dt \end{array}\right] = -\int f(x)\,dx = -F(x) + c = -F(-t) + c, \quad t \in (\alpha;\beta),\ c \in R.$$

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na $I = (-\beta;\, -\alpha)$, $-F(-t)$ je primitívna k $f(-t)$ na $J = (\alpha;\beta)$,
$x = \varphi(t) = -t$ má na $J = (\alpha;\beta)$ deriváciu $\varphi'(t) = -1$, $dx = \varphi'(t)\,dt = -\,dt$, $\varphi(J) = I$.

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$,

I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x = \varphi(t)\colon J \to I$, $\varphi'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in J$, I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$, I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$,

I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Funkcia $x=\varphi(t)$ je rýdzo monotónna,

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$, I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Funkcia $x=\varphi(t)$ je rýdzo monotónna,

t. j. je prostá a existuje k nej inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$.

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$, I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Funkcia $x=\varphi(t)$ je rýdzo monotónna,

t. j. je prostá a existuje k nej inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$.

Funkcia $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna k $f(x)$,

pretože pre $x\in I$, $x=\varphi(t)$, $t\in J$ platí

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$, I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Funkcia $x=\varphi(t)$ je rýdzo monotónna,

t. j. je prostá a existuje k nej inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$.

Funkcia $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna k $f(x)$,

pretože pre $x\in I$, $x=\varphi(t)$, $t\in J$ platí

$$\big[F[\varphi^{-1}(x)]\big]' = F'[\varphi^{-1}(x)]\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$, I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Funkcia $x=\varphi(t)$ je rýdzo monotónna,

t. j. je prostá a existuje k nej inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$.

Funkcia $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna k $f(x)$,

pretože pre $x\in I$, $x=\varphi(t)$, $t\in J$ platí

$$\big[F[\varphi^{-1}(x)]\big]' = F'[\varphi^{-1}(x)]\cdot[\varphi^{-1}(x)]' = F'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$, I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Funkcia $x=\varphi(t)$ je rýdzo monotónna,

t. j. je prostá a existuje k nej inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$.

Funkcia $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna k $f(x)$,

pretože pre $x\in I$, $x=\varphi(t)$, $t\in J$ platí

$$\big[F[\varphi^{-1}(x)]\big]' = F'[\varphi^{-1}(x)]\cdot[\varphi^{-1}(x)]' = F'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$

$$= f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\big[\varphi^{-1}(x)\big]'$$

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I,\ \varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$,
I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Funkcia $x=\varphi(t)$ je rýdzo monotónna,

t. j. je prostá a existuje k nej inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$.

Funkcia $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna k $f(x)$,

pretože pre $x\in I,\ x=\varphi(t),\ t\in J$ platí

$$\big[F[\varphi^{-1}(x)]\big]' = F'[\varphi^{-1}(x)]\cdot[\varphi^{-1}(x)]' = F'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$

$$= f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\big[\varphi^{-1}(x)\big]' = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\tfrac{1}{\varphi'(t)}$$

Metóda substitúcie – 2. metóda (obojstranná)

2. metóda substitúcie $x=\varphi(t)\colon J\to I$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$, I, J sú intervaly, $F(t)$ je primitívna k funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ na J.

$\Rightarrow$ $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+c = F[\varphi^{-1}(x)]+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Funkcia $x=\varphi(t)$ je rýdzo monotónna,

t. j. je prostá a existuje k nej inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)$.

Funkcia $F[\varphi^{-1}(x)]$ je primitívna k $f(x)$,

pretože pre $x\in I$, $x=\varphi(t)$, $t\in J$ platí

$$\left[F[\varphi^{-1}(x)]\right]' = F'[\varphi^{-1}(x)]\cdot[\varphi^{-1}(x)]' = F'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$

$$= f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\left[\varphi^{-1}(x)\right]' = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx=\cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right]$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x\in\langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t}$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0) \cup (0;1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t}$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx=\cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\cos t\cdot \cos t\,dt}{\sin^2 t}$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx=\cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\int \frac{1-\sin^2 t\,dt}{\sin^2 t}$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t\,dt}{\sin^2 t} = \int \Big(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\Big)\,dt$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ \qquad t = \arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t\,dt}{\sin^2 t} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt = -\operatorname{cotg} t - t + c$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx=\cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\tfrac{\pi}{2};0)\cup(0;\tfrac{\pi}{2}) \\ \qquad t=\arcsin x & t\in\langle -\tfrac{\pi}{2};0)\cup(0;\tfrac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\int \frac{1-\sin^2 t\,dt}{\sin^2 t}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\operatorname{cotg} t-t+c$$

$$=-\frac{\cos t}{\sin t}-t+c$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t,\qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right]$$

$$=\int\frac{\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=\int\frac{1-\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=\int\Big(\frac{1}{\sin^2 t}-1\Big)\,\mathrm{d}t=-\operatorname{cotg} t-t+c$$

$$=-\frac{\cos t}{\sin t}-t+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+c,\ x\in\langle -1;1\rangle-\{0\},\ c\in R.$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ \quad t = \arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t\,dt}{\sin^2 t} = \int\Big(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\Big)\,dt = -\operatorname{cotg} t - t + c$$

$$= -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c,\ x\in\langle -1;1\rangle - \{0\},\ c\in R.$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t\,dt}{\sin^2 t} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) dt = -\operatorname{cotg} t - t + c$$

$$= -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c,\ x\in\langle -1;1\rangle - \{0\},\ c\in R.$$

Metóda substitúcie

Metóda sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$.

- Nahradíme $x=\varphi(t)$ a zostrojíme $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.
- K funkcii $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$.
- Inverznou substitúciou $t=\varphi^{-1}(x)$ získame primitívnu funkciu $F[\varphi^{-1}(x)]$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & dx = \cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t\,dt}{\sin^2 t} = \int \Big(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\Big)\,dt = -\operatorname{cotg} t - t + c$$

$$= -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c,\ x\in\langle -1;1\rangle - \{0\},\ c\in R.$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \sin t & x \in (-1; 1) & dx = \cos t\, dt, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x = \cos t & x \in (-1; 1) & dx = -\sin t\, dt, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) \\ t = \arccos x & t \in (0; \pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in (-1; 1) & dx = \cos t \, dt, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t \, dt}{\cos t}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad x = \cos t & x \in (-1; 1) & dx = -\sin t \, dt, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) \\ t = \arccos x & t \in (0; \pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t \, dt}{\sin t}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in (-1;1) & dx = \cos t\, dt, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad x = \cos t & x \in (-1;1) & dx = -\sin t\, dt, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\, dt}{\sin t}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in (-1; 1) & dx = \cos t\, dt, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad x = \cos t & x \in (-1; 1) & dx = -\sin t\, dt, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) \\ t = \arccos x & t \in (0; \pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\, dt}{\sin t} = -\int dt$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & dx = \cos t\, dt, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & dx = -\sin t\, dt, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) \\ t = \arccos x & t \in (0; \pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\, dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|ll} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in (-1;1) & dx = \cos t\, dt, & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}) & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t} \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1, \; x \in (-1;1), \; c_1 \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|ll} \text{Subst.} \quad x = \cos t & x \in (-1;1) & dx = -\sin t\, dt, & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t} \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\, dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2, \; x \in (-1;1), \; c_2 \in R.$$

Obe riešenia príkladu sú správne, pretože $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ platí pre všetky $x \in \langle -1; 1 \rangle$, t. j. obe primitívne funkcie sa na intervale $(-1; 1)$ líšia iba o konštantu $\frac{\pi}{2}$.

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in(-1;1) & dx=\cos t\,dt, \qquad \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x\in(-1;1),\ c_1\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad x=\cos t & x\in(-1;1) & dx=-\sin t\,dt, \qquad \sin t>0 \text{ pre } t\in(0;\pi) \\ t=\arccos x & t\in(0;\pi) & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\,dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x\in(-1;1),\ c_2\in R.$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & dx = \cos t\, dt, \qquad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & dx = -\sin t\, dt, \qquad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\, dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$$

- Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou.

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|ll} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & dx = \cos t\, dt, & \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t} \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x \in (-1;1),\ c_1 \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|ll} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & dx = -\sin t\, dt, & \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t} \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\, dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x \in (-1;1),\ c_2 \in R.$$

- Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou.
- Pri rôznych postupoch môžeme dostať zdanlivo rôzne výsledky.

Obe riešenia príkladu sú správne, pretože $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ platí pre všetky $x \in \langle -1; 1\rangle$
[t. j. obe primitívne funkcie sa na intervale $(-1;1)$ líšia iba o konštantu $\frac{\pi}{2}$]

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|ll} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in(-1;1) & dx=\cos t\,dt, & \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t} \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x\in(-1;1),\ c_1\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|ll} \text{Subst.}\quad x=\cos t & x\in(-1;1) & dx=-\sin t\,dt, & \sin t>0 \text{ pre } t\in(0;\pi) \\ t=\arccos x & t\in(0;\pi) & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t} \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\,dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x\in(-1;1),\ c_2\in R.$$

- Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou.
- Pri rôznych postupoch môžeme dostať zdanlivo rôzne výsledky.
- Pokiaľ sme sa nepomýlili, výsledky sú rovnaké, sú vyjadrené v rôznych tvaroch a môžu sa líšiť o integračnú konštantu.

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & dx = \cos t\,dt, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1, \ x \in (-1;1), \ c_1 \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & dx = -\sin t\,dt, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\,dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2, \ x \in (-1;1), \ c_2 \in R.$$

- Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou.
- Pri rôznych postupoch môžeme dostať zdanlivo rôzne výsledky.
- Pokiaľ sme sa nepomýlili, výsledky sú rovnaké, sú vyjadrené v rôznych tvaroch a môžu sa líšiť o integračnú konštantu.

Obe riešenia príkladu sú správne, pretože $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ platí pre všetky $x \in \langle -1; 1 \rangle$,

t. j. obe primitívne funkcie sa na intervale $\langle -1; 1 \rangle$ líšia iba o konštantu $\frac{\pi}{2}$.

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1; 1) & dx = \cos t \, dt, \quad \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \int \frac{\cos t \, dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1, \ x \in (-1; 1), \ c_1 \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1; 1) & dx = -\sin t \, dt, \quad \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0; \pi) \\ t = \arccos x & t \in (0; \pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t \, dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2, \ x \in (-1; 1), \ c_2 \in R.$$

- Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou.
- Pri rôznych postupoch môžeme dostať zdanlivo rôzne výsledky.
- Pokiaľ sme sa nepomýlili, výsledky sú rovnaké, sú vyjadrené v rôznych tvaroch a môžu sa líšiť o integračnú konštantu.

Obe riešenia príkladu sú správne, pretože $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ platí pre všetky $x \in \langle -1; 1 \rangle$, t. j. obe primitívne funkcie sa na intervale $(-1; 1)$ líšia iba o konštantu $\frac{\pi}{2}$.

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|ll} \text{Subst.} \quad x=\sin t & x\in(-1;1) & dx=\cos t\,dt, & \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \\ t=\arcsin x & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t} \end{array} \right] = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \arcsin x + c_1,\ x\in(-1;1),\ c_1\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|ll} \text{Subst.} \quad x=\cos t & x\in(-1;1) & dx=-\sin t\,dt, & \sin t>0 \text{ pre } t\in(0;\pi) \\ t=\arccos x & t\in(0;\pi) & \multicolumn{2}{l}{\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t} \end{array} \right] = \int \frac{-\sin t\,dt}{\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_2 = -\arccos x + c_2,\ x\in(-1;1),\ c_2\in R.$$

- Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou.
- Pri rôznych postupoch môžeme dostať zdanlivo rôzne výsledky.
- Pokiaľ sme sa nepomýlili, výsledky sú rovnaké, sú vyjadrené v rôznych tvaroch a môžu sa líšiť o integračnú konštantu.

  Obe riešenia príkladu sú správne, pretože $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ platí pre všetky $x\in\langle -1;1\rangle$, t. j. obe primitívne funkcie sa na intervale $(-1;1)$ líšia iba o konštantu $\frac{\pi}{2}$.
- O správnosti sa presvedčíme napríklad spätným derivovaním výsledku.

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2}$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2}$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t = 2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x\in R \\ dx=\frac{dt}{2} & x=\frac{t}{2} & t\in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} \int \cos t \, dt$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t = 2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x\in R \\ dx=\frac{dt}{2} & x=\frac{t}{2} & t\in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 2}\int \cos t \, dt$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c, \; x\in R, \; c\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & \\ v' = \cos x & \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t = 2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u & = & \cos x & u' & = & -\sin x \\ v' & = & \cos x & v & = & \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x\, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x\in R \\ dx=\frac{dt}{2} & x=\frac{t}{2} & t\in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 2}\int \cos t\, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c, \; x\in R, \; c\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u = & \cos x & u' = & -\sin x \\ v' = & \cos x & v = & \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \cos x & u' & = -\sin x \\ v' & = \cos x & v & = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t = 2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u & = & \cos x & u' & = & -\sin x \\ v' & = & \cos x & v & = & \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t = 2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$I = \left[\begin{array}{lcl|lcl} u & = & \cos x & u' & = & -\sin x \\ v' & = & \cos x & v & = & \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u = & \cos x & u' = & -\sin x \\ v' = & \cos x & v = & \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u & = & \cos x & u' & = & -\sin x \\ v' & = & \cos x & v & = & \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{lcl|l} u & = & \cos x & \\ v' & = & \cos x & \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x\in R \\ dx=\frac{dt}{2} & x=\frac{t}{2} & t\in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} \int \cos t \, dt$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x\in R, \; c\in R.$

$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u & = & \cos x & u' & = & -\sin x \\ v' & = & \cos x & v & = & \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1-\cos^2 x) \, dx$

$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$

$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x\in R, \; c\in R.$

$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u & = & \cos x & u' & = & -\sin x \\ v' & = & \cos x & v & = & \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \left[\begin{array}{lcl|} u & = & \sin x \\ v' & = & \sin x \end{array} \quad \right]$

$= \sin x \cos x + \left[\quad \right]$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= \sin x \cos x + \left[-\sin x \cos x \qquad \right]$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x\in R \\ dx=\frac{dt}{2} & x=\frac{t}{2} & t\in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x\in R, \; c\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1-\cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x\in R, \; c\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= \sin x \cos x + \left[-\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \right]$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$I = \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= \sin x \cos x + \left[-\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \right] = I$$

Metóda substitúcie

$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$

$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=2x & x \in R \\ dx = \frac{dt}{2} & x = \frac{t}{2} & t \in R \end{array} \right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos t \, dt$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$= \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - I$

$\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x + x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \; x \in R, \; c \in R.$

$= \left[\begin{array}{l|l} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$

$= \sin x \cos x + \left[-\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \right] = I$, t. j. táto cesta nevedie k cieľu.

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$$

Metóda substitúcie

$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx$

$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0; \infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right]$

Metóda substitúcie

$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx$

$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad t = \ln x & x \in (0; \infty) \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\,dt$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{rr|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0; \infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\, dt$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx$$

$$= \left[\text{Subst.} \begin{array}{r|l} t = \ln x & x \in (0; \infty) \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{rr|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{rcl|} u & = & \ln x \\ v' & = & \frac{1}{x} \end{array}\quad\right]$$

Metóda substitúcie

$I = \int \frac{\ln x}{x} \, dx$

$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c, \; x \in (0;\infty), \; c \in R.$

$= \left[\begin{array}{rcl|rcl} u & = & \ln x & u' & = & \frac{1}{x} \\ v' & = & \frac{1}{x} & v & = & \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{lcl|lcl} u & = & \ln x & u' & = & \frac{1}{x} \\ v' & = & \frac{1}{x} & v & = & \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$I = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' & = \frac{1}{x} \\ v' & = \frac{1}{x} & v & = \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\, dx$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$= \left[\text{Subst.} \quad \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \in (0;\infty) \\ t \in R \end{matrix} \right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$= \left[\begin{matrix} u = \ln x \\ v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u' = \frac{1}{x} \\ v = \ln x \end{matrix} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow I = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$= \left[\begin{array}{cc|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} u & = \ln x & u' & = \frac{1}{x} \\ v' & = \frac{1}{x} & v & = \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\, dx \Rightarrow I = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$\int \mathrm{tg}^3 x\, dx$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$= \left[\begin{array}{ll|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{rcl|rcl} u & = & \ln x & u' & = & \frac{1}{x} \\ v' & = & \frac{1}{x} & v & = & \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow I = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll|l} \text{Subst.} & t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = (t^2+1)\,dx, \quad t \in R \\ & x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in Z \end{array}\right]$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{rcl|rcl} u & = & \ln x & u' & = & \frac{1}{x} \\ v' & = & \frac{1}{x} & v & = & \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\, dx \Rightarrow I = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx = (t^2+1)\, dx, \quad t \in R \\ x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{t^3\, dt}{t^2+1}$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$= \left[\begin{array}{cc|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array} \right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} u & = & \ln x & u' & = & \frac{1}{x} \\ v' & = & \frac{1}{x} & v & = & \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow I = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{cc|l} \text{Subst.} & t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = (t^2+1)\,dx, \quad t \in R \\ & x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{t^3\,dt}{t^2+1}$$

Metóda substitúcie

$$I=\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{\ln^2 x}{2}+c$$

$$=\left[\begin{array}{rl|l}\text{Subst.} & t=\ln x & x\in(0;\infty)\\ & dt=\frac{dx}{x} & t\in R\end{array}\right]=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{rcl|rcl}u&=&\ln x & u'&=&\frac{1}{x}\\ v'&=&\frac{1}{x} & v&=&\ln x\end{array}\right]=\ln^2 x-\int\frac{\ln x}{x}\,dx\Rightarrow I=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

$$\int\operatorname{tg}^3 x\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{rl|l}\text{Subst.} & t=\operatorname{tg} x & dt=\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=(\operatorname{tg}^2 x+1)\,dx=(t^2+1)\,dx,\quad t\in R\\ & x=\operatorname{arctg} t & dx=\frac{dt}{t^2+1},\qquad x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi),\ k\in Z\end{array}\right]=\int\frac{t^3\,dt}{t^2+1}$$

$$=\int\frac{t^3+t-t\,dt}{t^2+1}$$

Metóda substitúcie

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = \ln x & x \in (0;\infty) \\ & dt = \frac{dx}{x} & t \in R \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$= \left[\begin{array}{rcl|rcl} u & = & \ln x & u' & = & \frac{1}{x} \\ v' & = & \frac{1}{x} & v & = & \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow I = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x \in (0;\infty),\ c \in R.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = \operatorname{tg} x & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = (t^2+1)\,dx, \quad t \in R \\ & x = \operatorname{arctg} t & dx = \frac{dt}{t^2+1}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in Z \end{array}\right] = \int \frac{t^3\,dt}{t^2+1}$$

$$= \int \frac{t^3 + t - t\,dt}{t^2+1} = \int t\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+1}$$

Metóda substitúcie

$$I=\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{\ln^2 x}{2}+c$$

$$=\left[\begin{array}{ll|l}\text{Subst.} & t=\ln x & x\in(0;\infty) \\ & dt=\frac{dx}{x} & t\in R\end{array}\right]=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{lcl|lcl} u & = & \ln x & u' & = & \frac{1}{x} \\ v' & = & \frac{1}{x} & v & = & \ln x\end{array}\right]=\ln^2 x-\int\frac{\ln x}{x}\,dx\Rightarrow I=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

$$\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{ll|l}\text{Subst.} & t=\mathrm{tg}\,x & dt=\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=(\mathrm{tg}^2 x+1)\,dx=(t^2+1)\,dx,\quad t\in R \\ & x=\mathrm{arctg}\,t & dx=\frac{dt}{t^2+1},\qquad x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi),\ k\in Z\end{array}\right]=\int\frac{t^3\,dt}{t^2+1}$$

$$=\int\frac{t^3+t-t\,dt}{t^2+1}=\int t\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+1}=\int t\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)'\,dt}{t^2+1}$$

Metóda substitúcie

$$I=\int \frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{\ln^2 x}{2}+c$$

$$=\left[\begin{array}{rl|l}\text{Subst.} & t=\ln x & x\in(0;\infty)\\ & dt=\frac{dx}{x} & t\in R\end{array}\right]=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{rcl|rcl} u&=&\ln x & u'&=&\frac{1}{x}\\ v'&=&\frac{1}{x} & v&=&\ln x\end{array}\right]=\ln^2 x-\int\frac{\ln x}{x}\,dx\Rightarrow I=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{rl|l}\text{Subst.} & t=\operatorname{tg} x & dt=\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=(\operatorname{tg}^2 x+1)\,dx=(t^2+1)\,dx,\quad t\in R\\ & x=\operatorname{arctg} t & dx=\frac{dt}{t^2+1},\qquad x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi),\ k\in Z\end{array}\right]=\int\frac{t^3\,dt}{t^2+1}$$

$$=\int\frac{t^3+t-t\,dt}{t^2+1}=\int t\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+1}=\int t\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)'\,dt}{t^2+1}=\frac{t^2}{2}-\ln\left(t^2+1\right)+c$$

Metóda substitúcie

$$I=\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{\ln^2 x}{2}+c$$

$$=\left[\begin{array}{rl|l}\text{Subst.} & t=\ln x & x\in(0;\infty)\\ & dt=\frac{dx}{x} & t\in R\end{array}\right]=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{lcl|lcl}u&=&\ln x & u'&=&\frac{1}{x}\\ v'&=&\frac{1}{x} & v&=&\ln x\end{array}\right]=\ln^2 x-\int\frac{\ln x}{x}\,dx\Rightarrow I=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)+c$$

$$=\left[\begin{array}{rl|l}\text{Subst.} & t=\operatorname{tg} x & dt=\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=(\operatorname{tg}^2 x+1)\,dx=(t^2+1)\,dx,\quad t\in R\\ & x=\operatorname{arctg} t & dx=\frac{dt}{t^2+1},\qquad x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi),\ k\in Z\end{array}\right]=\int\frac{t^3\,dt}{t^2+1}$$

$$=\int\frac{t^3+t-t\,dt}{t^2+1}=\int t\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+1}=\int t\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)'\,dt}{t^2+1}=\frac{t^2}{2}-\ln\left(t^2+1\right)+c$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)+c,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in Z,\ c\in R.$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^{x} & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^{2} \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array}\right]$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x \in R & dx = \frac{dt}{t},\ e^{2x} = t^2 \\ x = \ln t & t \in (0; \infty) & (\ln t)' = \frac{1}{t} > 0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + t + 1}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x \in R & dx = \frac{dt}{t},\ e^{2x} = t^2 \\ x = \ln t & t \in (0;\infty) & (\ln t)' = \frac{1}{t} > 0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^{x} & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^{2} \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^{2}+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^{2}}<0 & \sqrt{t^{2}+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^{2}} & \sqrt{1+u+u^{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}}=\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^{2}}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l|l|l} \text{Subst.} & u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ & t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^{x} & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^{2} \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^{2}+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^{2}}<0 & \sqrt{t^{2}+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^{2}} & \sqrt{1+u+u^{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}}=\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{du}{u^{2}}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u}}$$

$$= \int \frac{-\,du}{\sqrt{1+u+u^{2}}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-\,du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\mathrm{e}^{x} & x\in R & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t},\ \mathrm{e}^{2x}=t^{2} \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^{2}+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^{2}}<0 & \sqrt{t^{2}+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^{2}} & \sqrt{1+u+u^{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}}=\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^{2}}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u}}$$

$$= \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^{2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^{2}+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^{2}=v^{2}+\frac{3}{4} \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}v & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^{x} & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array}\right]=\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right]=\int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$=\int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}}=-\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}}=\left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array}\right]$$

$$=-\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-\,du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^{x} & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^{2} \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array}\right]=\int \frac{dt}{t\sqrt{t^{2}+t+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^{2}}<0 & \sqrt{t^{2}+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^{2}} & \sqrt{1+u+u^{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}}=\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t} \end{array}\right]=\int \frac{-\frac{du}{u^{2}}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u}}$$

$$=\int \frac{-\,du}{\sqrt{1+u+u^{2}}}=-\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^{2}+1-\frac{1}{4}}}=\left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^{2}=v^{2}+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array}\right]$$

$$=-\int \frac{dv}{\sqrt{v^{2}+\frac{3}{4}}}=-\ln\left(v+\sqrt{v^{2}+\frac{3}{4}}\right)+c_{1}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1 = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array}\right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1 = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^{x} & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^{2} \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array}\right]=\int\frac{dt}{t\sqrt{t^{2}+t+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^{2}}<0 & \sqrt{t^{2}+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^{2}} & \sqrt{1+u+u^{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}}=\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t} \end{array}\right]=\int\frac{-\frac{du}{u^{2}}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u}}$$

$$=\int\frac{-du}{\sqrt{1+u+u^{2}}}=-\int\frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^{2}+1-\frac{1}{4}}}=\left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^{2}=v^{2}+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array}\right]$$

$$=-\int\frac{dv}{\sqrt{v^{2}+\frac{3}{4}}}=-\ln\left(v+\sqrt{v^{2}+\frac{3}{4}}\right)+c_{1}=-\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^{2}}\right)+c_{1}$$

$$=-\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t}\right)+c_{1}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$=\int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array}\right]$$

$$=-\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1 = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1$$

$$=-\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1 = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1 = -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1 = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1 = -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1$$

$$= \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^{x} & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^{2} \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^{2}+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^{2}}<0 & \sqrt{t^{2}+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^{2}} & \sqrt{1+u+u^{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}}=\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^{2}}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u}}$$

$$= \int \frac{-\,du}{\sqrt{1+u+u^{2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^{2}+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^{2}=v^{2}+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^{2}+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^{2}+\frac{3}{4}}\right)+c_{1} = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^{2}}\right)+c_{1}$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t}\right)+c_{1} = -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^{2}+t+1}}{2t}+c_{1}$$

$$= \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^{2}+t+1}}+c_{1} = \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^{2}+t+1}\right)+c_{1}$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = e^{x} & x \in R & \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t},\ e^{2x} = t^2 \\ x = \ln t & t \in (0;\infty) & (\ln t)' = \frac{1}{t} > 0 \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u = \frac{1}{t} & t \in (0;\infty) & [\frac{1}{u}]' = -\frac{1}{u^2} < 0 & \sqrt{t^2+t+1} = \sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1} = \frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t = \frac{1}{u} & u \in (0;\infty) & \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2} = \sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v = u + \frac{1}{2} & 1+u+u^2 = v^2 + \frac{3}{4} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}v & u \in (0;\infty),\ v \in (\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right) + c_1 = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right) + c_1$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right) + c_1 = -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t} + c_1$$

$$= \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}} + c_1 = \ln 2 + \ln t - \ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right) + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} c = c_1 + \ln 2 \\ c \in R,\ c_1 \in R \end{array} \right] = x - \ln\left(2+e^{x}+2\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}\right) + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^{x} & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^{2} \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^{2}+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^{2}}<0 & \sqrt{t^{2}+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^{2}}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^{2}} & \sqrt{1+u+u^{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}}=\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^{2}}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^{2}}}{u}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^{2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^{2}+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^{2}=v^{2}+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^{2}+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^{2}+\frac{3}{4}}\right)+c_{1} = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^{2}}\right)+c_{1}$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^{2}+t+1}}{t}\right)+c_{1} = -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^{2}+t+1}}{2t}+c_{1}$$

$$= \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^{2}+t+1}}+c_{1} = \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^{2}+t+1}\right)+c_{1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} c=c_{1}+\ln 2 \\ c\in R,\ c_{1}\in R \end{array} \right] = x-\ln\left(2+e^{x}+2\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-\,du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1 = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1 = -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1$$

$$= \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1 = \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} c=c_1+\ln 2 \\ c\in R,\ c_1\in R \end{array} \right] = x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Metóda substitúcie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} = x - \ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)+c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x\in R & dx=\frac{dt}{t},\ e^{2x}=t^2 \\ x=\ln t & t\in(0;\infty) & (\ln t)'=\frac{1}{t}>0 \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u=\frac{1}{t} & t\in(0;\infty) & [\frac{1}{u}]'=-\frac{1}{u^2}<0 & \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t=\frac{1}{u} & u\in(0;\infty) & dt=-\frac{du}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } v=u+\frac{1}{2} & 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv & u\in(0;\infty),\ v\in(\frac{1}{2};\infty) \end{array}\right]$$

$$= -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1 = -\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1 = -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1$$

$$= \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1 = \ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l} c=c_1+\ln 2 \\ c\in R,\ c_1\in R \end{array}\right] = x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ $\quad a \in R,\ n \in N$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n} \qquad a \in R,\ n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad t = x-a & x \in (-\infty; a) & x \in (a; \infty) \\ dt = dx & t \in (-\infty; 0) & t \in (0; \infty) \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ $\qquad a \in R,\ n \in N$

$$= \left[\begin{array}{r|c|c} \text{Subst.} \quad t = x-a & x \in (-\infty; a) & x \in (a; \infty) \\ dt = dx & t \in (-\infty; 0) & t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n} \qquad a \in R,\ n \in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & t = x-a & x \in (-\infty; a) & x \in (a; \infty) \\ & dt = dx & t \in (-\infty; 0) & t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^n} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t}$$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ $\qquad a \in R,\ n \in N$

$$= \left[\text{Subst.} \begin{array}{r} t = x-a \\ dt = dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in (-\infty; a) \\ t \in (-\infty; 0) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in (a; \infty) \\ t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^n} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ $\quad a \in R,\ n \in N$

$$= \left[\text{Subst. } \begin{matrix} t = x-a \\ dt = dx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \in (-\infty; a) \\ t \in (-\infty; 0) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \in (a; \infty) \\ t \in (0; \infty) \end{matrix} \right] = \int \frac{dt}{t^n} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x-a| + c,\ x \in R - \{a\},\ c \in R,\ n = 1.$$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ $\quad a \in R,\ n \in N$

$$= \left[\text{Subst.} \begin{array}{r} t = x-a \\ dt = dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in (-\infty; a) \\ t \in (-\infty; 0) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in (a; \infty) \\ t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^n} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x-a| + c,\ x \in R - \{a\},\ c \in R,\ n=1.$$

$$I_n = \int t^{-n}\, dt$$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ $\qquad a \in R,\ n \in N$

$$= \left[\text{Subst. } \begin{matrix} t = x-a \\ dt = dx \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x \in (-\infty; a) \\ t \in (-\infty; 0) \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x \in (a; \infty) \\ t \in (0; \infty) \end{matrix} \right] = \int \frac{dt}{t^n} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x-a| + c,\ x \in R - \{a\},\ c \in R,\ n=1.$$

$$I_n = \int t^{-n}\, dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

- Počítať integrály racionálnych funkcií (podiel dvoch polynómov) nie je zložité, ale väčšinou veľmi prácne.
- V mnohých prípadoch musíme integrovanú funkciu zjednodušiť na súčet polynómu a rýdzej racionálnej funkcie.
- Rýdzu racionálnu funkciu (stupeň čitateľa je menší ako menovateľa) rozložíme na parciálne zlomky, ktoré integrovať nie je problém.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{n-1} + c \text{ pre } n=2,3\ldots,\ I_1 = \ln|x-a| + c, \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = x-a & x\in(-\infty;a) & x\in(a;\infty) \\ dt = dx & t\in(-\infty;0) & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^n} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x-a| + c,\ x\in R-\{a\},\ c\in R,\ n=1.$$

$$I_n = \int t^{-n}\, dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + c = \frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + c,$$

$$x\in R-\{a\},\ c\in R,\ n=2,3,4,\ldots.$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x+2 & x\in R \\ dt=dx & t\in R \end{array} \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x+2 & x\in R-\{-2\} \\ dt=dx & t\in R-\{0\} \end{array} \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x+2 & x\in R-\{-1,\,-3\} \\ dt=dx & t\in R-\{\pm 1\} \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x+2 & x\in R \\ dt=dx & t\in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x+2 & x\in R-\{-2\} \\ dt=dx & t\in R-\{0\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x+2 & x\in R-\{-1,-3\} \\ dt=dx & t\in R-\{\pm 1\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$= \left[\text{Subst. } \begin{array}{r|l} t=x+2 & x\in R \\ dt=dx & t\in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \left[\text{Subst. } \begin{array}{r|l} t=x+2 & x\in R-\{-2\} \\ dt=dx & t\in R-\{0\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\, dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1}$$

$$= \left[\text{Subst. } \begin{array}{r|l} t=x+2 & x\in R-\{-1,-3\} \\ dt=dx & t\in R-\{\pm 1\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$= \left[\text{Subst. } \begin{array}{r|l} t=x+2 & x\in R \\ dt=dx & t\in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \left[\text{Subst. } \begin{array}{r|l} t=x+2 & x\in R-\{-2\} \\ dt=dx & t\in R-\{0\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{t} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1}$$

$$= \left[\text{Subst. } \begin{array}{r|l} t=x+2 & x\in R-\{-1,-3\} \\ dt=dx & t\in R-\{\pm 1\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right| + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2) + c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R \\ dt = dx & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}(x+2) + c, \ x \in R, \ c \in R.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2} = -\frac{1}{x+2} + c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-2\} \\ dt = dx & t \in R - \{0\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\, dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x+2} + c,$$

$$x \in R - \{-2\}, \ c \in R.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4-1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + c$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x+2 & x \in R - \{-1, -3\} \\ dt = dx & t \in R - \{\pm 1\} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2-1}{x+2+1} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + c, \ x \in R - \{-1, -3\}, \ c \in R.$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$

$\int \frac{dx}{x^2-4x+2}$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4+2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+2}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4-2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-(\sqrt{2})^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4+2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+(\sqrt{2})^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x-2 & x\in R \\ dt=dx & t\in R \end{array} \right]$$

$\int \frac{dx}{x^2-4x+2}$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4-2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-(\sqrt{2})^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x-2 & x\in R-\{2\pm\sqrt{2}\} \\ dt=dx & t\in R-\{\pm\sqrt{2}\} \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4+2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+(\sqrt{2})^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x-2 & x\in R \\ dt=dx & t\in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+2}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4-2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-(\sqrt{2})^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x-2 & x\in R-\{2\pm\sqrt{2}\} \\ dt=dx & t\in R-\{\pm\sqrt{2}\} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4+2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+(\sqrt{2})^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x-2 & x\in R \\ dt=dx & t\in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+2}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4-2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-(\sqrt{2})^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x-2 & x\in R-\{2\pm\sqrt{2}\} \\ dt=dx & t\in R-\{\pm\sqrt{2}\} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6} = \operatorname{arctg}(x+2) + c$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4+2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+(\sqrt{2})^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x-2 & x\in R \\ dt=dx & t\in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{2}} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}} \right| + c$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-4x+4-2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-(\sqrt{2})^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=x-2 & x\in R-\{2\pm\sqrt{2}\} \\ dt=dx & t\in R-\{\pm\sqrt{2}\} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}} \right| + c,$$

$$x\in R-\left\{2\pm\sqrt{2}\right\},\ c\in R.$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $a>0,\ n\in N$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $a > 0,\ n \in N$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad a>0,\ n\in N$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $\quad a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad a>0,\ n\in N$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $\quad a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(2+\frac{1}{1-n}\right) I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $\qquad a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(2+\frac{1}{1-n}\right) I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{3-2n}{2a^2(1-n)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \qquad a>0,\ n\in N$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(2+\frac{1}{1-n}\right) I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{3-2n}{2a^2(1-n)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ x\in R,\ c\in R,\ n=2,3,4,\ldots.$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \quad I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \quad a>0,\ n\in N$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' = 1 & \\ v' & = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v = \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{1-n} & = \frac{1}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\Big(2+\frac{1}{1-n}\Big) I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{3-2n}{2a^2(1-n)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ x\in R,\ c\in R,\ n=2,3,4,\ldots.$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,\ x\in R,\ c\in R,\ n=1.$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $a > 0$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\quad a > 0$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\qquad a > 0$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\quad a > 0$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\qquad a>0$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $a>0$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \frac{(x^2+a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2+a^2} = -(x^2+a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\qquad a>0$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \frac{(x^2+a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2+a^2} = -(x^2+a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $a>0$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v & = \frac{(x^2+a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2+a^2} = -(x^2+a^2)^{-1} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\qquad a>0$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \frac{(x^2+a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2+a^2} = -(x^2+a^2)^{-1} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\qquad a > 0$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{ll|l} u & = x & u' = 1 \\ v' & = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = \frac{(x^2+a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2+a^2} = -(x^2+a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\,\frac{1}{a}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}\qquad a>0$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^2}=\left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v=\frac{(x^2+a^2)^{-2+1}}{-2+1}=-\frac{1}{x^2+a^2}=-(x^2+a^2)^{-1}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}-\frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{dx}{x^2+a^2}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

$$=\frac{1}{2a^2}\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}=\frac{1}{2a^3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)},\ x\in R,\ c\in R.$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}$ $a > 0,\ n \in N$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}$ $\quad a > 0,\ n \in N$

$$= \frac{1}{-a^2} \int \frac{-a^2\, dx}{(x^2 - a^2)^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}$ $a > 0,\ n \in N$

$$= \frac{1}{-a^2} \int \frac{-a^2\, dx}{(x^2 - a^2)^n} = \frac{1}{-a^2} \int \frac{(x^2 - a^2 - x^2)\, dx}{(x^2 - a^2)^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{-a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{-a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $\quad a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{-a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{-a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $\quad a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{-a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{-a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & v = \frac{(x^2-a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $\quad a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{-a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{-a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & v = \frac{(x^2-a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} \qquad a>0,\ n\in N$$

$$= \frac{1}{-a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{-a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & v = \frac{(x^2-a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} \right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $\qquad a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{-a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{-a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & v = \frac{(x^2-a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\left(2+\frac{1}{1-n}\right) I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $\qquad a>0,\ n\in N$

$$= \frac{1}{-a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{-a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & v = \frac{(x^2-a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\left(2+\frac{1}{1-n}\right) I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} = -\frac{3-2n}{2a^2(1-n)} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{3-2n}{2a^2(n-1)} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}, \qquad a>0,\ n\in N$$

$$= \frac{1}{-a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{-a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{-a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & v = \frac{(x^2-a^2)^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(1-n)} I_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\left(2+\frac{1}{1-n}\right) I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} = -\frac{3-2n}{2a^2(1-n)} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{3-2n}{2a^2(n-1)} I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}, \quad x\in R-\{\pm a\},\ c\in R,\ n=2,3,4,\ldots.$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}=\frac{3-2n}{2a^2(n-1)}I_{n-1}-\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},\ I_1=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c,\ a>0,\ n\in N$$

$$=\frac{1}{-a^2}\int\frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}=\frac{1}{-a^2}\int\frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n}=\frac{1}{-a^2}\int\frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^n}-\frac{1}{-a^2}\int\frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^n}=\left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\frac{2x}{(x^2-a^2)^n} & v=\frac{(x^2-a^2)^{1-n}}{1-n}=\frac{1}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}}\end{array}\right]$$

$$=-\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}}-\frac{1}{1-n}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(1-n)(x^2-a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(1-n)}I_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\left(2+\frac{1}{1-n}\right)I_{n-1}-\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}=-\frac{3-2n}{2a^2(1-n)}I_{n-1}-\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$=\frac{3-2n}{2a^2(n-1)}I_{n-1}-\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}},\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R,\ n=2,3,4,\ldots.$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c,\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R,\ n=1.$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^2}$ $a > 0$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $\qquad a > 0$

$$= -\frac{1}{a^2} \int \frac{-a^2\, dx}{(x^2-a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $\quad a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \frac{(x^2-a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2-a^2} = -(x^2-a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $\qquad a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \frac{(x^2-a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2-a^2} = -(x^2-a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $\qquad a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \frac{(x^2-a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2-a^2} = -(x^2-a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $\qquad a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \frac{(x^2-a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2-a^2} = -(x^2-a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $\qquad a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \frac{(x^2-a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2-a^2} = -(x^2-a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}$$

$$= \left[\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\,\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ $\qquad a>0$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = \frac{(x^2-a^2)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2-a^2} = -(x^2-a^2)^{-1} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}$$

$$= \left[\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\,\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\,\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2a^2(x^2-a^2)} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2}=-\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}+c \qquad a>0$$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\frac{-a^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}=-\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2-x^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2}=-\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2-a^2)\,dx}{(x^2-a^2)^2}-\frac{1}{a^2}\int\frac{-x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2-a^2}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{x\cdot 2x\,dx}{(x^2-a^2)^2}=\left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v=\frac{(x^2-a^2)^{-2+1}}{-2+1}=-\frac{1}{x^2-a^2}=-(x^2-a^2)^{-1}\end{array}\right]$$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2-a^2}+\frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x}{x^2-a^2}+\int\frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2-a^2}-\frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2-a^2}=-\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2-a^2}-\frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}$$

$$=\left[\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}+c=-\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{x}{2a^2(x^2-a^2)}+c,$$

$$x\in R-\{\pm a\},\ c\in R.$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ $\quad a > 0$

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$ $\quad a > 0$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ $a > 0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$ $a > 0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2-a^2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ $a > 0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v & = -\frac{1}{x^2+a^2} \end{array}\right]$$

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$ $a > 0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v & = -\frac{1}{x^2-a^2} \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ $a > 0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = -\frac{1}{x^2+a^2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right]$$

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$ $a > 0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = -\frac{1}{x^2-a^2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ $a > 0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v & = -\frac{1}{x^2+a^2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right]$$

$$= -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2}$ $a > 0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{ll|ll} u & = x & u' & = 1 \\ v' & = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v & = -\frac{1}{x^2-a^2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

$$= -\frac{x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c \qquad a>0$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = -\frac{1}{x^2+a^2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right]$$

$$= -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c = \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2(x^2-a^2)} + c \qquad a>0$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2-a^2)^2} & v = -\frac{1}{x^2-a^2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2-a^2}\right]$$

$$= -\frac{x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{x}{2(x^2-a^2)} + c$$

$$= \frac{1}{4a}\ln|x-a| - \frac{1}{4a}\ln|x+a| - \frac{x}{2(x^2-a^2)} + c,\ x\in R-\{\pm a\},\ c\in R.$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\, dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = x^2+2x+3 & x \in R \\ & dt = (2x+2)\,dx & t \in (0;\infty) \end{array}\right] \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & z = x+1 & x \in R \\ & dz = dx & z \in R \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = x^2+2x+3 & x \in R \\ & dt = (2x+2)\,dx & t \in (0;\infty) \end{array} \right] \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & z = x+1 & x \in R \\ & dz = dx & z \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\, dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\, dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\, dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ \quad dt = (2x+2)\, dx & t \in (0; \infty) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ \quad dz = dx & z \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \text{Základné II} & \multirow{2}{*}{$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$} \\ a = \sqrt{2} & \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\text{Subst.} \begin{array}{r} t = x^2+2x+3 \\ dt = (2x+2)\,dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in R \\ t \in (0;\infty) \end{array} \right] \left[\text{Subst.} \begin{array}{r} z = x+1 \\ dz = dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \in R \\ z \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Základné II} \\ a = \sqrt{2} \end{array} \middle| \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\,\text{arctg}\,\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} \right] = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\,\text{arctg}\,\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\, dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\, dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\, dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = x^2+2x+3 & x \in R \\ dt = (2x+2)\, dx & t \in (0; \infty) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = x+1 & x \in R \\ dz = dx & z \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \text{Základné II} & \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} \\ a = \sqrt{2} & \end{array} \right] = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = x^2+2x+3 & x \in R \\ & dt = (2x+2)\,dx & t \in (0;\infty) \end{array} \right] \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & z = x+1 & x \in R \\ & dz = dx & z \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|l} \text{Základné II} & \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} \\ a = \sqrt{2} & \end{array} \right] = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

$$= \frac{-1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & t = x^2+2x+3 & x \in R \\ & dt = (2x+2)\,dx & t \in (0;\infty) \end{array} \right] \left[\begin{array}{rl|l} \text{Subst.} & z = x+1 & x \in R \\ & dz = dx & z \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \text{Základné II} & \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} \\ a = \sqrt{2} & \end{array} \right] = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

$$= \frac{-1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

$$= \frac{-4}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } \; t = x^2+2x+3 & x \in R \\ dt = (2x+2)\,dx & t \in (0;\infty) \end{array} \right] \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } \; z = x+1 & x \in R \\ dz = dx & z \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|l} \text{Základné II} & \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} \\ a = \sqrt{2} & \end{array} \right] = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

$$= \frac{-1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

$$= \frac{-4}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

$$= \frac{-4+x+1}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + c$$

$$= \int \frac{(2x+2+1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|l} \text{Subst.} & t = x^2+2x+3 & x \in R \\ & dt = (2x+2)\,dx & t \in (0;\infty) \end{array} \right] \left[\begin{array}{ll|l} \text{Subst.} & z = x+1 & x \in R \\ & dz = dx & z \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Základné II} & \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} \\ a = \sqrt{2} & \end{array} \right] = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{4(z^2+2)} + c$$

$$= \frac{-1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

$$= \frac{-4}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c$$

$$= \frac{-4+x+1}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

$$= \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c, \quad c \in R.$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

$$= \int \left[x^2+x+1 + \frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\right] dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

$$= \int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\right] dx = \int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right] dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

$$=\int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\right]dx=\int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}\;\middle|\; \begin{aligned} x^3-x^2+2x &= \alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2 \\ &= (\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x-\alpha+\beta+\delta \end{aligned} \;\middle|\; \begin{aligned}\alpha&=\tfrac{1}{2}\\ \beta&=1\end{aligned} \;\middle|\; \begin{aligned}\gamma&=\tfrac{1}{2}\\ \delta&=-\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

$$=\int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\right]dx=\int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}\;\middle|\;\begin{aligned}x^3-x^2+2x&=\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2\\&=(\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x-\alpha+\beta+\delta\end{aligned}\;\middle|\;\begin{aligned}\alpha&=\tfrac{1}{2}\\ \beta&=1\end{aligned}\;\middle|\;\begin{aligned}\gamma&=\tfrac{1}{2}\\ \delta&=-\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right]$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

$$=\int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\right]dx=\int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}\;\middle|\; \begin{array}{l} x^3-x^2+2x=\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2 \\ \quad=(\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x-\alpha+\beta+\delta \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=1\end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l}\gamma=\frac{1}{2}\\ \delta=-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right]dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

$$=\int\Big[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\Big]dx=\int\Big[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\Big]dx$$

$$=\Big[\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}\ \Big|\ \begin{array}{l} x^3-x^2+2x=\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2 \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x-\alpha+\beta+\delta\end{array}\ \Big|\ \begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=1\end{array}\ \Big|\ \begin{array}{l}\gamma=\frac{1}{2}\\ \delta=-\frac{1}{2}\end{array}\Big]$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\Big[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\Big]\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int\Big[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\Big]\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

$$=\int\Big[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\Big]dx=\int\Big[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\Big]dx$$

$$=\Big[\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}\ \Big|\ \begin{array}{l}x^3-x^2+2x=\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2\\ \quad=(\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x-\alpha+\beta+\delta\end{array}\ \Big|\ \begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=1\end{array}\ \Big|\ \begin{array}{l}\gamma=\frac{1}{2}\\ \delta=-\frac{1}{2}\end{array}\Big]$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\Big[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\Big]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int\Big[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\Big]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

$$=\int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\right]dx=\int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}\,\middle|\,\begin{aligned}x^3-x^2+2x&=\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2\\&=(\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x-\alpha+\beta+\delta\end{aligned}\,\middle|\,\begin{aligned}\alpha&=\tfrac{1}{2}\\ \beta&=1\end{aligned}\,\middle|\,\begin{aligned}\gamma&=\tfrac{1}{2}\\ \delta&=-\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right]$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln|x-1|^2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

$$= \int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\right]dx = \int \left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]dx$$

$$= \left[\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} x^3-x^2+2x = \alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2 \\ \quad = (\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x-\alpha+\beta+\delta \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=1\end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l}\gamma=\frac{1}{2}\\ \delta=-\frac{1}{2}\end{array} \right]$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right]dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln|x-1|^2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c,\ x\in R-\{1\},\ c\in R.$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2} \right] dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & & & & \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & & & & \\ & & & & \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\, dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\, dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\, dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} -2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 \end{array} \middle| \quad \middle| \quad \middle| \quad \middle| \quad \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} -\,2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 \end{array} \quad\Bigg|\quad \Bigg|\quad \Bigg|\quad \Bigg| \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & & & & \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & & & & \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} -2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 \end{array} \middle| \quad \middle| \quad \middle| \quad \middle| \quad \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} -2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & & & & \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & & & & \\ \quad = \alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & & & & \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\, dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\, dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\, dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & & & & \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & & & & \\ \quad = \alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & & & & \\ \quad = (\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & & & \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \begin{aligned} &-2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ &= \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 \\ &= \alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 \\ &= (\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta \end{aligned} & -2=\alpha+\gamma & & \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -\,2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & -\,2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & & \\ \quad =\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & & & & \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & & & & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & & & \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} -2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & & & \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & & & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & & \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -\,2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & -\,2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & & & & \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & & & & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & & & \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -\,2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & -\,2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & & & & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & & & \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -\,2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & -\,2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad = \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad = \alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & & & \alpha=-2 & \\ \quad = (\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & & & \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3+0x^2+0x+1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x)+\beta(x^2+2x+1)+\gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta & & & & \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\, dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\, dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\, dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3+0x^2+0x+1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x)+\beta(x^2+2x+1)+\gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta & & & & \end{array} \right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -\,2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & -\,2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & \delta=3 & & \end{array}\right]$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3+0x^2+0x+1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x)+\beta(x^2+2x+1)+\gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta & & \delta=3 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3+0x^2+0x+1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x)+\beta(x^2+2x+1)+\gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta & & \delta=3 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx = \int \left[-2\frac{1}{x} + x^{-2} + 3(x+1)^{-2}\right] dx$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -\,2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & -\,2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & \delta=3 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx = \int \left[-\,2\frac{1}{x} + x^{-2} + 3(x+1)^{-2}\right] dx$$

$$= -2\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3+0x^2+0x+1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x)+\beta(x^2+2x+1)+\gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta & & \delta=3 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx = \int \left[-2\frac{1}{x} + x^{-2} + 3(x+1)^{-2}\right] dx$$

$$= -2\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -2x^3+0x^2+0x+1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x)+\beta(x^2+2x+1)+\gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta & & \delta=3 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx = \int \left[-2\frac{1}{x} + x^{-2} + 3(x+1)^{-2}\right] dx$$

$$= -2\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= -\ln x^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1}\right] + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -\,2x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x) + \beta(x^2+2x+1) + \gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+2\beta)x + \beta & & \delta=3 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx = \int \left[-2\frac{1}{x} + x^{-2} + 3(x+1)^{-2}\right] dx$$

$$= -2\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= -\ln x^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1}\right] + c = -\ln x^2 - \frac{x+1+3x}{x(x+1)} + c$$

Integrály racionálnych funkcií

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c = \frac{4x+1}{x^2+x} - \ln x^2 + c$$

$$= \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l|l} -\,2x^3+0x^2+0x+1 & -2=\alpha+\gamma & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & 0=\alpha+2\beta & 1=\beta \\ \quad =\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2 & \gamma=-\alpha-2 & 0=2\alpha+1+\gamma+\delta & \alpha=-2\beta & \beta=1 \\ \quad =\alpha(x^3+2x^2+x)+\beta(x^2+2x+1)+\gamma(x^3+x^2)+\delta x^2 & \gamma=0 & 0=-4+1+0+\delta & \alpha=-2 & \\ \quad =(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta & & \delta=3 & & \end{array}\right]$$

$$= \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right] dx = \int \left[-2\frac{1}{x} + x^{-2} + 3(x+1)^{-2}\right] dx$$

$$= -2\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c = -2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c$$

$$= -\ln x^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{x+1}\right] + c = -\ln x^2 - \frac{x+1+3x}{x(x+1)} + c$$

$$= \frac{4x+1}{x^2+x} - \ln x^2 + c,\ x \in R - \{0, -1\},\ c \in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) dx$, $a,b,d,e \in R$, $ae-bd \neq 0$, $n \in N$.

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) dx,$ $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N.$

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$,

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) dx$, $a,b,d,e \in R$, $ae-bd \neq 0$, $n \in N$.

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$,

---

$t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$, $a,b,d,e \in R$, $ae-bd \neq 0$, $n \in N$.

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$,

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \;\Rightarrow\; t^n(dx+e) = ax+b \;\Rightarrow\; dxt^n + et^n = ax+b$$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$, $a,b,d,e \in R$, $ae-bd \neq 0$, $n \in N$.

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$,

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \Rightarrow t^n(dx+e) = ax+b \Rightarrow dxt^n + et^n = ax+b$$

$$\Rightarrow dxt^n - ax = b - et^n \Rightarrow (dt^n - a)x = b - et^n$$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) dx$, $a,b,d,e \in R$, $ae-bd \neq 0$, $n \in N$.

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$,

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \Rightarrow t^n(dx+e) = ax+b \Rightarrow dxt^n + et^n = ax+b$$

$$\Rightarrow dxt^n - ax = b - et^n \Rightarrow (dt^n - a)x = b - et^n \Rightarrow x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) dx$, $a,b,d,e \in R$, $ae-bd \neq 0$, $n \in N$.

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$,

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \Rightarrow t^n(dx+e) = ax+b \Rightarrow dxt^n + et^n = ax+b$$
$$\Rightarrow dxt^n - ax = b - et^n \Rightarrow (dt^n - a)x = b - et^n \Rightarrow x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}.$$

$$dx = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' dt$$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x$, $a, b, d, e \in R$, $ae - bd \neq 0$, $n \in N$.

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$,

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \Rightarrow t^n(dx+e) = ax+b \Rightarrow dxt^n + et^n = ax+b$$

$$\Rightarrow dxt^n - ax = b - et^n \Rightarrow (dt^n - a)x = b - et^n \Rightarrow x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}.$$

$$\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{(0-net^{n-1})(dt^n-a)-(b-et^n)(ndt^{n-1}-0)}{(dt^n-a)^2} \mathrm{d}t$$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) dx$, $a,b,d,e \in R$, $ae-bd \neq 0$, $n \in N$.

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$,

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \Rightarrow t^n(dx+e) = ax+b \Rightarrow dxt^n + et^n = ax+b$$

$$\Rightarrow dxt^n - ax = b - et^n \Rightarrow (dt^n - a)x = b - et^n \Rightarrow x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}.$$

$$dx = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' dt = \frac{(0-net^{n-1})(dt^n-a)-(b-et^n)(ndt^{n-1}-0)}{(dt^n-a)^2}\, dt$$

$$= \frac{-ndet^{2n-1}+naet^{n-1}-nbdt^{n-1}+ndet^{2n-1}}{(dt^n-a)^2}\, dt$$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) \mathrm{d}x,$ $a,b,d,e \in R,\ ae-bd \neq 0,\ n \in N.$

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, $x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.$

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \Rightarrow t^n(dx+e) = ax+b \Rightarrow dxt^n + et^n = ax+b$$
$$\Rightarrow dxt^n - ax = b - et^n \Rightarrow (dt^n - a)x = b - et^n \Rightarrow x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}.$$

$$\mathrm{d}x = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' \mathrm{d}t = \frac{(0-net^{n-1})(dt^n-a)-(b-et^n)(ndt^{n-1}-0)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{-ndet^{2n-1}+naet^{n-1}-nbdt^{n-1}+ndet^{2n-1}}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

- Počítať integrály iracionálnych funkcií je väčšinou zložité.
- Mnohé sa dajú tzv. racionalizovať,
  t. j. vhodne substituovať na integrály racionálnych funkcií.

Integrály typu $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) dx$, $a,b,d,e \in R$, $ae-bd \neq 0$, $n \in N$.

Substitúcia $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j. $t^n = \frac{ax+b}{dx+e}$, $\quad x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}$, $\quad dx = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\, dt$.

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \Rightarrow t^n(dx+e) = ax+b \Rightarrow dxt^n + et^n = ax+b$$

$$\Rightarrow dxt^n - ax = b - et^n \Rightarrow (dt^n - a)x = b - et^n \Rightarrow x = \frac{b-et^n}{dt^n-a}.$$

$$dx = \left[\frac{b-et^n}{dt^n-a}\right]' dt = \frac{(0-net^{n-1})(dt^n-a)-(b-et^n)(ndt^{n-1}-0)}{(dt^n-a)^2}\, dt$$

$$= \frac{-ndet^{2n-1}+naet^{n-1}-nbdt^{n-1}+ndet^{2n-1}}{(dt^n-a)^2}\, dt = \frac{nt^{n-1}(ae-bd)}{(dt^n-a)^2}\, dt.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\, dx$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \left[x-x^2 = x(1-x) > 0 \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[x-x^2=x(1-x)>0 \left\{ \begin{matrix} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1,\ \text{t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1,\ \text{t. j. } x\in\emptyset \end{matrix} \right\} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1) \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \left[x-x^2 = x(1-x) > 0 \left\{ \begin{array}{l} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1,\ \text{t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1,\ \text{t. j. } x\in\emptyset \end{array} \right\} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \left[x-x^2 = x(1-x) > 0 \;\left\{ \begin{array}{l} x>0,\ 1-x>0 \;\Leftrightarrow\; 0<x,\ x<1,\ \text{t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \;\Leftrightarrow\; 0>x,\ x>1,\ \text{t. j. } x\in\emptyset \end{array} \right\}\; x\in(0;1)\cup\emptyset \;\Rightarrow\; x\in(0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\,\frac{1-x}{x}}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(1-\frac{1}{t})\,\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \left[x-x^2 = x(1-x) > 0 \left\{ \begin{array}{l} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1, \text{ t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1, \text{ t. j. } x\in\emptyset \end{array} \right\} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(1-\frac{1}{t})\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{t-1}{t}\,dt}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[x-x^2 = x(1-x) > 0 \begin{cases} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1,\ \text{t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1,\ \text{t. j. } x\in\emptyset \end{cases} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t^2=\frac{1-x}{x} & t^2x=1-x \\ x=\frac{1}{1+t^2} & \mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} & x\in(0;1) & t\in(1;\infty) \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(1-\frac{1}{t})\frac{-\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}} = \int \frac{(t-1)\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2}{t}\sqrt{t-1}}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \left[x-x^2 = x(1-x) > 0 \ \left\{ \begin{array}{l} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow \ 0<x,\ x<1,\ \text{t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow \ 0>x,\ x>1,\ \text{t. j. } x\in\emptyset \end{array} \right\} \ x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow \ x\in(0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\,\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t^2=\frac{1-x}{x} & t^2x=1-x \\ x=\frac{1}{1+t^2} & dx=\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} & x\in(0;1) & t\in(1;\infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{t^2\,\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}\,t}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(1-\frac{1}{t})\,\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{t-1}{t}\,dt}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}} = \int \frac{(t-1)\,dt}{\frac{t^2}{t}\sqrt{t-1}} = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,dt}{t}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \left[x-x^2=x(1-x)>0 \left\{ \begin{array}{l} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1, \text{ t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1, \text{ t. j. } x\in\emptyset \end{array} \right\} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t^2=\frac{1-x}{x} & t^2x=1-x \\ x=\frac{1}{1+t^2} & dx=\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} & x\in(0;1) & t\in(1;\infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{t^2\,\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}\,t} = \int \frac{-2t^2\,dt}{1+t^2}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(1-\frac{1}{t})\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{t-1}{t}\,dt}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}} = \int \frac{(t-1)\,dt}{\frac{t^2}{t}\sqrt{t-1}} = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,dt}{t}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=\sqrt{t-1}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t>1 \\ t=1+u^2 & dt=2u\,du & u>0 \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$=\left[x-x^2=x(1-x)>0 \begin{cases} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1,\ \text{t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1,\ \text{t. j. } x\in\emptyset \end{cases} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1)\right]$$

$$=\int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\,\frac{1-x}{x}}}=\int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t^2=\frac{1-x}{x} & t^2x=1-x \\ x=\frac{1}{1+t^2} & dx=\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} & x\in(0;1) & t\in(1;\infty) \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{t^2\,\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}\,t}=\int \frac{-2t^2\,dt}{1+t^2}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array}\right]=\int \frac{(1-\frac{1}{t})\,\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}=\int \frac{-\frac{t-1}{t}\,dt}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}}=\int \frac{(t-1)\,dt}{\frac{t^2}{t}\sqrt{t-1}}=-\int \frac{\sqrt{t-1}\,dt}{t}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=\sqrt{t-1}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t>1 \\ t=1+u^2 & dt=2u\,du & u>0 \end{array}\right]=-\int \frac{u\cdot 2u\,du}{1+u^2}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$= \left[x-x^2=x(1-x)>0 \left\{ \begin{matrix} x>0,\ 1-x>0 & \Leftrightarrow & 0<x,\ x<1, \text{ t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 & \Leftrightarrow & 0>x,\ x>1, \text{ t. j. } x\in\emptyset \end{matrix} \right\} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x=\frac{1}{1+t^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} \\ dx=\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t^2=\frac{1-x}{x} \\ x\in(0;1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t^2x=1-x \\ t\in(1;\infty) \end{matrix} \right]$$

$$= \int \frac{t^2\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}\,t} = \int \frac{-2t^2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{(1-t^2-1)\,dt}{1+t^2}$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x=\frac{1}{t} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t=\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x\in(0;1) \\ t\in(1;\infty) \end{matrix} \right] = \int \frac{(1-\frac{1}{t})\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{t-1}{t}\,dt}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}} = \int \frac{(t-1)\,dt}{\frac{t^2}{t}\sqrt{t-1}} = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,dt}{t}$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ t=1+u^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u=\sqrt{t-1}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} \\ dt=2u\,du \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t>1 \\ u>0 \end{matrix} \right] = -\int \frac{u\cdot 2u\,du}{1+u^2} = 2\int \frac{(1-u^2-1)\,du}{1+u^2}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$=\left[x-x^2=x(1-x)>0 \left\{\begin{array}{l} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1, \text{ t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1, \text{ t. j. } x\in\emptyset \end{array}\right\} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1)\right]$$

$$=\int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\,\frac{1-x}{x}}}=\int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t^2=\frac{1-x}{x} & t^2x=1-x \\ x=\frac{1}{1+t^2} & dx=\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} & x\in(0;1) & t\in(1;\infty) \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{t^2\,\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}\,t}=\int \frac{-2t^2\,dt}{1+t^2}=2\int \frac{(1-t^2-1)\,dt}{1+t^2}=2\int\Big(\frac{1}{1+t^2}-1\Big)\,dt$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array}\right]=\int \frac{(1-\frac{1}{t})\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}=\int \frac{-\frac{t-1}{t}\,dt}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}}=\int \frac{(t-1)\,dt}{\frac{t^2}{t}\sqrt{t-1}}=-\int \frac{\sqrt{t-1}\,dt}{t}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=\sqrt{t-1}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t>1 \\ t=1+u^2 & dt=2u\,du & u>0 \end{array}\right]=-\int \frac{u\cdot 2u\,du}{1+u^2}=2\int \frac{(1-u^2-1)\,du}{1+u^2}=2\int\Big(\frac{1}{1+u^2}-1\Big)du$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$=\left[x-x^2=x(1-x)>0 \left\{\begin{array}{l} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1,\ \text{t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1,\ \text{t. j. } x\in\emptyset \end{array}\right\} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1)\right]$$

$$=\int\frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\,\frac{1-x}{x}}}=\int\frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t^2=\frac{1-x}{x} & t^2x=1-x \\ x=\frac{1}{1+t^2} & dx=\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} & x\in(0;1) & t\in(1;\infty) \end{array}\right]$$

$$=\int\frac{t^2\,\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}\,t}=\int\frac{-2t^2\,dt}{1+t^2}=2\int\frac{(1-t^2-1)\,dt}{1+t^2}=2\int\Big(\frac{1}{1+t^2}-1\Big)\,dt$$

$$=2(\operatorname{arctg} t-t)+c$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array}\right]=\int\frac{\big(1-\frac{1}{t}\big)\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}=\int\frac{-\frac{t-1}{t}\,dt}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}}=\int\frac{(t-1)\,dt}{\frac{t^2}{t}\sqrt{t-1}}=-\int\frac{\sqrt{t-1}\,dt}{t}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=\sqrt{t-1}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t>1 \\ t=1+u^2 & dt=2u\,du & u>0 \end{array}\right]=-\int\frac{u\cdot 2u\,du}{1+u^2}=2\int\frac{(1-u^2-1)\,du}{1+u^2}=2\int\Big(\frac{1}{1+u^2}-1\Big)du$$

$$=2(\operatorname{arctg} u-u)+c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c$$

$$= \left[x-x^2 = x(1-x) > 0 \left\{ \begin{array}{l} x>0,\ 1-x>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x,\ x<1,\ \text{t. j. } x\in(0;1) \\ x<0,\ 1-x<0 \ \Leftrightarrow\ 0>x,\ x>1,\ \text{t. j. } x\in\emptyset \end{array} \right\} x\in(0;1)\cup\emptyset \ \Rightarrow\ x\in(0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}} = \int \frac{\frac{1-x}{x}\,dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t^2=\frac{1-x}{x} & t^2x=1-x \\ x=\frac{1}{1+t^2} & dx=\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} & x\in(0;1) & t\in(1;\infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{t^2\,\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}\,t} = \int \frac{-2t^2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{(1-t^2-1)\,dt}{1+t^2} = 2\int \left(\frac{1}{1+t^2} - 1\right) dt$$

$$= 2(\mathrm{arctg}\, t - t) + c = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c,\ x\in(0;1),\ c\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\frac{1}{x} & x\in(0;1) \\ x=\frac{1}{t} & dx=-\frac{dt}{t^2} & t\in(1;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(1-\frac{1}{t})\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{t-1}{t}\,dt}{t^2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}} = \int \frac{(t-1)\,dt}{\frac{t^2}{t}\sqrt{t-1}} = -\int \frac{\sqrt{t-1}\,dt}{t}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=\sqrt{t-1}=\sqrt{\frac{1}{x}-1} & t>1 \\ t=1+u^2 & dt=2u\,du & u>0 \end{array} \right] = -\int \frac{u\cdot 2u\,du}{1+u^2} = 2\int \frac{(1-u^2-1)\,du}{1+u^2} = 2\int \left(\frac{1}{1+u^2} - 1\right) du$$

$$= 2(\mathrm{arctg}\, u - u) + c = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}-1} - 2\sqrt{\frac{1}{x}-1} + c,\ x\in(0;1),\ c\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^3 = t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^2 = t^2 & t\in(0;\infty) \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^3 = t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^2 = t^2 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^3 = t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^2 = t^2 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}$$

$$=6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,dt$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=t+1=\sqrt[6]{x+1}+1 & t\in(0;\infty) \\ t=u-1 & dt=du & u\in(1;\infty) \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3\,dt}{t+1}$$

$$=6\int\frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=t+1=\sqrt[6]{x+1}+1 & t\in(0;\infty) \\ t=u-1 & dt=du & u\in(1;\infty) \end{array}\right]=6\int\frac{(u-1)^3\,du}{u}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}$$

$$= 6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=t+1=\sqrt[6]{x+1}+1 & t\in(0;\infty) \\ t=u-1 & dt=du & u\in(1;\infty) \end{array} \right] = 6\int \frac{(u-1)^3\,du}{u} = 6\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}$$

$$= 6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=t+1=\sqrt[6]{x+1}+1 & t\in(0;\infty) \\ t=u-1 & dt=du & u\in(1;\infty) \end{array} \right] = 6\int \frac{(u-1)^3\,du}{u} = 6\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du$$

$$= 6\int \left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right)du$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3\,dt}{t+1}$$

$$=6\int\frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=t+1=\sqrt[6]{x+1}+1 & t\in(0;\infty) \\ t=u-1 & dt=du & u\in(1;\infty) \end{array}\right]=6\int\frac{(u-1)^3\,du}{u}=6\int\frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du$$

$$=6\int\left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right)du=6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3u^2}{2}+3u-\ln|u|\right)+c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right) + c$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty) \\ t^6=x+1 & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}$$

$$= 6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + c = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(t+1) + c$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right) + c,\ x\in(-1;\infty),\ c\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & u=t+1=\sqrt[6]{x+1}+1 & t\in(0;\infty) \\ t=u-1 & dt=du & u\in(1;\infty) \end{array}\right] = 6\int \frac{(u-1)^3\,du}{u} = 6\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du$$

$$= 6\int \left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right) du = 6\left(\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + 3u - \ln|u|\right) + c$$

$$= 2(\sqrt[6]{x+1}+1)^3 - 9(\sqrt[6]{x+1}+1)^2 + (\sqrt[6]{x+1}+1) - 6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right) + c,$$
$$x\in(-1;\infty),\ c\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\, \mathrm{d}x$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,\mathrm{d}t}{(t^3+t^4)t^6}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,\mathrm{d}t}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,\mathrm{d}t}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,\mathrm{d}t}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,\mathrm{d}t}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ \quad = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \end{array}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ \quad = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} \end{array}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ \quad = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ \quad = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array}\right]$$

$$= 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,\mathrm{d}t}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,\mathrm{d}t}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ \quad = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array}\right]$$

$$= 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t \;= 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right)\mathrm{d}t$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array} \right]$$

$$= 6\int\Big(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\Big)\,dt = 6\int\Big(t-1+\frac{1}{t}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\Big)\,dt$$

$$= 6\Big(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\Big)+c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array}\right]$$

$$= 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt = 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\right)+c$$

$$= 3t^2-6t+6\ln t+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ \quad = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array} \right]$$

$$= 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt = 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\right)+c$$

$$= 3t^2-6t+6\ln t+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

$$= 3t^2-6t+\ln t^6+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ \quad = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array} \right]$$

$$= 6\int \left(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt = 6\int \left(t-1+\frac{1}{t}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-3}}{-3}\right)+c$$

$$= 3t^2-6t+6\ln t+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c$$

$$= 3t^2-6t+\ln t^6+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c = \left[t=\sqrt[6]{x} \,\middle|\, t^2=\sqrt[3]{x} \,\middle|\, t^3=\sqrt{x} \,\middle|\, t^6=x \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,dx = 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \ln x + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{12}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{\sqrt{x}} + c$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3 & x\in(0;\infty) \\ t^6=x & 6t^5\,dt=dx & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{(t^6-1)\,dt}{t^4+t^5}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Rozklad na parciálne zlomky: } \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{t^4-1}{t^5+t^4} = t-1+\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} \\ \quad = t-1+\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^4} = t-1+\frac{t^3-t^2+t-1}{t^4} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array}\right]$$

$$= 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt = 6\int\left(t-1+\frac{1}{t}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t| - \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{-2}}{-2} + \frac{t^{-3}}{-3}\right) + c$$

$$= 3t^2 - 6t + 6\ln t + \frac{6}{t} - \frac{12}{t^2} + \frac{18}{t^3} + c$$

$$= 3t^2 - 6t + \ln t^6 + \frac{6}{t} - \frac{12}{t^2} + \frac{18}{t^3} + c = \left[t=\sqrt[6]{x} \mid t^2=\sqrt[3]{x} \mid t^3=\sqrt{x} \mid t^6=x\right]$$

$$= 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + \ln x + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{12}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{\sqrt{x}} + c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} \in R\colon\; x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\; x \in \langle 0;1\rangle \end{array} \right\} x \in \langle 0;1\rangle \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x} \in R\colon\ x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\ x \in \langle 0; 1\rangle \end{matrix} \Big\} x \in \langle 0; 1\rangle \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \left[x \neq 1\colon\ x \in \langle 0; 1) \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x} \in R\colon\ x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\ x \in \langle 0; 1\rangle \end{matrix} \right\} x \in \langle 0; 1\rangle \Bigg] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \Big[x \neq 1\colon\ x \in \langle 0; 1) \Big]$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\left. \begin{matrix} \sqrt{x} \in R\colon\ x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\ x \in \langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x \in \langle 0;1\rangle \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \left[x \neq 1\colon\ x \in \langle 0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x\in\langle 0;1\rangle \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \left[x\neq 1\colon\ x\in\langle 0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\} x\in\langle 0;1\rangle\right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \left[x\neq 1\colon\ x\in\langle 0;1)\right]$$

$$=\int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x\in\langle 0;1\rangle \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \left[x\neq 1\colon\ x\in\langle 0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & z=1-x & x\in\langle 0;1) \\ x=1-z & dx=-\,dz & z\in(0;1\rangle \end{array} \right] \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} & t^2(1-x)=x & x\in\langle 0;1) \\ dx=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2} & x=\frac{t^2}{t^2+1} & t\in\langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R:\ x\in\langle 0;\infty)\\ 1-\sqrt{x}\geq 0:\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\}x\in\langle 0;1\rangle\Big] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \Big[x\neq 1:\ x\in\langle 0;1)\Big]$$

$$=\int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.} & z=1-x & x\in\langle 0;1)\\ x=1-z & dx=-\,dz & z\in(0;1\rangle\end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\quad t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} & t^2(1-x)=x & x\in\langle 0;1)\\ dx=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2} & x=\frac{t^2}{t^2+1} & t\in\langle 0;\infty)\end{array}\right]$$

$$=\int \frac{-\,dz}{\sqrt{z}} - \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\}x\in\langle 0;1\rangle \Big] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \big[\, x\neq 1\colon\ x\in\langle 0;1)\,\big]$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & z=1-x & x\in\langle 0;1) \\ x=1-z & dx=-\,dz & z\in(0;1\rangle \end{array} \right] \left[\begin{array}{ll|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} & t^2(1-x)=x & x\in\langle 0;1) \\ & dx=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2} & x=\frac{t^2}{t^2+1} & t\in\langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{-\,dz}{\sqrt{z}} - \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u=t & u'=1 \\ v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} & v=-\frac{1}{t^2+1} \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x\in\langle 0;1) \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \left[x\neq 1\colon\ x\in\langle 0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x=1-z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} z=1-x \\ dx=-\,dz \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x\in\langle 0;1) \\ z\in(0;1\rangle \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \\ dx=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t^2(1-x)=x \\ x=\frac{t^2}{t^2+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x\in\langle 0;1) \\ t\in\langle 0;\infty) \end{matrix} \right]$$

$$= \int \frac{-\,dz}{\sqrt{z}} - \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{matrix} u=t \\ v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} u'=1 \\ v=-\frac{1}{t^2+1} \end{matrix} \right] = \int z^{-\frac{1}{2}}\,dz - \left[-\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x} \in R:\ x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0:\ x \in \langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x \in \langle 0;1\rangle \Bigg] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \big[\, x \neq 1:\ x \in \langle 0;1)\,\big]$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & z=1-x & x \in \langle 0;1) \\ x=1-z & dx=-\,dz & z \in (0;1\rangle \end{array} \right] \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} & t^2(1-x)=x & x \in \langle 0;1) \\ dx=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2} & x=\frac{t^2}{t^2+1} & t \in \langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{-\,dz}{\sqrt{z}} - \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u=t & u'=1 \\ v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} & v=-\frac{1}{t^2+1} \end{array} \right] = \int z^{-\frac{1}{2}}\,dz - \left[-\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right]$$

$$= -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R:\ x\in\langle 0;\infty)\\ 1-\sqrt{x}\geq 0:\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\}x\in\langle 0;1\rangle\Bigg] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \big[x\neq 1:\ x\in\langle 0;1)\big]$$

$$=\int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.} & z=1-x & x\in\langle 0;1)\\ x=1-z & dx=-\,dz & z\in(0;1\rangle\end{array}\right]\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\ \ t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} & t^2(1-x)=x & x\in\langle 0;1)\\ dx=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2} & x=\frac{t^2}{t^2+1} & t\in\langle 0;\infty)\end{array}\right]$$

$$=\int \frac{-\,dz}{\sqrt{z}} - \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u\ =t & u'=1\\ v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} & v\ =-\frac{1}{t^2+1}\end{array}\right] = \int z^{-\frac{1}{2}}\,dz - \left[-\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right]$$

$$=-\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c = \left[\frac{t}{t^2+1} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{x}{1-x}+1} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{x+1-x}{1-x}} = \frac{(1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{x-x^2}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty)\\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\}x\in\langle 0;1)\Bigg]=\int\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx=\big[x\neq 1\colon\ x\in\langle 0;1)\big]$$

$$=\int\frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx=\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}-\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}-\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{Subst.} & z=1-x & x\in\langle 0;1)\\ x=1-z & dx=-\,dz & z\in(0;1\rangle\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\text{Subst.}\ \ t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} & t^2(1-x)=x & x\in\langle 0;1)\\ dx=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2} & x=\frac{t^2}{t^2+1} & t\in\langle 0;\infty)\end{matrix}\right]$$

$$=\int\frac{-\,dz}{\sqrt{z}}-\int\frac{t\cdot 2t\,dt}{(t^2+1)^2}=\left[\begin{matrix}u=t & u'=1\\ v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} & v=-\frac{1}{t^2+1}\end{matrix}\right]=\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz-\left[-\frac{t}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right]$$

$$=-\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{t}{t^2+1}-\operatorname{arctg} t+c=\left[\frac{t}{t^2+1}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{x}{1-x}+1}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{x+1-x}{1-x}}=\frac{(1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=\sqrt{x-x^2}\right]$$

$$=-2\sqrt{z}+\frac{t}{t^2+1}-\operatorname{arctg} t+c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + c$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x\in\langle 0;1\rangle \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,dx = \left[x\neq 1\colon x\in\langle 0;1) \right]$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & z=1-x & x\in\langle 0;1) \\ x=1-z & dx=-\,dz & z\in(0;1\rangle \end{array} \right] \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} & t^2(1-x)=x & x\in\langle 0;1) \\ dx=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2} & x=\frac{t^2}{t^2+1} & t\in\langle 0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{-\,dz}{\sqrt{z}} - \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u=t & u'=1 \\ v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} & v=-\frac{1}{t^2+1} \end{array} \right] = \int z^{-\frac{1}{2}}\,dz - \left[-\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right]$$

$$= -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c = \left[\frac{t}{t^2+1} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{x}{1-x}+1} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{x+1-x}{1-x}} = \frac{(1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{x-x^2} \right]$$

$$= -2\sqrt{z} + \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c = -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + c,$$

$$x\in\langle 0;1),\ c\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \in R\colon\ x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\ x \in \langle 0;1\rangle \end{array} \right\} x \in \langle 0;1\rangle \right] \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & t=\sqrt{x} & x \in \langle 0;1\rangle \\ x=t^2 & \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & t \in \langle 0;1\rangle \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix}\right\} x\in\langle 0;1\rangle \right] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x=t^2 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x\in\langle 0;1\rangle \\ t\in\langle 0;1\rangle \end{matrix}\right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x} \in R\colon\ x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\ x \in \langle 0; 1\rangle \end{matrix} \right\} x \in \langle 0; 1\rangle \right] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x = t^2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \in \langle 0; 1\rangle \\ t \in \langle 0; 1\rangle \end{matrix} \right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \quad z = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}} = \sqrt{\frac{2}{1+t} - 1} \\ dt = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} z^2(1+t) = 1-t \\ t = \frac{1-z^2}{z^2+1} \end{matrix} \right| \begin{matrix} t \in \langle 0; 1\rangle \\ z \in \langle 0; 1\rangle \end{matrix} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x} \in R\colon\ x \in \langle 0; \infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\ x \in \langle 0; 1\rangle \end{matrix} \right\} x \in \langle 0; 1\rangle \Bigg] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x = t^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \in \langle 0; 1\rangle \\ t \in \langle 0; 1\rangle \end{matrix} \right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.}\quad z = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}} = \sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} z^2(1+t) = 1-t \\ t = \frac{1-z^2}{z^2+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t \in \langle 0; 1\rangle \\ z \in \langle 0; 1\rangle \end{matrix} \right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty)\\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle\end{array}\right\}x\in\langle 0;1\rangle\Bigg]\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.} & t=\sqrt{x} & x\in\langle 0;1\rangle\\ x=t^2 & \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1\rangle\end{array}\right]=\int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} & z^2(1+t)=1-t & t\in\langle 0;1\rangle\\ \mathrm{d}t=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1\rangle\end{array}\right]=\int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}$$

$$=8\int\frac{(z^4-z^2)\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\} x\in\langle 0;1\rangle\Bigg]\left[\begin{matrix}\text{Subst.} \\ x=t^2\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}x\in\langle 0;1\rangle \\ t\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}z^2(1+t)=1-t \\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}t\in\langle 0;1\rangle \\ z\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right]=\int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$=8\int\frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3}=\left[\begin{matrix}\text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\end{matrix}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\left. \begin{matrix} \sqrt{x} \in R\colon\ x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\ x \in \langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x \in \langle 0;1\rangle \right] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x = t^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \in \langle 0;1\rangle \\ t \in \langle 0;1\rangle \end{matrix} \right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.}\ \ z = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}} = \sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} z^2(1+t) = 1-t \\ t = \frac{1-z^2}{z^2+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t \in \langle 0;1\rangle \\ z \in \langle 0;1\rangle \end{matrix} \right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$= 8\int \frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3} = \left[\begin{matrix} \text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{2}{(z^2+1)^3} - \frac{3}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{z^2+1} \end{matrix} \right] = 8\int \left[\frac{2}{(z^2+1)^3} - \frac{3}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{z^2+1} \right] dz$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x\in\langle 0;1)\Bigg] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x=t^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x\in\langle 0;1) \\ t\in\langle 0;1) \end{matrix} \right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} z^2(1+t)=1-t \\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t\in\langle 0;1) \\ z\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$= 8\int \frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3} = \left[\begin{matrix} \text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1} \end{matrix} \right] = 8\int \left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right] dz$$

$$= \left[I_n=\int \frac{dz}{(z^2+1)^n},\ n\in N \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x} \in R\colon\ x \in \langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x} \geq 0\colon\ x \in \langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x \in \langle 0;1) \Bigg] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x = t^2 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x \in \langle 0;1) \\ t \in \langle 0;1) \end{matrix} \right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.}\quad z = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}} = \sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt = \frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2} \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} z^2(1+t) = 1-t \\ t = \frac{1-z^2}{z^2+1} \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} t \in \langle 0;1) \\ z \in \langle 0;1) \end{matrix} \right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$= 8\int \frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3} = \left[\begin{matrix} \text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3} = \frac{2}{(z^2+1)^3} - \frac{3}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{z^2+1} \end{matrix} \right] = 8\int \left[\frac{2}{(z^2+1)^3} - \frac{3}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{z^2+1} \right] dz$$

$$= \left[I_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n},\ n \in N \right] = 16I_3 - 24I_2 + 8I_1$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty)\\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\} x\in\langle 0;1)\Bigg]\left[\begin{matrix}\text{Subst.} & t=\sqrt{x} & x\in\langle 0;1)\\ x=t^2 & \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1)\end{matrix}\right]=\int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{Subst.}\ \ z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} & z^2(1+t)=1-t & t\in\langle 0;1)\\ \mathrm{d}t=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1)\end{matrix}\right]=\int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}$$

$$=8\int\frac{(z^4-z^2)\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}=\left[\begin{matrix}\text{Rozklad na parciálne zlomky:}\\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\end{matrix}\right]=8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\left[I_n=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n},\ n\in N\right]=16I_3-24I_2+8I_1=\left[I_n\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty)\\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\}x\in\langle 0;1)\Bigg]\left[\begin{matrix}\text{Subst.} & t=\sqrt{x} & x\in\langle 0;1)\\ x=t^2 & \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1)\end{matrix}\right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} & z^2(1+t)=1-t & t\in\langle 0;1)\\ \mathrm{d}t=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} & t=\frac{1-z^2}{z^2+1} & z\in\langle 0;1)\end{matrix}\right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}$$

$$= 8\int \frac{(z^4-z^2)\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3} = \left[\begin{matrix}\text{Rozklad na parciálne zlomky:}\\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\end{matrix}\right] = 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z$$

$$= \left[I_n=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n},\ n\in N\right] = 16I_3-24I_2+8I_1 = \left[I_n\right] = 16\left[\frac{3}{4}I_2+\frac{z}{4(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x\in\langle 0;1\rangle \Bigg] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x=t^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x\in\langle 0;1\rangle \\ t\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} z^2(1+t)=1-t \\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t\in\langle 0;1\rangle \\ z\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$=8\int \frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3} = \left[\begin{matrix} \text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1} \end{matrix} \right] = 8\int \left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right] dz$$

$$= \left[I_n=\int\frac{dz}{(z^2+1)^n},\ n\in N \right] = 16I_3-24I_2+8I_1 = \left[I_n \right] = 16\left[\frac{3}{4}I_2+\frac{z}{4(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1$$

$$= \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\}x\in\langle 0;1\rangle\Bigg]\left[\begin{matrix}\text{Subst.} \\ x=t^2\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}t=\sqrt{x} \\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}x\in\langle 0;1\rangle \\ t\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right]=\int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ \mathrm{d}t=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}z^2(1+t)=1-t \\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}t\in\langle 0;1\rangle \\ z\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right]=\int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}$$

$$=8\int\frac{(z^4-z^2)\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^3}=\left[\begin{matrix}\text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\end{matrix}\right]=8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\left[I_n=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)^n},\ n\in N\right]=16I_3-24I_2+8I_1=\left[I_n\right]=16\left[\frac{3}{4}I_2+\frac{z}{4(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1$$

$$=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2}I_1+\frac{z}{2(z^2+1)}\right]+8I_1$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix}\right\} x\in\langle 0;1\rangle\Bigg]\left[\begin{matrix}\text{Subst.} \\ x=t^2\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} x\in\langle 0;1\rangle \\ t\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{Subst.}\ \ z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} z^2(1+t)=1-t \\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} t\in\langle 0;1\rangle \\ z\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$= 8\int\frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3} = \left[\begin{matrix}\text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\end{matrix}\right] = 8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]dz$$

$$= \left[I_n=\int\frac{dz}{(z^2+1)^n},\ n\in N\right] = 16I_3-24I_2+8I_1 = \left[I_n\right] = 16\left[\frac{3}{4}I_2+\frac{z}{4(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1$$

$$= \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2}I_1+\frac{z}{2(z^2+1)}\right]+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x\in\langle 0;1\rangle \right] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x=t^2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt \end{matrix} \right| \begin{matrix} x\in\langle 0;1\rangle \\ t\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} z^2(1+t)=1-t \\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1} \end{matrix} \right| \begin{matrix} t\in\langle 0;1\rangle \\ z\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$= 8\int \frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3} = \left[\begin{matrix} \text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1} \end{matrix} \right] = 8\int \left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right] dz$$

$$= \left[I_n=\int \frac{dz}{(z^2+1)^n},\ n\in N \right] = 16I_3-24I_2+8I_1 = [I_n] = 16\left[\frac{3}{4}I_2+\frac{z}{4(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1$$

$$= \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2}I_1+\frac{z}{2(z^2+1)}\right]+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1$$

$$= \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\,\mathrm{arctg}\,z+c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty)\\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\}x\in\langle 0;1)\Bigg]\left[\begin{matrix}\text{Subst.}\\ x=t^2\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}t=\sqrt{x}\\ dx=2t\,dt\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}x\in\langle 0;1)\\ t\in\langle 0;1)\end{matrix}\right]=\int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1}\\ dt=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}z^2(1+t)=1-t\\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}t\in\langle 0;1)\\ z\in(0;1\rangle\end{matrix}\right]=\int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$=8\int\frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3}=\left[\begin{matrix}\text{Rozklad na parciálne zlomky:}\\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\end{matrix}\right]=8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]dz$$

$$=\left[I_n=\int\frac{dz}{(z^2+1)^n},\ n\in N\right]=16I_3-24I_2+8I_1=\left[I_n\right]=16\left[\frac{3}{4}I_2+\frac{z}{4(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1$$

$$=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2}I_1+\frac{z}{2(z^2+1)}\right]+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1$$

$$=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\operatorname{arctg} z+c\ =\left[z=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\ \middle|\ z^2+1=\frac{2}{1+\sqrt{x}}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \left[\begin{matrix} \sqrt{x}\in R\colon\ x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon\ x\in\langle 0;1\rangle \end{matrix} \right\} x\in\langle 0;1) \Bigg] \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \\ x=t^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x\in\langle 0;1) \\ t\in\langle 0;1) \end{matrix} \right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} z^2(1+t)=1-t \\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t\in\langle 0;1) \\ z\in\langle 0;1) \end{matrix} \right] = \int \frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$= 8\int \frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3} = \left[\begin{matrix} \text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1} \end{matrix} \right] = 8\int \left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right] dz$$

$$= \left[I_n=\int\frac{dz}{(z^2+1)^n},\ n\in N \right] = 16I_3-24I_2+8I_1 = \left[I_n \right] = 16\left[\tfrac{3}{4}I_2+\frac{z}{4(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1$$

$$= \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\tfrac{1}{2}I_1+\frac{z}{2(z^2+1)}\right]+8I_1 = \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1$$

$$= \frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\operatorname{arctg} z+c \ = \left[z=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \middle| z^2+1=\frac{2}{1+\sqrt{x}} \right]$$

$$= \sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-3\sqrt{1-x}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c$$

Integrály iracionálnych funkcií I

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c$$

$$=\left[\begin{matrix}\sqrt{x}\in R\colon x\in\langle 0;\infty) \\ 1-\sqrt{x}\geq 0\colon x\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right\} x\in\langle 0;1\rangle\Bigg]\left[\begin{matrix}\text{Subst.} \\ x=t^2\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}t=\sqrt{x} \\ dx=2t\,dt\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}x\in\langle 0;1\rangle \\ t\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right] = \int 2t\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{Subst.}\quad z=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2-1-t}{1+t}}=\sqrt{\frac{2}{1+t}-1} \\ dt=\frac{-2z(z^2+1)-(1-z^2)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\,dz=\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}z^2(1+t)=1-t \\ t=\frac{1-z^2}{z^2+1}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}t\in\langle 0;1\rangle \\ z\in\langle 0;1\rangle\end{matrix}\right]=\int\frac{2(1-z^2)\cdot z}{z^2+1}\,\frac{-4z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$=8\int\frac{(z^4-z^2)\,dz}{(z^2+1)^3}=\left[\begin{matrix}\text{Rozklad na parciálne zlomky:} \\ \frac{z^4-z^2}{(z^2+1)^3}=\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\end{matrix}\right]=8\int\left[\frac{2}{(z^2+1)^3}-\frac{3}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{z^2+1}\right]dz$$

$$=\left[I_n=\int\frac{dz}{(z^2+1)^n},\ n\in N\right]=16I_3-24I_2+8I_1=\left[I_n\right]=16\left[\frac{3}{4}I_2+\frac{z}{4(z^2+1)^2}\right]-24I_2+8I_1$$

$$=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12I_2+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-12\left[\frac{1}{2}I_1+\frac{z}{2(z^2+1)}\right]+8I_1=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2I_1$$

$$=\frac{4z}{(z^2+1)^2}-\frac{6z}{z^2+1}+2\,\mathrm{arctg}\,z+c\ =\left[z=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\middle|\,z^2+1=\frac{2}{1+\sqrt{x}}\right]$$

$$=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-3\sqrt{1-x}+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c$$

$$=\sqrt{x-x^2}-2\sqrt{1-x}+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c,\ x\in\langle 0;1\rangle,\ c\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \begin{cases} -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + c_1, \ x\in\langle 0;1), \ c_1\in R, \\ -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} + c_2, \ x\in\langle 0;1\rangle, \ c_2\in R. \end{cases}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \begin{cases} -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1, \; x\in\langle 0;1), \; c_1\in R, \\ -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2, \; x\in\langle 0;1\rangle, \; c_2\in R. \end{cases}$$

Skontrolujeme derivovaním:

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \begin{cases} -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1, \ x\in\langle 0;1), \ c_1\in R, \\ -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2, \ x\in\langle 0;1\rangle, \ c_2\in R. \end{cases}$$

Skontrolujeme derivovaním:

[Prvé dve časti sú rovnaké, je zbytočné ich derivovať.]

$$\left[-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1\right]'$$

$$\left[2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2\right]'$$

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \begin{cases} -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + c_1, \ x \in \langle 0;1), \ c_1 \in R, \\ -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} + c_2, \ x \in \langle 0;1\rangle, \ c_2 \in R. \end{cases}$$

Skontrolujeme derivovaním:

[Prvé dve časti sú rovnaké, je zbytočné ich derivovať.]

$$\left[-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + c_1\right]' = -\frac{\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]'}{\frac{x}{1-x}+1}$$

$$\left[2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} + c_2\right]' = 2\frac{\left[\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}\right]'}{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+1}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \begin{cases} -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1, & x\in\langle 0;1),\ c_1\in R, \\ -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2, & x\in\langle 0;1\rangle,\ c_2\in R. \end{cases}$$

Skontrolujeme derivovaním: [Prvé dve časti sú rovnaké, je zbytočné ich derivovať.]

$$\left[-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1\right]' = -\frac{\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]'}{\frac{x}{1-x}+1} = -\frac{\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{1-x}}{\frac{x+1-x}{1-x}}$$

$$\left[2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2\right]' = 2\frac{\left[\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}\right]'}{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+1} = 2\frac{\frac{\frac{1}{2}(1-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}-(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{1+x^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1,\ x\in\langle 0;1),\ c_1\in R,\\[2ex] -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}+2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2,\ x\in\langle 0;1\rangle,\ c_2\in R.\end{cases}$$

Skontrolujeme derivovaním:

[Prvé dve časti sú rovnaké, je zbytočné ich derivovať.]

$$\left[-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1\right]' = -\frac{\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]'}{\frac{x}{1-x}+1} = -\frac{\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{1-x}}{\frac{x+1-x}{1-x}} = -\frac{\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2(1-x)}}{\frac{1}{1-x}}$$

$$\left[2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2\right]' = 2\frac{\left[\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}\right]'}{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+1} = 2\frac{\frac{\frac{1}{2}(1-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}-(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{1+x^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\frac{-\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}-\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{1+\sqrt{x}}}{\frac{2}{1+\sqrt{x}}}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \begin{cases} -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1, \; x\in\langle 0;1), \; c_1\in R, \\ -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2, \; x\in\langle 0;1\rangle, \; c_2\in R. \end{cases}$$

Skontrolujeme derivovaním: [Prvé dve časti sú rovnaké, je zbytočné ich derivovať.]

$$\left[-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1\right]' = -\frac{\left[\frac{x^{\frac12}}{(1-x)^{\frac12}}\right]'}{\frac{x}{1-x}+1} = -\frac{\frac{\frac12 x^{-\frac12}(1-x)^{\frac12}-x^{\frac12}\,\frac12(1-x)^{-\frac12}(-1)}{1-x}}{\frac{x+1-x}{1-x}} = -\frac{\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2(1-x)}}{\frac{1}{1-x}}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2(1-x)}\cdot\frac{1-x}{1} = -\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2}$$

$$\left[2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2\right]' = 2\frac{\left[\frac{(1-x^{\frac12})^{\frac12}}{(1+x^{\frac12})^{\frac12}}\right]'}{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+1} = 2\frac{\frac{\frac12(1-x^{\frac12})^{-\frac12}(-\frac12 x^{-\frac12})(1+x^{\frac12})^{\frac12}-(1-x^{\frac12})^{\frac12}\,\frac12(1+x^{\frac12})^{-\frac12}(\frac12 x^{-\frac12})}{1+x^{\frac12}}}{\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\frac{-\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}-\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{1+\sqrt{x}}}{\frac{2}{1+\sqrt{x}}} = -\frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}+\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{2}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \begin{cases} -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1, & x\in\langle 0;1), \ c_1\in R, \\ -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2, & x\in\langle 0;1\rangle, \ c_2\in R. \end{cases}$$

Skontrolujeme derivovaním:

[Prvé dve časti sú rovnaké, je zbytočné ich derivovať.]

$$\left[-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1\right]' = -\frac{\left[\frac{x^{\frac12}}{(1-x)^{\frac12}}\right]'}{\frac{x}{1-x}+1} = -\frac{\frac{\frac12 x^{-\frac12}(1-x)^{\frac12}-x^{\frac12}\frac12(1-x)^{-\frac12}(-1)}{1-x}}{\frac{x+1-x}{1-x}} = -\frac{\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2(1-x)}}{\frac{1}{1-x}}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2(1-x)}\cdot\frac{1-x}{1} = -\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2} = -\frac{1-x+x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$\left[2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2\right]' = 2\frac{\left[\frac{(1-x^{\frac12})^{\frac12}}{(1+x^{\frac12})^{\frac12}}\right]'}{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+1} = 2\frac{\frac{\frac12(1-x^{\frac12})^{-\frac12}(-\frac12 x^{-\frac12})(1+x^{\frac12})^{\frac12}-(1-x^{\frac12})^{\frac12}\frac12(1+x^{\frac12})^{-\frac12}(\frac12 x^{-\frac12})}{1+x^{\frac12}}}{\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\frac{-\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}-\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{1+\sqrt{x}}}{\frac{2}{1+\sqrt{x}}} = -\frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}+\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{2} = -\frac{1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

Integrály iracionálnych funkcií I

Obe riešenia predchádzajúceho príkladu IV sú správne:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \begin{cases} -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1,\ x\in\langle 0;1),\ c_1\in R,\\ -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2,\ x\in\langle 0;1\rangle,\ c_2\in R.\end{cases}$$

Skontrolujeme derivovaním: [Prvé dve časti sú rovnaké, je zbytočné ich derivovať.]

$$\left[-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_1\right]' = -\frac{\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]'}{\frac{x}{1-x}+1} = -\frac{\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{1-x}}{\frac{x+1-x}{1-x}} = -\frac{\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2(1-x)}}{\frac{1}{1-x}}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2(1-x)}\cdot\frac{1-x}{1} = -\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{2} = -\frac{1-x+x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

$$\left[2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}+c_2\right]' = 2\frac{\left[\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}\right]'}{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+1} = 2\frac{\frac{\frac{1}{2}(1-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}-(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{1+x^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\frac{-\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}-\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{1+\sqrt{x}}}{\frac{2}{1+\sqrt{x}}} = -\frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}+\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{2} = -\frac{1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\, dx$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- Eulerove substitúcie sú síce účinné, ale aj veľmi pracné.
- Niekedy môžeme použiť iba jednu ES a niekedy aj všetky tri ES.
- Často pomôže substitúcia goniometrickou, resp. hyperbolickou funkciou.

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,dx$, $\alpha,\beta,\gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- 1. Eulerova substitúcia
- 2. Eulerova substitúcia
- 3. Eulerova substitúcia

- Eulerove substitúcie sú síce účinné, ale aj veľmi pracné.
- Niekedy môžeme použiť iba jednu ES a niekedy aj všetky tri ES.
- Často pomôže substitúcia goniometrickou, resp. hyperbolickou funkciou.

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\, dx$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- 1. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t \pm \sqrt{\alpha}x$
- 2. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$
- 3. Eulerova substitúcia $t = \sqrt{\alpha \frac{x-a}{x-b}}$

- Eulerove substitúcie sú síce účinné, ale aj veľmi pracné.
- Niekedy môžeme použiť iba jednu ES a niekedy aj všetky tri ES.
- Často pomôže substitúcia goniometrickou, resp. hyperbolickou funkciou.

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})\,dx$, $\alpha,\beta,\gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- 1. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t \pm \sqrt{\alpha}x$ sa používa pre $\alpha > 0$.
- 2. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$ sa používa pre $\gamma > 0$.
- 3. Eulerova substitúcia $t = \sqrt{\alpha \frac{x-a}{x-b}}$ sa používa pre $a, b \in R$, $a \neq b$ (dva rôzne reálne) korene polynómu $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\, dx$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- 1. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t \pm \sqrt{\alpha} x$ sa používa pre $\alpha > 0$.

  $t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\alpha} x,$

- 2. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$ sa používa pre $\gamma > 0$.

  $t = \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\gamma}}{x},$

- 3. Eulerova substitúcia $t = \sqrt{\alpha \frac{x-a}{x-b}}$ sa používa pre $a, b \in R$, $a \neq b$ (dva rôzne reálne) korene polynómu $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

  $t^2 = \alpha \frac{x-a}{x-b},$

- Eulerove substitúcie sú síce účinné, ale aj veľmi pracné.
- Niekedy môžeme použiť iba jednu ES a niekedy aj všetky tri ES.
- Často pomôže substitúcia goniometrickou, resp. hyperbolickou funkciou.

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\, dx$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- 1. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t \pm \sqrt{\alpha} x$ sa používa pre $\alpha > 0$.

  $t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\alpha} x$, $x = \frac{t^2 - \gamma}{\beta \mp 2\sqrt{\alpha} t}$,

- 2. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$ sa používa pre $\gamma > 0$.

  $t = \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\gamma}}{x}$, $x = \frac{\pm 2\sqrt{\gamma} t - \beta}{\alpha - t^2}$,

- 3. Eulerova substitúcia $t = \sqrt{\alpha \frac{x-a}{x-b}}$ sa používa pre $a, b \in R$, $a \neq b$ (dva rôzne reálne) korene polynómu $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

  $t^2 = \alpha \frac{x-a}{x-b}$, $x = \frac{\alpha a - b t^2}{\alpha - t^2}$,

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,\mathrm{d}x$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- 1. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t \pm \sqrt{\alpha} x$ sa používa pre $\alpha > 0$.

  $t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\alpha} x$, $\quad x = \frac{t^2 - \gamma}{\beta \mp 2\sqrt{\alpha} t}$, $\quad \mathrm{d}x = \frac{2(\mp\sqrt{\alpha} t^2 + t\beta \mp \gamma\sqrt{\alpha})}{(\beta \mp 2\sqrt{\alpha} t)^2}\,\mathrm{d}t$.

- 2. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$ sa používa pre $\gamma > 0$.

  $t = \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\gamma}}{x}$, $\quad x = \frac{\pm 2\sqrt{\gamma} t - \beta}{\alpha - t^2}$, $\quad \mathrm{d}x = \frac{2(\pm\sqrt{\gamma} t^2 - \beta t \pm \alpha\sqrt{\gamma})}{(\alpha - t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

- 3. Eulerova substitúcia $t = \sqrt{\alpha \frac{x-a}{x-b}}$ sa používa pre $a, b \in R$, $a \neq b$ (dva rôzne reálne) korene polynómu $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

  $t^2 = \alpha \frac{x-a}{x-b}$, $\quad x = \frac{\alpha a - b t^2}{\alpha - t^2}$, $\quad \mathrm{d}x = \frac{2\alpha(a-b)t}{(\alpha - t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,dx$, $\quad \alpha, \beta, \gamma \in R,\ \alpha \neq 0.$

- 1. Eulerova substitúcia $\quad \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t \pm \sqrt{\alpha}\,x \quad$ sa používa pre $\alpha > 0$.

  $$t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\alpha}\,x, \quad x = \frac{t^2 - \gamma}{\beta \mp 2\sqrt{\alpha}\,t}, \quad dx = \frac{2(\mp\sqrt{\alpha}\,t^2 + t\beta \mp \gamma\sqrt{\alpha})}{(\beta \mp 2\sqrt{\alpha}\,t)^2}\,dt.$$

- 2. Eulerova substitúcia $\quad \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma} \quad$ sa používa pre $\gamma > 0$.

  $$t = \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\gamma}}{x}, \quad x = \frac{\pm 2\sqrt{\gamma}\,t - \beta}{\alpha - t^2}, \quad dx = \frac{2(\pm\sqrt{\gamma}\,t^2 - \beta t \pm \alpha\sqrt{\gamma})}{(\alpha - t^2)^2}\,dt.$$

- 3. Eulerova substitúcia $\quad t = \sqrt{\alpha \frac{x-a}{x-b}} \quad$ sa používa pre $a, b \in R,\ a \neq b$ (dva rôzne reálne) korene polynómu $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

  $$t^2 = \alpha \frac{x-a}{x-b}, \quad x = \frac{\alpha a - b t^2}{\alpha - t^2}, \quad dx = \frac{2\alpha(a-b)t}{(\alpha - t^2)^2}\,dt.$$

- Eulerove substitúcie sú síce účinné, ale aj veľmi pracné.
- Niekedy môžeme použiť iba jednu ES a niekedy aj všetky tri ES.
- Často pomôže substitúcia goniometrickou, resp. hyperbolickou funkciou.

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,dx$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- **1. Eulerova substitúcia** $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t \pm \sqrt{\alpha}x$ sa používa pre $\alpha > 0$.

  $t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\alpha}x$, $x = \frac{t^2 - \gamma}{\beta \mp 2\sqrt{\alpha}t}$, $dx = \frac{2(\mp\sqrt{\alpha}t^2 + t\beta \mp \gamma\sqrt{\alpha})}{(\beta \mp 2\sqrt{\alpha}t)^2}\,dt$.

- **2. Eulerova substitúcia** $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$ sa používa pre $\gamma > 0$.

  $t = \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\gamma}}{x}$, $x = \frac{\pm 2\sqrt{\gamma}t - \beta}{\alpha - t^2}$, $dx = \frac{2(\pm\sqrt{\gamma}t^2 - \beta t \pm \alpha\sqrt{\gamma})}{(\alpha - t^2)^2}\,dt$.

- **3. Eulerova substitúcia** $t = \sqrt{\alpha \frac{x-a}{x-b}}$ sa používa pre $a, b \in R$, $a \neq b$ (dva rôzne reálne) korene polynómu $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

  $t^2 = \alpha \frac{x-a}{x-b}$, $x = \frac{\alpha a - bt^2}{\alpha - t^2}$, $dx = \frac{2\alpha(a-b)t}{(\alpha - t^2)^2}\,dt$.

- Eulerove substitúcie sú síce účinné, ale aj veľmi pracné.
- Niekedy môžeme použiť iba jednu ES a niekedy aj všetky tri ES.
- Často pomôže substitúcia goniometrickou, alebo hyperbolickou funkciou.

Integrály iracionálnych funkcií II – Eulerove substitúcie

Integrály typu $\int f(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,dx$, $\alpha,\beta,\gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

- 1\. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t \pm \sqrt{\alpha}x$ sa používa pre $\alpha > 0$.

  $t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} \mp \sqrt{\alpha}x$, $x = \frac{t^2-\gamma}{\beta \mp 2\sqrt{\alpha}t}$, $dx = \frac{2(\mp\sqrt{\alpha}t^2 + t\beta \mp \gamma\sqrt{\alpha})}{(\beta \mp 2\sqrt{\alpha}t)^2}\,dt$.

- 2\. Eulerova substitúcia $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$ sa používa pre $\gamma > 0$.

  $t = \frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \mp \sqrt{\gamma}}{x}$, $x = \frac{\pm 2\sqrt{\gamma}t - \beta}{\alpha - t^2}$, $dx = \frac{2(\pm\sqrt{\gamma}t^2 - \beta t \pm \alpha\sqrt{\gamma})}{(\alpha - t^2)^2}\,dt$.

- 3\. Eulerova substitúcia $t = \sqrt{\alpha \frac{x-a}{x-b}}$ sa používa pre $a, b \in R$, $a \neq b$ (dva rôzne reálne) korene polynómu $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

  $t^2 = \alpha\frac{x-a}{x-b}$, $x = \frac{\alpha a - bt^2}{\alpha - t^2}$, $dx = \frac{2\alpha(a-b)t}{(\alpha - t^2)^2}\,dt$.

- Eulerove substitúcie sú síce účinné, ale aj veľmi pracné.
- Niekedy môžeme použiť iba jednu ES a niekedy aj všetky tri ES.
- Často pomôže substitúcia goniometrickou, resp. hyperbolickou funkciou.

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $a > 0$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\quad a > 0$

$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 2.\text{ ES} \quad \sqrt{a^2-x^2}=a-xt & t=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} & x\in(-a;0),\, t\in(-1;0)\text{, resp. } x\in(0;a),\, t\in(0;1) & x\to\pm a \\ a^2-x^2=a^2-2axt+x^2t^2 & x=\frac{2at}{t^2+1} & dx = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2} & t\to\pm 1 \\ 2axt=x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at=xt^2+x,\ x\neq 0 & & \sqrt{a^2-x^2} = a-xt = a-\frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & \end{array} \right.$

$\left. x\to 0:\ t=\lim_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=\left[\text{L'H}\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0 \right]$

$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ dx = a\cos t\,dt & t = \arcsin\frac{x}{a} & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array} \right]$

$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cos t & \cos t = \frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ dx = -a\sin t\,dt & t = \arccos\frac{x}{a} & t\in(0;\pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array} \right]$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 2.\,\text{ES} \quad \sqrt{a^2-x^2}=a-xt & t=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} & x\in(-a;0),\, t\in(-1;0),\ \text{resp. } x\in(0;a),\, t\in(0;1) & x\to\pm a \\ a^2-x^2=a^2-2axt+x^2t^2 & x=\frac{2at}{t^2+1} & dx=\frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2} & t\to\pm 1 \\ 2axt=x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at=xt^2+x,\ x\neq 0 & & \sqrt{a^2-x^2}=a-xt=a-\frac{2at}{t^2+1}t=\frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1}=\frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & \\ \multicolumn{4}{l}{x\to 0:\ t=\lim_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=\left[\text{L'H}\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x=a\sin t & \sin t=\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ dx=a\cos t\,dt & t=\arcsin\frac{x}{a} & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & =a\sqrt{\cos^2 t}=a\,|\cos t|=a\cos t \end{array} \right] = \int \frac{a\cos t\,dt}{a\cos t}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x=a\cos t & \cos t=\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ dx=-a\sin t\,dt & t=\arccos\frac{x}{a} & t\in(0;\pi) & =a\sqrt{\sin^2 t}=a\,|\sin t|=a\sin t \end{array} \right] = \int \frac{-a\sin t\,dt}{a\sin t}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 2.\,\text{ES}\quad \sqrt{a^2-x^2}=a-xt & t=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} & x\in(-a;0),\, t\in(-1;0),\ \text{resp. } x\in(0;a),\, t\in(0;1) & x\to\pm a \\ a^2-x^2=a^2-2axt+x^2t^2 & x=\frac{2at}{t^2+1} & dx=\frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2} & t\to\pm 1 \\ 2axt=x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at=xt^2+x,\ x\neq 0 & & \sqrt{a^2-x^2}=a-xt=a-\frac{2at}{t^2+1}t=\frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1}=\frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & \end{array}\right.$$

$$\left. x\to 0:\ t=\lim_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=\left[\text{L'H}\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0 \right] = \int \frac{\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}}$$

$$=\int \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sin t & \sin t=\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \quad dx=a\cos t\,dt & t=\arcsin\frac{x}{a} & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \quad =a\sqrt{\cos^2 t}=a\,|\cos t|=a\cos t \end{array}\right]=\int\frac{a\cos t\,dt}{a\cos t}=\int dt$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\cos t & \cos t=\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \quad dx=-a\sin t\,dt & t=\arccos\frac{x}{a} & t\in(0;\pi) & \quad =a\sqrt{\sin^2 t}=a\,|\sin t|=a\sin t \end{array}\right]=\int\frac{-a\sin t\,dt}{a\sin t}=-\int dt$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\quad a>0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 2.\ \text{ES} \quad \sqrt{a^2-x^2}=a-xt & t=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} & x\in(-a;0),\ t\in(-1;0),\ \text{resp. } x\in(0;a),\ t\in(0;1) & x\to\pm a \\ a^2-x^2=a^2-2axt+x^2t^2 & x=\frac{2at}{t^2+1} & dx=\frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2} & t\to\pm 1 \\ 2axt=x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at=xt^2+x,\ x\neq 0 & & \sqrt{a^2-x^2}=a-xt=a-\frac{2at}{t^2+1}t=\frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1}=\frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & \\ \multicolumn{4}{l}{x\to 0:\ \ t=\lim_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=\left[\text{L'H}\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2\,\text{arctg}\, t + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x=a\sin t & \sin t=\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \quad dx=a\cos t\,dt & t=\arcsin\frac{x}{a} & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \quad =a\sqrt{\cos^2 t}=a\,|\cos t|=a\cos t \end{array} \right] = \int \frac{a\cos t\,dt}{a\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x=a\cos t & \cos t=\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ \quad dx=-a\sin t\,dt & t=\arccos\frac{x}{a} & t\in(0;\pi) & \quad =a\sqrt{\sin^2 t}=a\,|\sin t|=a\sin t \end{array} \right] = \int \frac{-a\sin t\,dt}{a\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_3$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c_1 = \arcsin\frac{x}{a} + c_2 = -\arccos\frac{x}{a} + c_3 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 2.\ \text{ES}\quad \sqrt{a^2-x^2} = a-xt & t=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} & x\in(-a;0),\, t\in(-1;0),\ \text{resp.}\ x\in(0;a),\, t\in(0;1) & x\to\pm a \\ a^2-x^2=a^2-2axt+x^2t^2 & x=\frac{2at}{t^2+1} & dx = \frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2} & t\to\pm 1 \\ 2axt=x^2t^2+x^2 \Rightarrow 2at=xt^2+x,\ x\neq 0 & \multicolumn{2}{l|}{\sqrt{a^2-x^2} = a-xt = a-\frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1}} & \\ \multicolumn{4}{l}{x\to 0:\ t=\lim_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left[\text{L'H}\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\, t + c_1 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c_1,\ x\in(-a;0)\cup(0;a),\ c_1\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ dx = a\cos t\,dt & t=\arcsin\frac{x}{a} & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int \frac{a\cos t\,dt}{a\cos t} = \int dt$$

$$= t + c_2 = \arcsin\frac{x}{a} + c_2,\ x\in(-a;a),\ c_2\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\cos t & \cos t = \frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ dx = -a\sin t\,dt & t=\arccos\frac{x}{a} & t\in(0;\pi) & = a\sqrt{\sin^2 t} = a\,|\sin t| = a\sin t \end{array}\right] = \int \frac{-a\sin t\,dt}{a\sin t} = -\int dt$$

$$= -t + c_3 = -\arccos\frac{x}{a} + c_3,\ x\in(-a;a),\ c_3\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ $a > 0$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\qquad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\text{ ES } \sqrt{x^2-a^2} = t-x & t=x+\sqrt{x^2-a^2} & x\in(-\infty;-a),\, t\in(-a;0),\ \text{resp. } x\in(a;\infty),\, t\in(a;\infty) \\ x^2-a^2 = t^2-2tx+x^2 & x = \frac{t^2+a^2}{2t} & dx = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,dt = \frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,dt = \frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt \;\Big|\; x\to\pm a \\ \sqrt{x^2-a^2} = t-\frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\infty+\infty=\infty \;\Big|\; t\to\pm a \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 3.\text{ ES } t=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x\in(-\infty;-a),\, t\in(1;\infty):\ \sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{t^2-1} & x\to a:\ t\to 0 \\ t^2(x+a)=t^2x+t^2a=x-a \;\Big|\; x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\in(a;\infty),\, t\in(0;1):\ \sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{1-t^2} & x\to\pm\infty:\ t\to 1 \\ dx=\frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{4at\,dt}{(1-t^2)^2} & x\to-a^-:\ t=\lim_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{-2a}{0^-}}=\sqrt{\infty}=\infty & \\ \multicolumn{3}{l}{\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}-a^2}=a\sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}}=a\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2}}=a\sqrt{\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}}=\frac{2at}{|1-t^2|}} \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\ \text{ES} \quad \sqrt{x^2-a^2} = t-x & t = x+\sqrt{x^2-a^2} & x\in(-\infty;-a),\, t\in(-a;0),\ \text{resp. } x\in(a;\infty),\, t\in(a;\infty) \\ x^2-a^2 = t^2-2tx+x^2 & x = \frac{t^2+a^2}{2t} & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t \;\Big|\; x\to\pm a \\ \sqrt{x^2-a^2} = t-\frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t = \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2}) = \infty+\infty = \infty \;\Big|\; t\to\pm a \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 3.\ \text{ES} \quad t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & & x\in(-\infty;-a),\, t\in(1;\infty):\ \sqrt{x^2-a^2} = \frac{2at}{t^2-1} \;\Big|\; x\to a:\ t\to 0 \\ t^2(x+a) = t^2x+t^2a = x-a & x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\in(a;\infty),\, t\in(0;1):\ \sqrt{x^2-a^2} = \frac{2at}{1-t^2} \;\Big|\; x\to\pm\infty:\ t\to 1 \\ \mathrm{d}x = \frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4at\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} & & x\to-a^-:\ t = \lim\limits_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \sqrt{\frac{-2a}{0^-}} = \sqrt{\infty} = \infty \\ \multicolumn{3}{l}{\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}-a^2} = a\sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}} = a\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2}} = a\sqrt{\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}} = \frac{2at}{|1-t^2|}} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{4at\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $a>0$

$=$ [

1. ES $\sqrt{x^2-a^2}=t-x$ | $t=x+\sqrt{x^2-a^2}$ | $x\in(-\infty;-a),\ t\in(-a;0)$, resp. $x\in(a;\infty),\ t\in(a;\infty)$

$x^2-a^2=t^2-2tx+x^2$ | $x=\frac{t^2+a^2}{2t}$ | $dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt$ | $x\to\pm a$

$\sqrt{x^2-a^2}=t-\frac{t^2+a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2-a^2}{2t}$ | $x\to\infty$: $t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\infty+\infty=\infty$ | $t\to\pm a$

$x\to-\infty$: $t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0$

] $=\int\frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$

$=\int\frac{dt}{t}$

$=$ [

3. ES $t=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{1-\frac{2a}{x+a}}$ | $x\in(-\infty;-a),\ t\in(1;\infty)$: $\sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{t^2-1}$ | $x\to a$: $t\to 0$

$t^2(x+a)=t^2x+t^2a=x-a$ | $x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2}$ | $x\in(a;\infty),\ t\in(0;1)$: $\sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{1-t^2}$ | $x\to\pm\infty$: $t\to 1$

$dx=\frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{4at\,dt}{(1-t^2)^2}$ | $x\to-a^-$: $t=\lim_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{-2a}{0^-}}=\sqrt{\infty}=\infty$

$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}-a^2}=a\sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}}=a\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2}}=a\sqrt{\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}}=\frac{2at}{|1-t^2|}$

] $=\int\frac{\frac{4at\,dt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}}$

$x>a>0$: $=-\int\frac{2\,dt}{t^2-1}$

$x<-a<0$: $=\int\frac{2\,dt}{t^2-1}$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} 1.\,\text{ES} \quad \sqrt{x^2-a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2-a^2} & \multicolumn{2}{l}{x\in(-\infty;-a),\, t\in(-a;0)\,,\ \text{resp.}\ x\in(a;\infty),\, t\in(a;\infty)} \\ x^2-a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2+a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt & x\to\pm a \\ \sqrt{x^2-a^2}=t-\frac{t^2+a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2-a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\infty+\infty=\infty & t\to\pm a \end{array} \right.$$

$$\left. x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0 \right] = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 3.\,\text{ES} \quad t=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x\in(-\infty;-a),\, t\in(1;\infty):\ \sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{t^2-1} & x\to a:\ t\to 0 \\ t^2(x+a)=t^2x+t^2a=x-a \quad x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\in(a;\infty),\, t\in(0;1):\ \sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{1-t^2} & x\to\pm\infty:\ t\to 1 \\ dx=\frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{4at\,dt}{(1-t^2)^2} & x\to-a^-:\ t=\lim_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{-2a}{0^-}}=\sqrt{\infty}=\infty & \end{array} \right.$$

$$\left. \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}-a^2}=a\sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}}=a\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2}}=a\sqrt{\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}}=\frac{2at}{|1-t^2|} \right] = \int \frac{\frac{4at\,dt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}}$$

$x>a>0$:
$$= -\int \frac{2\,dt}{t^2-1} = -\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2$$

$x<-a<0$:
$$= \int \frac{2\,dt}{t^2-1} = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1 = -\operatorname{sgn} x \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}-1}{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+1}\right| + c_2 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\text{ ES } \sqrt{x^2-a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2-a^2} & x\in(-\infty;-a),\ t\in(-a;0),\ \text{resp. } x\in(a;\infty),\ t\in(a;\infty) \\ x^2-a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2+a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt \quad\vert\quad x\to\pm a \\ \sqrt{x^2-a^2}=t-\frac{t^2+a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2-a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\infty+\infty=\infty \quad\vert\quad t\to\pm a \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$= \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1,\ x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ c_1\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 3.\text{ ES } t=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{1-\frac{2a}{x+a}} & x\in(-\infty;-a),\ t\in(1;\infty):\ \sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{t^2-1} & x\to a:\ t\to 0 \\ t^2(x+a)=t^2x+t^2a=x-a \quad\vert\quad x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\in(a;\infty),\ t\in(0;1):\ \sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{1-t^2} & x\to\pm\infty:\ t\to 1 \\ dx=\frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{4at\,dt}{(1-t^2)^2} & x\to-a^-:\ t=\lim\limits_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{-2a}{0^-}}=\sqrt{\infty}=\infty & \\ \multicolumn{3}{l}{\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}-a^2}=a\sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}}=a\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^2}}=a\sqrt{\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}}=\frac{2at}{|1-t^2|}} \end{array}\right] = \int\frac{\frac{4at\,dt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}}$$

$x>a>0$: $$= -\int\frac{2\,dt}{t^2-1} = -\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = -\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}-1}{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+1}\right| + c_2,\ x\in(a;\infty),\ c_2\in R,$$

$x<-a<0$: $$= \int\frac{2\,dt}{t^2-1} = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}-1}{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+1}\right| + c_2,\ x\in(-\infty;-a),\ c_2\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $\quad a > 0$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\ \text{ES}\ \ \sqrt{x^2+a^2} = t - x & t = x + \sqrt{x^2+a^2} & x \in (-\infty;\infty),\quad t \in (0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2 & x = \frac{t^2-a^2}{2t} & dx = \frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2} = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & & x \to \infty:\ t = \lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2}) = \infty+\infty = \infty \end{array} \right.$$

$$\left. x \to -\infty:\ t = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2}) = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{-a^2}{-\infty-\infty} = 0 \right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $\quad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\,\text{ES} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty), \quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2-2tx+x^2 & x = \frac{t^2-a^2}{2t} & dx = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2} = t-\frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty+\infty=\infty \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int \frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $\quad a>0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\,\text{ES} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t-x & t = x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty), \quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2-2tx+x^2 & x = \frac{t^2-a^2}{2t} & dx = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2} = t-\frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2}) = \infty+\infty=\infty \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2}) = \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{-a^2}{-\infty-\infty} = 0} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int \frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t} = \int dt$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $\quad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\,\text{ES} \quad \sqrt{x^2+a^2} = t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty), \quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2 = t^2-2tx+x^2 & x = \frac{t^2-a^2}{2t} & dx = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2} = t-\frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty+\infty=\infty \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int \frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t} = \int dt$$

$$= t + c_2$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{1. ES}\quad \sqrt{x^2+a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty),\quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2-a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty+\infty=\infty \end{array}\right.$$

$$\left. x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0 \right]$$

$$=\int\frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]=\int\frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t}=\int dt$$

$$=t+c_2=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\ \text{ES}\quad \sqrt{x^2+a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty),\quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2-a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty+\infty=\infty \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int\frac{dt}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & \quad =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right] = \int\frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t}=\int dt$$

$$= t+c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_2$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\ \text{ES}\quad \sqrt{x^2+a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty),\quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2-a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)=\infty+\infty=\infty \end{array}\right.$$

$$\left. x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0\right]$$

$$=\int\frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]=\int\frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t}=\int dt$$

$$=t+c_2=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_2=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right)+c_2$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\text{ ES } \sqrt{x^2+a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty),\quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2-a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty+\infty=\infty \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]=\int\frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t}=\int dt$$

$$=t+c_2=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_2=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right)+c_2$$

$$=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_2$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\text{ ES } \sqrt{x^2+a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty),\quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2-a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}dt=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt \\ \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty+\infty=\infty \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array}\right]$$

$$=\int\frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]=\int\frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t}=\int dt$$

$$=t+c_2=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_2=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right)+c_2$$

$$=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_2=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a+c_2$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\text{ ES } \sqrt{x^2+a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty),\quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2-a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty+\infty=\infty \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int\frac{dt}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & \quad =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]=\int\frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t}=\int dt$$

$$=t+c_2=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_2=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right)+c_2$$

$$=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_2=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a+c_2=\left[\begin{array}{l} c_1=c_2-\ln a \\ c_1\in R,\ c_2\in R\end{array}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} 1.\ \text{ES}\quad \sqrt{x^2+a^2}=t-x & t=x+\sqrt{x^2+a^2} & x\in(-\infty;\infty),\quad t\in(0;\infty) \\ x^2+a^2=t^2-2tx+x^2 & x=\frac{t^2-a^2}{2t} & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t} & & x\to\infty:\ t=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty+\infty=\infty \\ \multicolumn{3}{l}{x\to-\infty:\ t=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right] = \int \frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t} = \int dt$$

$$= t+c_2 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_2 = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_2 = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right)+c_2$$

$$= \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_2 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a+c_2 = \left[\begin{array}{l} c_1=c_2-\ln a \\ c_1\in R,\ c_2\in R \end{array}\right]$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a \sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ dx = a \cos t\, dt & t = \arcsin \frac{x}{a} & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \quad = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a \cos t \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $\quad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a \sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ dx = a \cos t \, dt & t = \arcsin \frac{x}{a} & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \quad = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a \cos t \end{array} \right] = \int a^2 \cos^2 t \, dt$$

$$= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int \frac{-x \cdot x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & t = \arcsin\frac{x}{a} & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array} \right] = \int a^2 \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int \frac{-x \cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} & v = \sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a \sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ dx = a \cos t\, dt & t = \arcsin \frac{x}{a} & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \quad = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a \cos t \end{array} \right] = \int a^2 \cos^2 t\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2 \cdot 2} \right) + c$$

$$= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int \frac{-x \cdot x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} & v = \sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $\quad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a \sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ dx = a \cos t\, dt & t = \arcsin \frac{x}{a} & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a \cos t \end{array} \right] = \int a^2 \cos^2 t\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2 \cdot 2} \right) + c = \frac{a^2 t}{2} + \frac{2a^2 \sin t \cos t}{4} + c$$

$$= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int \frac{-x \cdot x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} & v = \sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right]$$

$$I = \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + x\sqrt{a^2 - x^2} - I$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x \in (-a; a) & \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ dx = a\cos t\, dt & t = \arcsin\frac{x}{a} & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int a^2\cos^2 t\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right) + c = \frac{a^2 t}{2} + \frac{2a^2 \sin t \cos t}{4} + c$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a\sin t \cdot a\cos t}{2} + c$$

$$= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{-x\cdot x\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = \sqrt{a^2-x^2} \end{array}\right]$$

$$I = \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - I,$$

t. j. rovnica s neznámym parametrom I: $2I = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c \qquad a > 0$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ dx = a\cos t\,dt & t = \arcsin\frac{x}{a} & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \quad = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array}\right] = \int a^2\cos^2 t\,dt$$

$$= a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right) + c = \frac{a^2 t}{2} + \frac{2a^2\sin t\cos t}{4} + c$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a\sin t\cdot a\cos t}{2} + c = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c,\ x\in\langle -a;a\rangle,\ c\in R.$$

$$= \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int\frac{-x\cdot x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = \sqrt{a^2-x^2} \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - I,$$

t. j. rovnica s neznámym parametrom I: $2I = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\Rightarrow\quad I = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c,\ x\in(-a;a),\ c\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\quad a > 0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a \sinh t\, dt & t = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a \sinh t \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\quad a > 0$

$\boxed{x \geq a > 0}$ $= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a \sinh t\, dt & t = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a \sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\, dt$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $a > 0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{ll|l|l|l} \text{Subst.} & x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ & dx = a \sinh t\, dt & t = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a \sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\, dt$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x \qquad a > 0$$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,\mathrm{d}t = a^2 \left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} - \frac{t}{2} \right) + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad a > 0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} - \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\quad a > 0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a\sinh t\, dt & t = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\, dt = a^2 \left(\frac{\sinh 2t}{2 \cdot 2} - \frac{t}{2} \right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a \sinh t \cdot a \cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ $\qquad a > 0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a\sinh t\,dt & t = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = a^2\Big(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} - \frac{t}{2}\Big) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t \cdot a\cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ $\qquad a > 0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a \sinh t\,dt & t = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a \sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = a^2 \left(\frac{\sinh 2t}{2 \cdot 2} - \frac{t}{2} \right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a \sinh t \cdot a \cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} + c_1$$

$x \leq -a < 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x = -t & x \in (-\infty; -a\rangle \\ dx = -\,dt & t \in \langle a; \infty) \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad a > 0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} - \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t \cdot a\cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1$$

$x \leq -a < 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\quad x = -t & x \in (-\infty; -a\rangle \\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t & t \in \langle a; \infty) \end{array} \right] = -\int \sqrt{t^2 - a^2}\,\mathrm{d}t$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $a > 0$

$x \geq a > 0$ $= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a; \infty) & \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a \sinh t\, dt & t = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} & t \in \langle 0; \infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a \sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\, dt$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\, dt = a^2 \left(\frac{\sinh 2t}{2 \cdot 2} - \frac{t}{2} \right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a \sinh t \cdot a \cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} + c_1$$

$x \leq -a < 0$ $= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad x = -t & x \in (-\infty; -a\rangle \\ dx = -dt & t \in \langle a; \infty) \end{array} \right] = -\int \sqrt{t^2 - a^2}\, dt = -\frac{t\sqrt{t^2 - a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{argcosh} \frac{t}{a} + c_1$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ $\qquad a>0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a\sinh t\,dt & t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & t \in \langle 0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} - \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t \cdot a\cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1$$

$$= \left[x+\sqrt{x^2-a^2} > 0 \;\middle|\; \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{(\tfrac{x}{a})^2 - 1}\right) = \ln\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right] = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - \ln a \right]$$

$x \leq -a < 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = -t & x \in (-\infty; -a\rangle \\ dx = -dt & t \in \langle a;\infty) \end{array} \right] = -\int \sqrt{t^2-a^2}\,dt = -\frac{t\sqrt{t^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{t}{a} + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} -\frac{t\sqrt{t^2-a^2}}{2} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} & \operatorname{argcosh}\frac{t}{a} = \operatorname{argcosh}\frac{-x}{a} = \ln\left(\frac{-x}{a} + \sqrt{(\tfrac{-x}{a})^2-1}\right) = \ln\left[\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}} - \frac{x}{a}\right] = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a} \\ x+\sqrt{x^2-a^2} < 0 & = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a}\,\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \ln\frac{x^2-a^2-x^2}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})} = \ln\frac{-a}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \ln a - \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ $\quad a>0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a\sinh t\,dt & t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & t \in \langle 0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2\sinh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} - \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t \cdot a\cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1$$

$$= \left[x+\sqrt{x^2-a^2} > 0 \;\middle|\; \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{(\tfrac{x}{a})^2-1}\right) = \ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right] = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - \ln a \right] = (*)$$

$x \leq -a < 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ x = -t & x \in (-\infty; -a\rangle \\ dx = -dt & t \in \langle a;\infty) \end{array} \right] = -\int \sqrt{t^2-a^2}\,dt = -\frac{t\sqrt{t^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{t}{a} + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} -\frac{t\sqrt{t^2-a^2}}{2} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} & \operatorname{argcosh}\frac{t}{a} = \operatorname{argcosh}\frac{-x}{a} = \ln\left(\frac{-x}{a}+\sqrt{(\frac{-x}{a})^2-1}\right) = \ln\left[\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}} - \frac{x}{a}\right] = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a} \\ x+\sqrt{x^2-a^2} < 0 & = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a}\,\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \ln\frac{x^2-a^2-x^2}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})} = \ln\frac{-a}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \ln a - \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \end{array} \right] = (*)$$

$$(*) = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{a^2\ln a}{2} + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ $\qquad a>0$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x\in\langle a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ dx = a\sinh t\,dt & t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & t\in\langle 0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2\sinh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} - \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t\cdot a\cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1$$

$$= \left[x+\sqrt{x^2-a^2} > 0 \;\Big|\; \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{(\tfrac{x}{a})^2-1}\right) = \ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right] = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - \ln a \right] = (*)$$

$x \leq -a < 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = -t & x\in(-\infty;-a\rangle \\ dx = -dt & t\in\langle a;\infty) \end{array} \right] = -\int \sqrt{t^2-a^2}\,dt = -\frac{t\sqrt{t^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{t}{a} + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} -\frac{t\sqrt{t^2-a^2}}{2} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} & \operatorname{argcosh}\frac{t}{a} = \operatorname{argcosh}\frac{-x}{a} = \ln\left(\frac{-x}{a}+\sqrt{(\frac{-x}{a})^2-1}\right) = \ln\left[\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}-\frac{x}{a}\right] = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a} \\ x+\sqrt{x^2-a^2} < 0 & = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a}\,\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \ln\frac{x^2-a^2-x^2}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})} = \ln\frac{-a}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \ln a - \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \end{array} \right] = (*)$$

$$(*) = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{a^2\ln a}{2} + c_1 = \left[\begin{array}{c} c = c_1 + \frac{a^2\ln a}{2} \\ c\in R,\; c_1\in R \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c \qquad a>0$$

$x \geq a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a} & x \in \langle a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} \\ dx = a\sinh t\,dt & t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & t \in \langle 0;\infty) & = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int a^2 \sinh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} - \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} - \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t \cdot a\cosh t}{2} - \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1$$

$$= \left[x+\sqrt{x^2-a^2} > 0 \;\middle|\; \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{(\tfrac{x}{a})^2-1}\right) = \ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}\right] = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - \ln a \right] = (*)$$

$x \leq -a < 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } x = -t & x \in (-\infty; -a\rangle \\ dx = -dt & t \in \langle a;\infty) \end{array} \right] = -\int \sqrt{t^2-a^2}\,dt = -\frac{t\sqrt{t^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{t}{a} + c_1$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} -\frac{t\sqrt{t^2-a^2}}{2} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} & \operatorname{argcosh}\frac{t}{a} = \operatorname{argcosh}\frac{-x}{a} = \ln\left(\frac{-x}{a}+\sqrt{(\frac{-x}{a})^2-1}\right) = \ln\left[\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}} - \frac{x}{a}\right] = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a} \\ x+\sqrt{x^2-a^2} < 0 & = \ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{a}\,\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \ln\frac{x^2-a^2-x^2}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})} = \ln\frac{-a}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \ln a - \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \end{array} \right] = (*)$$

$$(*) = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{a^2\ln a}{2} + c_1 = \left[\begin{array}{l} c = c_1 + \frac{a^2\ln a}{2} \\ c \in R,\ c_1 \in R \end{array} \right]$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c,\ x \in (-\infty;-a\rangle \cup \langle a;\infty),\ c \in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, \mathrm{d}x$ $\quad a > 0$

$$= \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, \mathrm{d}x$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\quad a > 0$

$$= \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{x \cdot x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ $\quad a > 0$

$$= \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{x \cdot x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} & v = \sqrt{x^2 - a^2} \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

$$= \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{x \cdot x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} & v = \sqrt{x^2 - a^2} \end{array} \right] = \left[x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \right] - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

$$I = \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{x \cdot x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} & v = \sqrt{x^2 - a^2} \end{array}\right] = \left[x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx\right] - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \qquad a > 0$

$$I = \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{x \cdot x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} & v = \sqrt{x^2 - a^2} \end{array} \right] = \left[x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \right] - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

t. j. rovnica s neznámym parametrom I: $2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

$$= \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{x \cdot x\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} & v = \sqrt{x^2 - a^2} \end{array} \right] = \left[x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \right] - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

t. j. rovnica s neznámym parametrom I: $2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c \qquad a>0$$

$$=\int\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-\int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-\int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} & v=\sqrt{x^2-a^2}\end{array}\right]=\left[x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx\right]-\int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-I-\int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

t. j. rovnica s neznámym parametrom I: $2I=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$\Rightarrow\quad I=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,$$

$$x\in(-\infty;a)\cup(a;\infty),\ c\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\quad a>0$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\quad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t \in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\qquad a>0$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & \quad =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]=\int a^2\cosh^2 t\,dt$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad a>0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int a^2 \cosh^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t + 1}{2}\,\mathrm{d}t$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\qquad a>0$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]=\int a^2\cosh^2 t\,dt$$

$$=a^2\int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt=a^2\Big(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2}+\frac{t}{2}\Big)+c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int a^2 \cosh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} + \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t\cosh t}{4} + \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\qquad a>0$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x=a\sinh t & \sinh t=\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx=a\cosh t\,dt & t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & \quad =a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t \end{array}\right]=\int a^2\cosh^2 t\,dt$$

$$=a^2\int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt=a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2}+\frac{t}{2}\right)+c_1=\frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4}+\frac{a^2t}{2}+c_1$$

$$=\frac{a\sinh t\cdot a\cosh t}{2}+\frac{a^2t}{2}+c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\qquad a>0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int a^2\cosh^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} + \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4} + \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t\cdot a\cosh t}{2} + \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\quad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t \in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int a^2\cosh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t + 1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} + \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} + \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t \cdot a\cosh t}{2} + \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\qquad a > 0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.} \quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x \in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} \\ \quad dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh} \frac{x}{a} & t \in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int a^2 \cosh^2 t\,dt$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt = a^2 \left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} + \frac{t}{2} \right) + c_1 = \frac{2a^2 \sinh t \cosh t}{4} + \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t \cdot a\cosh t}{2} + \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{argsinh} \frac{x}{a} + c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} \right) + c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}} \right] + c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\quad a>0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int a^2\cosh^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2}+\frac{t}{2}\right)+c_1 = \frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4}+\frac{a^2 t}{2}+c_1$$

$$= \frac{a\sinh t\cdot a\cosh t}{2}+\frac{a^2 t}{2}+c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right]+c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\qquad a>0$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int a^2\cosh^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2}+\frac{t}{2}\right)+c_1 = \frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4}+\frac{a^2 t}{2}+c_1$$

$$= \frac{a\sinh t\cdot a\cosh t}{2}+\frac{a^2 t}{2}+c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right]+c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\frac{a^2\ln a}{2}+c_1$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\qquad a>0$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ \quad dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int a^2\cosh^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt = a^2\Big(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2}+\frac{t}{2}\Big)+c_1 = \frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4}+\frac{a^2 t}{2}+c_1$$

$$= \frac{a\sinh t\cdot a\cosh t}{2}+\frac{a^2 t}{2}+c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\Big(\frac{x}{a}+\sqrt{\big(\tfrac{x}{a}\big)^2+1}\Big)+c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\Big[\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\Big]+c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\big(x+\sqrt{x^2+a^2}\big)-\frac{a^2\ln a}{2}+c_1 = \left[\begin{array}{c} c = c_1+\frac{a^2\ln a}{2} \\ c\in R,\ c_1\in R \end{array} \right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c \qquad a>0$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \text{Subst.}\quad x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ dx = a\cosh t\,dt & t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & t\in R & = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array}\right] = \int a^2\cosh^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \frac{\cosh 2t+1}{2}\,dt = a^2\left(\frac{\sinh 2t}{2\cdot 2} + \frac{t}{2}\right) + c_1 = \frac{2a^2\sinh t\cosh t}{4} + \frac{a^2 t}{2} + c_1$$

$$= \frac{a\sinh t\cdot a\cosh t}{2} + \frac{a^2 t}{2} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right) + c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}\right] + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + c_1$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \frac{a^2\ln a}{2} + c_1 = \left[\begin{array}{c} c = c_1 + \frac{a^2\ln a}{2} \\ c\in R,\ c_1\in R \end{array}\right]$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

$$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

$$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x \cdot x\, dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $\qquad a > 0$

$$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right]$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad a > 0$

$$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right] = \left[x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right] + \int \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx$ $\qquad a > 0$

$$I = \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x\cdot x\, dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \sqrt{x^2+a^2} \end{array} \right] = \left[x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\, dx \right] + \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2\, dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \qquad a > 0$

$$I = \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right] = \left[x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx\right] + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

t. j. rovnica s neznámym parametrom I: $2I = x\sqrt{x^2+a^2} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Integrály iracionálnych funkcií II

$$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \qquad a > 0$$

$$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right] = \left[x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx\right] + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

t. j. rovnica s neznámym parametrom I: $2I = x\sqrt{x^2+a^2} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Integrály iracionálnych funkcií II

$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$ $\qquad a > 0$

$$= \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{x\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} & v = \sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right] = \left[x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx\right] + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

t. j. rovnica s neznámym parametrom I: $2I = x\sqrt{x^2+a^2} + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c,$$

$$x \in (-\infty; a) \cup (a; \infty), \; c \in R.$$

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$.

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$.

UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia] $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$.

UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia] $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

$x \neq \pi + 2k\pi$, $\quad t \in (-\infty; \infty)$, $\quad \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, $\quad x = 2 \operatorname{arctg} t$,

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$.

UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia] $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

$x \neq \pi + 2k\pi$, $t \in (-\infty; \infty)$, $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$,

$\sin x$

$\cos x$

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$.

UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia] $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

$x \neq \pi + 2k\pi$, $\quad t \in (-\infty; \infty)$, $\quad \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, $\quad x = 2 \operatorname{arctg} t$, $\quad dx = \frac{2\, dt}{t^2+1}$,

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$.

UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia] $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

$x \neq \pi + 2k\pi$, $t \in (-\infty; \infty)$, $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2\, dt}{t^2+1}$,

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}$$

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$.

UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia] $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi)$, $k \in Z$.

$x \neq \pi+2k\pi$, $\quad t \in (-\infty; \infty)$, $\quad \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, $\quad x = 2\operatorname{arctg} t$, $\quad dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$,

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$.

UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia] $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

$x \neq \pi + 2k\pi$, $\quad t \in (-\infty; \infty)$, $\quad \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}$, $\quad x = 2 \operatorname{arctg} t$, $\quad dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$,

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$$

Integrály goniometrických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické ale väčšinou prácne.
- Ak integrand obsahuje iba goniometrické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna goniometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$.

UGS [Univerzálna goniometrická substitúcia] $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$.

$$x \neq \pi + 2k\pi, \quad t \in (-\infty; \infty), \quad \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{t^2+1},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \text{tg}\,\frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ t \in (-\infty; 0) & \sin x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2}{t^2+1} & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in (0; \infty) & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ t \in (-\infty; 0) & \sin x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2}{t^2+1} & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in (0; \infty) & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi) & \sin x \neq 0,\ k \in Z \\ dt = \frac{dx}{2} & t \in (0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}) & x \neq k\pi,\ t \neq \frac{k\pi}{2} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1 - \cos^2 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ t \in (-\infty; 0) & \sin x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2}{t^2+1} & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in (0; \infty) & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi) & \sin x \neq 0,\ k \in Z \\ dt = \frac{dx}{2} & t \in (0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}) & x \neq k\pi,\ t \neq \frac{k\pi}{2} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\sin t \cos t}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt}{\sin t \cos t}$$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1 - \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi) & \sin x \neq 0 \\ dt = -\sin x\,dx & t \in (-1; 1) & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{dx}{\sin x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ t \in (-\infty; 0) & \sin x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2}{t^2+1} & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in (0; \infty) & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c_1$$

$$= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi) & \sin x \neq 0,\ k \in Z \\ dt = \frac{dx}{2} & t \in (0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}) & x \neq k\pi,\ t \neq \frac{k\pi}{2} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\sin t \cos t}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin t} - \int \frac{-\sin t\,dt}{\cos t}$$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1 - \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi) & \sin x \neq 0 \\ dt = -\sin x\,dx & t \in (-1; 1) & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{-dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{dx}{\sin x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ t \in (-\infty; 0) & \sin x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2}{t^2+1} & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in (0; \infty) & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c_1$$

$$= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi) & \sin x \neq 0,\ k \in Z \\ dt = \frac{dx}{2} & t \in (0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}) & x \neq k\pi,\ t \neq \frac{k\pi}{2} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\sin t \cos t}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin t} - \int \frac{-\sin t\,dt}{\cos t} = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + c_1$$

$$= \ln|\operatorname{tg} t| + c_1$$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1 - \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi) & \sin x \neq 0 \\ dt = -\sin x\,dx & t \in (-1; 1) & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{-dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x\in(-\pi+2k\pi;0+2k\pi),\ t\in(-\infty;0) & \sin x\neq 0 \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x=\frac{2}{t^2+1} & x\in(0+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in(0;\infty) & x\neq k\pi,\ k\in Z \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x\in R-\{k\pi,\ k\in Z\},\ c_1\in R.$$

$$= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t=\frac{x}{2} & x\in(0+k\pi;\pi+k\pi) & \sin x\neq 0,\ k\in Z \\ dt=\frac{dx}{2} & t\in(0+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}) & x\neq k\pi,\ t\neq\frac{k\pi}{2} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\sin t\cos t}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt}{\sin t\cos t} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin t} - \int \frac{-\sin t\,dt}{\cos t} = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + c_1$$

$$= \ln|\operatorname{tg} t| + c_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x\in R-\{k\pi,\ k\in Z\},\ c_1\in R.$$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t=\cos x & x\in(0+k\pi;\pi+k\pi) & \sin x\neq 0 \\ dt=-\sin x\,dx & t\in(-1;1) & x\neq k\pi,\ k\in Z \end{array}\right] = \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c_2,$$

$$x\in R-\{k\pi,\ k\in Z\},\ c_2\in R.$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-\infty; 1) & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right),\ t \in (1; \infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-1; 1) & \cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ t \neq \pm 1 \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{dx}{\cos x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-\infty; 1) & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right),\ t \in (1; \infty) \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-1; 1) & \cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ t \neq \pm 1 \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{dx}{\cos x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-\infty; 1) & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right),\ t \in (1; \infty) \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-1; 1) & \cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ t \neq \pm 1 \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} = -\int \frac{2\,dt}{t^2-1}$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \sin x & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right) & \cos x \neq 0 \\ dt = \cos x\,dx & t \in (-1; 1) & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x \in \left(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t \in (-\infty; 1) & x \in \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right),\ t \in (1; \infty) \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t \in (-1; 1) & \cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in Z,\ t \neq \pm 1 \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} = -\int \frac{2\,dt}{t^2-1} = -\frac{2}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t = \sin x & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right) & \cos x \neq 0 \\ dt = \cos x\,dx & t \in (-1; 1) & x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in Z \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{1-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-1}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-\infty; 1) & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right),\ t \in (1; \infty) \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-1; 1) & \cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ t \neq \pm 1 \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} = -\int \frac{2\,dt}{t^2-1} = -\frac{2}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c_1 = \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + c_1$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin x & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right) & \cos x \neq 0 \\ \quad dt = \cos x\,dx & t \in (-1; 1) & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{1-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c_2 = -\frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t} + c_2$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + c_2$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x\in\left(-\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(-\infty;1) & x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right),\ t\in(1;\infty) \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(-1;1) & \cos x\neq 0,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ t\neq\pm 1 \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} = -\int \frac{2\,dt}{t^2-1} = -\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1 = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c_1 = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + c_1,$$

$$x\in R - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \pi+2k\pi,\ k\in Z\right\},\ c_1\in R.$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sin x & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right) & \cos x\neq 0 \\ dt=\cos x\,dx & t\in(-1;1) & x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{dt}{1-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = -\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c_2$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c_2,\ x\in R - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\},\ c_2\in R.$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{dx}{1+\sin x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x \in \left(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t \in (-\infty; -1) & \sin x \neq -1,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right),\ t \in (-1; \infty) & x \neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{dx}{1+\sin x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x \in \left(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t \in (-\infty; -1) & \sin x \neq -1,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right),\ t \in (-1; \infty) & x \neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{1-\sin^2 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & x \in \left(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t \in (-\infty; -1) & \sin x \neq -1,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right),\ t \in (-1; \infty) & x \neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2}$$

$$= \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos^2 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & x \in \left(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t \in (-\infty; -1) & \sin x \neq -1,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right),\ t \in (-1; \infty) & x \neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\quad u = t+1 & t \in (-\infty; -1),\ u \in (-\infty; 0) \\ du = dt & x \in (-1; \infty),\ t \in (0; \infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t=\text{tg}\,\frac{x}{2} & x\in\left(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(-\infty;-1) & \sin x\neq -1,\ k\in Z \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right),\ t\in(-1;\infty) & x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\quad u=t+1 & t\in(-\infty;-1),\ u\in(-\infty;0) \\ du=dt & x\in(-1;\infty),\ t\in(0;\infty) \end{array} \right] = 2\int \frac{du}{u^2} = 2\int u^{-2}\,du$$

$$= \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\cos x & x\in\left\langle 0+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(0;1\rangle & x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right\rangle,\ t\in\langle -1;0) & \cos x\neq 0 \\ dt=-\sin x\,dx & x\in\left\langle \pi+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in\langle -1;0) & x\in\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right\rangle,\ t\in(0;1\rangle & x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{dx}{1+\sin x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x\in\left(-\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(-\infty;-1) & \sin x\neq -1,\ k\in Z \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right),\ t\in(-1;\infty) & x\neq-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\quad u=t+1 & t\in(-\infty;-1),\ u\in(-\infty;0) \\ \qquad du=dt & x\in(-1;\infty),\ t\in(0;\infty) \end{array} \right] = 2\int \frac{du}{u^2} = 2\int u^{-2}\,du$$

$$= 2\frac{u^{-1}}{-1} + c_1$$

$$= \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\cos x & x\in\left\langle 0+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(0;1\rangle & x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right\rangle,\ t\in\langle -1;0) & \cos x\neq 0 \\ \quad dt=-\sin x\,dx & x\in\left\langle \pi+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in\langle -1;0) & x\in\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right\rangle,\ t\in(0;1\rangle & x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int t^{-2}\,dt$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x\in\left(-\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(-\infty;-1) & \sin x\neq-1,\ k\in Z \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right),\ t\in(-1;\infty) & x\neq-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right]=\int\frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$=\int\frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}}=\int\frac{2\,dt}{(t+1)^2}=\left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\quad u=t+1 & t\in(-\infty;-1),\ u\in(-\infty;0) \\ \quad du=dt & x\in(-1;\infty),\ t\in(0;\infty) \end{array}\right]=2\int\frac{du}{u^2}=2\int u^{-2}\,du$$

$$=2\frac{u^{-1}}{-1}+c_1=c_1-\frac{2}{u}=c_1-\frac{2}{t+1}$$

$$=\int\frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\int\frac{(1-\sin x)\,dx}{1-\sin^2 x}=\int\frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{-\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\cos x & x\in\left\langle 0+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(0;1\rangle & x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right\rangle,\ t\in\langle-1;0) & \cos x\neq 0 \\ \quad dt=-\sin x\,dx & x\in\left\langle\pi+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in\langle-1;0) & x\in\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right\rangle,\ t\in(0;1\rangle & x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \end{array}\right]$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dt}{t^2}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int t^{-2}\,dt=\operatorname{tg}x+\frac{t^{-1}}{-1}+c_2=\operatorname{tg}x-\frac{1}{t}+c_2$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = c_1 - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UGS:} & t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x\in\left(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(-\infty;-1) & \sin x\neq -1,\ k\in Z \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right),\ t\in(-1;\infty) & x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u=t+1 & t\in(-\infty;-1),\ u\in(-\infty;0) \\ du=dt & x\in(-1;\infty),\ t\in(0;\infty) \end{array} \right] = 2\int \frac{du}{u^2} = 2\int u^{-2}\,du$$

$$= 2\frac{u^{-1}}{-1} + c_1 = c_1 - \frac{2}{u} = c_1 - \frac{2}{t+1} = c_1 - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1},$$

$$x\in R - \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \pi+2k\pi,\ k\in Z\right\},\ c_1\in R.$$

$$= \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\left\langle 0+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in(0;1\rangle & x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right\rangle,\ t\in\langle -1;0) & \cos x\neq 0 \\ dt=-\sin x\,dx & x\in\left\langle \pi+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ t\in\langle -1;0) & x\in\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right\rangle,\ t\in(0;1\rangle & x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int t^{-2}\,dt = \operatorname{tg} x + \frac{t^{-1}}{-1} + c_2 = \operatorname{tg} x - \frac{1}{t} + c_2$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} + c_2 = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + c_2,\ x\in R - \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\},\ c_2\in R.$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & x \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi),\ t \in R \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \cos x \neq -1,\ x \neq \pi+2k\pi,\ k \in Z \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} & t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & x \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi),\ t \in R \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \cos x \neq -1,\ x \neq \pi+2k\pi,\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}}$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t = \frac{x}{2} & x \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi) & \cos x \neq -1,\ k \in Z \\ dt = \frac{dx}{2} & t \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right) & x \neq \pi+2k\pi \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \sin x & x \in \left(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ t \in \langle -1; 0) & x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; 0+2k\pi\right),\ t \in \langle -1; 0) & \sin x \neq 0 \\ dt = \cos x\,dx & x \in \left(0+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ t \in (0; 1\rangle & x \in \left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\right),\ t \in (0; 1\rangle & x \neq k\pi,\ k \in Z \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} & t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \cos x\neq -1,\ x\neq \pi+2k\pi,\ k\in Z \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int dt$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t=\frac{x}{2} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi) & \cos x\neq -1,\ k\in Z \\ dt=\frac{dx}{2} & t\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right) & x\neq\pi+2k\pi \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sin x & x\in\left(-\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ t\in\langle -1;0) & x\in\left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi;0+2k\pi\right),\ t\in\langle -1;0) & \sin x\neq 0 \\ dt=\cos x\,dx & x\in\left(0+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ t\in(0;1\rangle & x\in\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right),\ t\in(0;1\rangle & x\neq k\pi,\ k\in Z \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int t^{-2}\,dt$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} & t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \cos x\neq -1,\ x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int dt$$

$$= t + c_1$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\frac{x}{2} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi) & \cos x\neq -1,\ k\in Z \\ dt=\frac{dx}{2} & t\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right) & x\neq\pi+2k\pi \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + c$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sin x & x\in\left(-\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ t\in\langle -1;0) & x\in\left\langle-\frac{\pi}{2}+2k\pi;0+2k\pi\right),\ t\in\langle -1;0) & \sin x\neq 0 \\ dt=\cos x\,dx & x\in\left(0+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ t\in(0;1\rangle & x\in\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right),\ t\in(0;1\rangle & x\neq k\pi,\ k\in Z \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int t^{-2}\,dt = -\operatorname{cotg} x - \frac{t^{-1}}{-1} + c_2 = \frac{1}{t} - \operatorname{cotg} x + c_2$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1 = \frac{1-\cos x}{\sin x} + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} & t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \cos x\neq -1,\ x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int dt$$

$$= t + c_1 = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x\in R - \{\pi+2k\pi,\ k\in Z\},\ c_1\in R.$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\frac{x}{2} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi) & \cos x\neq -1,\ k\in Z \\ dt=\frac{dx}{2} & t\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right) & x\neq\pi+2k\pi \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + c$$

$$= \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_1,\ x\in R - \{\pi+2k\pi,\ k\in Z\},\ c_1\in R.$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sin x & x\in\left(-\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ t\in\langle -1;0) & x\in\left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi;0+2k\pi\right),\ t\in\langle -1;0) & \sin x\neq 0 \\ dt=\cos x\,dx & x\in\left(0+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ t\in(0;1\rangle & x\in\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right),\ t\in(0;1\rangle & x\neq k\pi,\ k\in Z \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int t^{-2}\,dt = -\operatorname{cotg} x - \frac{t^{-1}}{-1} + c_2 = \frac{1}{t} - \operatorname{cotg} x + c_2$$

$$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} + c_2 = \frac{1-\cos x}{\sin x} + c_2,\ x\in R - \{\pi+k\pi,\ k\in Z\},\ c_1\in R.$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi ; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

$$=\int \frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS:}\ \ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R,\ k\in Z \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}\right]\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}=\int \frac{2\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\,dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}}$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2 \frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\, dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2 \int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\, dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}$$

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS:} \ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi), \ t \in R, \ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2 \frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3} \, dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2 \int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1) \, dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie.

Integrály goniometrických funkcií

$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2\,\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\, dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2\int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\, dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2\,\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\, dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2\int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\, dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x\, dx}{1+\cos^2 2x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

$$=\int \frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R,\ k\in Z \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}\right]\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2\,\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\,dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2\int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\,dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$=\left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+1-\sin^2 2x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2\, \frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\, dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2 \int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\, dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin 2x & x \in \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle,\ t \in \langle -1; 1 \rangle & x \in R \\ dt = 2\cos 2x & x \in \langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi \rangle,\ t \in \langle -1; 1 \rangle & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\, dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2\int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\, dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x\, dx}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\, dx}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \sin 2x & x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle,\ t \in \langle -1; 1 \rangle & x \in R \\ dt = 2\cos 2x & x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\rangle,\ t \in \langle -1; 1 \rangle & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int \frac{dt}{2-t^2}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

$$=\int \frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\left[\begin{array}{r|l|l}\text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R,\ k\in Z\\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R\end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}\right]\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}=\int \frac{2\,\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\,dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}}=2\int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\,dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}=\cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$=\left[\begin{array}{l}\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\\ \qquad =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2}\end{array}\right]=\int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+\cos^2 2x}=\int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l}\text{Subst. } t=\sin 2x & x\in\langle-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\rangle,\ t\in\langle-1;1\rangle & x\in R\\ dt=2\cos 2x & x\in\langle\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\rangle,\ t\in\langle-1;1\rangle & t\in\langle-1;1\rangle\end{array}\right]=\int \frac{dt}{2-t^2}=-\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

$$=\int \frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R,\ k\in Z \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}\right]\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}=\int \frac{2\,\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\,dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}}=2\int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\,dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}=\cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$=\left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right]=\int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+\cos^2 2x}=\int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t=\sin 2x & x\in\left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ t\in\langle -1;1\rangle & x\in R \\ dt=2\cos 2x & x\in\left\langle \frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\rangle,\ t\in\langle -1;1\rangle & t\in\langle -1;1\rangle \end{array}\right]=\int \frac{dt}{2-t^2}=-\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+c$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2 \frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\, dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2 \int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\, dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x\, dx}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\, dx}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \sin 2x & x \in \langle -\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi \rangle,\ t \in \langle -1; 1 \rangle & x \in R \\ dt = 2\cos 2x & x \in \langle \frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{3\pi}{4}+k\pi \rangle,\ t \in \langle -1; 1 \rangle & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int \frac{dt}{2-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + c = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t} + c$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS:} \;\; t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x + \cos^4 x > 0 \text{ pre všetky } x \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right] \frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2\, \frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\, dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2 \int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\, dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x\, dx}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\, dx}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.} \quad t = \sin 2x & x \in \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle,\ t \in \langle -1; 1 \rangle & x \in R \\ dt = 2\cos 2x & x \in \langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi \rangle,\ t \in \langle -1; 1 \rangle & t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int \frac{dt}{2-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + c = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + c$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x} + c$$

$$= \int \frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R,\ k\in Z \\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & \sin^4 x+\cos^4 x>0 \text{ pre všetky } x\in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\left[\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}\right]\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{2\,\frac{1-6t^2+t^4}{(t^2+1)^3}\,dt}{\frac{16t^4+1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8}{(t^2+1)^4}} = 2\int \frac{(1-2t^2+t^4-4t^2)(t^2+1)\,dt}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1} = \cdots$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme najprv upraviť.

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+\cos^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+1-\sin^2 2x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t=\sin 2x & x\in\langle-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\rangle,\ t\in\langle-1;1\rangle & x\in R \\ dt=2\cos 2x & x\in\langle\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\rangle,\ t\in\langle-1;1\rangle & t\in\langle-1;1\rangle \end{array} \right] = \int \frac{dt}{2-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ du = 2\, dx & u \in R \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\\ \quad =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2}\end{array}\right]=\int\frac{2\cos 2x\,dx}{1+\cos^2 2x}=\left[\begin{array}{rl|l}\text{Subst.} & u=2x & x\in R\\ & du=2\,dx & u\in R\end{array}\right]$$

$$=\int\frac{\cos u\,du}{1+\cos^2 u}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad u = 2x & x \in R \\ du = 2\, dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & u \neq \pi + 2k\pi, \; k \in Z \\ dx = \frac{2\, dt}{t^2+1} & \multicolumn{2}{l}{u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi), \; t \in R} \end{array} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

$$=\left[\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\tfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \tfrac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\tfrac{2+2\cos^2 2x}{4}=\tfrac{1+\cos^2 2x}{2}\right]=\int\frac{2\cos 2x\,dx}{1+\cos^2 2x}=\left[\text{Subst. } u=2x,\ du=2\,dx \,\middle|\, x\in R,\ u\in R\right]$$

$$=\int\frac{\cos u\,du}{1+\cos^2 u}=\left[\text{UGS: } t=\operatorname{tg}\tfrac{u}{2},\ dx=\tfrac{2\,dt}{t^2+1} \,\middle|\, \cos u=\tfrac{1-t^2}{t^2+1} \,\middle|\, u\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z,\ u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R\right]=\int\frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\,\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$=\int\frac{\frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad u = 2x & x \in R \\ du = 2\, dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & u \neq \pi + 2k\pi, \; k \in Z \\ dx = \frac{2\, dt}{t^2+1} & \multicolumn{2}{l}{u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi), \; t \in R} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \, \frac{2\, dt}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{t^4 + 2t^2 + 1 + 1 - 2t^2 + t^4}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\text{Subst.} \ \begin{array}{r|l} u=2x & x\in R \\ du=2\,dx & u\in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & u\neq \pi+2k\pi, \ k\in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \multicolumn{2}{l}{u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi), \ t\in R} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\,\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{2t^4+2}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4+1}$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad u = 2x & x \in R \\ du = 2\,dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & u \neq \pi + 2k\pi, \ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \multicolumn{2}{l}{u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi), \ t \in R} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \frac{2\,dt}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{t^4 + 2t^2 + 1 + 1 - 2t^2 + t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{2t^4+2}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right] dt$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\\ \quad =\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2}\end{array}\right]=\int\frac{2\cos 2x\,dx}{1+\cos^2 2x}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\quad u=2x & x\in R\\ du=2\,dx & u\in R\end{array}\right]$$

$$=\int\frac{\cos u\,du}{1+\cos^2 u}=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{UGS:}\quad t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & \cos u=\frac{1-t^2}{t^2+1} & u\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z\\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1} & \multicolumn{2}{l}{u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ t\in R}\end{array}\right]=\int\frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\,\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$=\int\frac{\frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}=\int\frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2}=\int\frac{2(1-t^2)\,dt}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4}=\int\frac{2(1-t^2)\,dt}{2t^4+2}$$

$$=\int\frac{(1-t^2)\,dt}{t^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right|-\ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right|\right]+c$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } u = 2x & x \in R \\ du = 2\, dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & u \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\, dt}{t^2+1} & \multicolumn{2}{l}{u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \frac{2\, dt}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{t^4 + 2t^2 + 1 + 1 - 2t^2 + t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{2t^4 + 2}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left| t^2 + \sqrt{2}t + 1 \right| - \ln \left| t^2 - \sqrt{2}t + 1 \right| \right] + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right| + c$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.} \quad u = 2x & x \in R \\ du = 2\,dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg}\frac{u}{2} & \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & u \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \multicolumn{2}{l}{u \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi),\ t \in R} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \, \frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{2t^4+2}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| - \ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right| \right] + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c$$

$$= \left[t^2 \pm \sqrt{2}t + 1 = \left(t \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} > 0 \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad u = 2x & x \in R \\ du = 2\, dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & u \neq \pi + 2k\pi, \ k \in Z \\ dx = \frac{2\, dt}{t^2+1} & \multicolumn{2}{l}{u \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi), \ t \in R} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \frac{2\, dt}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{2t^4+2}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left| t^2+\sqrt{2}t+1 \right| - \ln \left| t^2-\sqrt{2}t+1 \right| \right] + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right| + c$$

$$= \left[t^2 \pm \sqrt{2}t + 1 = \left(t \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} > 0 \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + c$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$= \left[\begin{matrix} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{matrix} \right] = \int \frac{2\cos 2x\, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{matrix} \text{Subst.} \quad u = 2x \\ du = 2\, dx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \in R \\ u \in R \end{matrix} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u\, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{matrix} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} \\ dx = \frac{2\, dt}{t^2+1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} \\ u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\ t \in R \end{matrix} \middle| \ u \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \frac{2\, dt}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{2t^4+2}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left| t^2+\sqrt{2}t+1 \right| - \ln \left| t^2-\sqrt{2}t+1 \right| \right] + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right| + c$$

$$= \left[t^2 \pm \sqrt{2}t + 1 = (t \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + \tfrac{1}{2} > 0 \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + c = \left[t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \operatorname{tg} \frac{2x}{2} = \operatorname{tg} x \middle| \begin{matrix} u \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \end{matrix} \right]$$

Integrály goniometrických funkcií

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1} + c$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2\cos 2x \, dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad u = 2x & x \in R \\ du = 2\, dx & u \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cos u \, du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UGS:} \quad t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} & \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & u \neq \pi + 2k\pi, \ k \in Z \\ dx = \frac{2\, dt}{t^2+1} & u \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi), \ t \in R & \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \frac{2\, dt}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{(t^2+1)^2 + (1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{t^4 + 2t^2 + 1 + 1 - 2t^2 + t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\, dt}{2t^4 + 2}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\, dt}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left| t^2 + \sqrt{2}t + 1 \right| - \ln \left| t^2 - \sqrt{2}t + 1 \right| \right] + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right| + c$$

$$= \left[t^2 \pm \sqrt{2}t + 1 = (t \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + \tfrac{1}{2} > 0 \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + c = \left[\begin{array}{l|l} t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \operatorname{tg} \frac{2x}{2} = \operatorname{tg} x & u \neq \pi + 2k\pi, \ k \in Z \\ & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1} + c, \ x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z \right\}, \ c \in R.$$

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \text{tgh}\, \frac{x}{2}$.

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$.

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

$t \in (-1; 1)$,

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

$t \in (-1; 1)$, $\quad dt = \frac{dx}{2\cosh^2 \frac{x}{2}}$,

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

$t \in (-1; 1)$, $\quad dt = \frac{dx}{2\cosh^2 \frac{x}{2}}$,

dx

$\sinh x$

$\cosh x$

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

$t \in (-1; 1)$, $\quad dt = \frac{dx}{2\cosh^2 \frac{x}{2}}$,

$$dx = 2\cosh^2 \frac{x}{2}\, dt$$

$$\sinh x = 2 \sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}$$

$$\cosh x = \cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2}$$

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

$t \in (-1; 1)$, $\quad dt = \frac{dx}{2\cosh^2 \frac{x}{2}}$,

$$dx = 2\cosh^2 \frac{x}{2}\, dt = \frac{2\cosh^2 \frac{x}{2}\, dt}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2} = \frac{2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cosh x = \cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}}$$

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\,dx$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

$t \in (-1; 1)$, $\quad dt = \frac{dx}{2\cosh^2\frac{x}{2}}$,

$$dx = 2\cosh^2\frac{x}{2}\,dt = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,dt}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}$$

$$\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}$$

$$\cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2} - \sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}$$

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x,\cosh x)\,\mathrm{d}x$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2}=\frac{e^x-1}{e^x+1},\ x\in R$.

$t\in(-1;1)$, $\quad \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}}$,

$$\mathrm{d}x=2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}$$

$$\sinh x=2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}=\frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cosh x=\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}=\frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Integrály hyperbolických funkcií

- Ak integrand obsahuje iba hyperbolické funkcie, na zracionalizovanie sa používa Univerzálna hyperbolická substitúcia $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$.

Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x)\, dx$.

UHS [Univerzálna hyperbolická substitúcia] $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in R$.

$t \in (-1; 1)$, $\quad dt = \frac{dx}{2\cosh^2 \frac{x}{2}}$,

$$dx = 2\cosh^2 \frac{x}{2}\, dt = \frac{2\cosh^2 \frac{x}{2}\, dt}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2\, dt}{1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\, dt}{1 - t^2},$$

$$\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2} = \frac{2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tgh} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2},$$

$$\cosh x = \cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}.$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sinh x}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$\int \frac{dx}{\sinh x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0),\ t \in (-1; 0) & \sinh x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & x \in (0; \infty),\ t \in (0; 1) & x \neq 0 \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\sinh x \, dx}{\sinh^2 x} = \int \frac{\sinh x \, dx}{\cosh^2 x - 1}$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x - e^{-x}}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t = \text{tgh}\,\frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0),\ t \in (-1; 0) & \sinh x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & x \in (0; \infty),\ t \in (0; 1) & x \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\sinh x\,dx}{\sinh^2 x} = \int \frac{\sinh x\,dx}{\cosh^2 x - 1} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \cosh x & x \in (-\infty; 0),\ t \in (1; \infty) & \sinh x \neq 0 \\ dt = \sinh x\,dx & x \in (0; \infty),\ t \in (1; \infty) & x \neq 0 \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x - e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t = e^x & x = \ln t & x \in (-\infty; 0),\ t \in (0; 1) & \sinh x \neq 0 \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & x \in (0; \infty),\ t \in (1; \infty) & x \neq 0 \end{array} \right]$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x\in(-\infty;0),\ t\in(-1;0) & \sinh x\neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & x\in(0;\infty),\ t\in(0;1) & x\neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \int \frac{\sinh x\,dx}{\sinh^2 x} = \int \frac{\sinh x\,dx}{\cosh^2 x - 1} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = \cosh x & x\in(-\infty;0),\ t\in(1;\infty) & \sinh x\neq 0 \\ dt = \sinh x\,dx & x\in(0;\infty),\ t\in(1;\infty) & x\neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x - e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t = e^x & x = \ln t & x\in(-\infty;0),\ t\in(0;1) & \sinh x\neq 0 \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & x\in(0;\infty),\ t\in(1;\infty) & x\neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{2\,dt}{t(t-\frac{1}{t})}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2-1}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0),\ t \in (-1; 0) & \sinh x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & x \in (0; \infty),\ t \in (0; 1) & x \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c_1$$

$$= \int \frac{\sinh x\,dx}{\sinh^2 x} = \int \frac{\sinh x\,dx}{\cosh^2 x - 1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t = \cosh x & x \in (-\infty; 0),\ t \in (1; \infty) & \sinh x \neq 0 \\ dt = \sinh x\,dx & x \in (0; \infty),\ t \in (1; \infty) & x \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} + c_2$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x - e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t = e^x & x = \ln t & x \in (-\infty; 0),\ t \in (0; 1) & \sinh x \neq 0 \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & x \in (0; \infty),\ t \in (1; \infty) & x \neq 0 \end{array} \right] = \int \frac{2\,dt}{t(t - \frac{1}{t})}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c_3$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} + c_2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + c_3$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0),\ t \in (-1; 0) & \sinh x \neq 0 \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & x \in (0; \infty),\ t \in (0; 1) & x \neq 0 \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c_1$$

$$= \ln\left|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}\right| + c_1,\ x \in R - \{0\},\ c_1 \in R.$$

$$= \int \frac{\sinh x\,dx}{\sinh^2 x} = \int \frac{\sinh x\,dx}{\cosh^2 x - 1} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = \cosh x & x \in (-\infty; 0),\ t \in (1; \infty) & \sinh x \neq 0 \\ dt = \sinh x\,dx & x \in (0; \infty),\ t \in (1; \infty) & x \neq 0 \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} + c_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} + c_2,\ x \in R - \{0\},\ c_2 \in R.$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x - e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x = \ln t & x \in (-\infty; 0),\ t \in (0; 1) & \sinh x \neq 0 \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & x \in (0; \infty),\ t \in (1; \infty) & x \neq 0 \end{array}\right] = \int \frac{2\,dt}{t\left(t - \frac{1}{t}\right)}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_3 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + c_3,\ x \in R - \{0\},\ c_3 \in R.$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cosh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0\rangle,\ t \in (-1; 0\rangle \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & x \in \langle 0; \infty),\ t \in \langle 0; 1) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cosh x \, dx}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x \, dx}{\sinh^2 x + 1}$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\, dx}{e^x + e^{-x}}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cosh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0\rangle,\ t \in (-1; 0\rangle \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & x \in \langle 0; \infty),\ t \in \langle 0; 1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\cosh x\,dx}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,dx}{\sinh^2 x + 1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} \quad t = \sinh x & x \in R \\ \quad dt = \cosh x\,dx & t \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x + e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t = e^x & x = \ln t & x \in R \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & t \in (0; \infty) \end{array} \right]$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cosh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0\rangle,\ t \in (-1; 0\rangle \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & x \in \langle 0; \infty),\ t \in \langle 0; 1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

$$= \int \frac{\cosh x\, dx}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x\, dx}{\sinh^2 x + 1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \sinh x & x \in R \\ dt = \cosh x\, dx & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x + e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x = \ln t & x \in R \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{2\,dt}{t(t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cosh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0\rangle,\ t \in (-1; 0\rangle \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & x \in \langle 0; \infty),\ t \in \langle 0; 1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + c_1$$

$$= \int \frac{\cosh x\, dx}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x\, dx}{\sinh^2 x + 1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\quad t = \sinh x & x \in R \\ dt = \cosh x\, dx & t \in R \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c_2$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x + e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t = e^x & x = \ln t & x \in R \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & t \in (0; \infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,dt}{t(t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

$$= 2 \operatorname{arctg} t + c_3$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = 2 \operatorname{arctg} \operatorname{tgh} \frac{x}{2} + c_1 = \operatorname{arctg} \sinh x + c_2 = 2 \operatorname{arctg} e^x + c_3$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & x \in (-\infty; 0\rangle,\ t \in (-1; 0\rangle \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & x \in \langle 0; \infty),\ t \in \langle 0; 1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + c_1$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \operatorname{tgh} \frac{x}{2} + c_1,\ x \in R,\ c_1 \in R.$$

$$= \int \frac{\cosh x\,dx}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,dx}{\sinh^2 x + 1} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t = \sinh x & x \in R \\ dt = \cosh x\,dx & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c_2$$

$$= \operatorname{arctg} \sinh x + c_2,\ x \in R,\ c_2 \in R.$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x + e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x = \ln t & x \in R \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{2\,dt}{t(t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

$$= 2 \operatorname{arctg} t + c_3 = 2 \operatorname{arctg} e^x + c_3,\ x \in R,\ c_3 \in R.$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & x \in \left(-\infty; \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right),\ t \in \left(-1; \sqrt{2}-1\right) & \sinh x \neq -1 \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & x \in \left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right); \infty\right),\ t \in \left(\sqrt{2}-1; 1\right) & x \neq \ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+e^x - e^{-x}}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(-1;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x=\frac{2t}{1-t^2} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;1) & x\neq\ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x-e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x=\ln t & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(0;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ e^{-x}=t^{-1}=\frac{1}{t} & dx=\frac{dt}{t} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;\infty) & x\neq\ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right]$$

Integrály hyperbolických funkcií

$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(-1;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x=\frac{2t}{1-t^2} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;1) & x\neq\ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1-t^2+2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x-e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x=\ln t & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(0;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ e^{-x}=t^{-1}=\frac{1}{t} & dx=\frac{dt}{t} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;\infty) & x\neq\ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t(2+t-\frac{1}{t})}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x\in\left(-\infty;\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right),\ t\in\left(-1;\sqrt{2}-1\right) & \sinh x\neq -1 \\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x=\frac{2t}{1-t^2} & x\in\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right);\infty\right),\ t\in\left(\sqrt{2}-1;1\right) & x\neq\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1-t^2+2t}{1-t^2}} = \int \frac{-2\,dt}{t^2-2t-1}$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x-e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=e^x & x=\ln t & x\in\left(-\infty;\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right),\ t\in\left(0;\sqrt{2}-1\right) & \sinh x\neq -1 \\ e^{-x}=t^{-1}=\frac{1}{t} & dx=\frac{dt}{t} & x\in\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right);\infty\right),\ t\in\left(\sqrt{2}-1;\infty\right) & x\neq\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t-1}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(-1;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x=\frac{2t}{1-t^2} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;1) & x\neq \ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1-t^2+2t}{1-t^2}} = \int \frac{-2\,dt}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,dt}{(t-1)^2-2}$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x-e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t=e^x & x=\ln t & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(0;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ e^{-x}=t^{-1}=\frac{1}{t} & dx=\frac{dt}{t} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;\infty) & x\neq \ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-2}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(-1;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x=\frac{2t}{1-t^2} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;1) & x\neq \ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1-t^2+2t}{1-t^2}} = \int \frac{-2\,dt}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,dt}{(t-1)^2-2} = -\int \frac{2\,dt}{(t-1)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x-e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t=e^x & x=\ln t & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(0;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ e^{-x}=t^{-1}=\frac{1}{t} & dx=\frac{dt}{t} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;\infty) & x\neq \ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-2} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(-1;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x=\frac{2t}{1-t^2} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;1) & x\neq \ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1-t^2+2t}{1-t^2}} = \int \frac{-2\,dt}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,dt}{(t-1)^2-2} = -\int \frac{2\,dt}{(t-1)^2-(\sqrt{2})^2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| + c_1$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x-e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\ \ t=e^x & x=\ln t & x\in(-\infty;\ln(\sqrt{2}-1)),\ t\in(0;\sqrt{2}-1) & \sinh x\neq -1 \\ e^{-x}=t^{-1}=\frac{1}{t} & dx=\frac{dt}{t} & x\in(\ln(\sqrt{2}-1);\infty),\ t\in(\sqrt{2}-1;\infty) & x\neq \ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-2} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + c_2$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in \left(-\infty; \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right),\ t \in \left(-1; \sqrt{2}-1\right) & \sinh x \neq -1 \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & x \in \left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right); \infty\right),\ t \in \left(\sqrt{2}-1; 1\right) & x \neq \ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1-t^2+2t}{1-t^2}} = \int \frac{-2\,dt}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,dt}{(t-1)^2-2} = -\int \frac{2\,dt}{(t-1)^2-(\sqrt{2})^2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| + c_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right| + c_1$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x-e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x = \ln t & x \in \left(-\infty; \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right),\ t \in \left(0; \sqrt{2}-1\right) & \sinh x \neq -1 \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & x \in \left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right); \infty\right),\ t \in \left(\sqrt{2}-1; \infty\right) & x \neq \ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-2} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + c_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + c_2$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\sinh x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tgh}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tgh}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{e^x + 1 - \sqrt{2}}{e^x + 1 + \sqrt{2}} \right| + c_2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)),\ t \in (-1; \sqrt{2}-1) & \sinh x \neq -1 \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty),\ t \in (\sqrt{2}-1; 1) & x \neq \ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1 + \frac{2t}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1-t^2+2t}{1-t^2}} = \int \frac{-2\,dt}{t^2-2t-1} = \int \frac{-2\,dt}{(t-1)^2-2} = -\int \frac{2\,dt}{(t-1)^2-(\sqrt{2})^2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| + c_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} \right| + c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tgh}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tgh}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + c_1,\ x \in R - \{\ln(\sqrt{2}-1)\},\ c_1 \in R.$$

$$= \int \frac{dx}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2 + e^x - e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x = \ln t & x \in (-\infty; \ln(\sqrt{2}-1)),\ t \in (0; \sqrt{2}-1) & \sinh x \neq -1 \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & x \in (\ln(\sqrt{2}-1); \infty),\ t \in (\sqrt{2}-1; \infty) & x \neq \ln(\sqrt{2}-1) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,dt}{t(2+t-\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-2} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + c_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{e^x + 1 - \sqrt{2}}{e^x + 1 + \sqrt{2}} \right| + c_2,\ x \in R - \{\ln(\sqrt{2}-1)\},\ c_2 \in R.$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cosh x}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cosh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & x \in R \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & t \in (-1;1) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dx}{2\cosh^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\cosh x \, dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x+e^{-x}}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cosh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in R \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & t \in (-1;1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in R \\ dt = \frac{dx}{2} & t \in R \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cosh x\,dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sinh x & x \in (-\infty;0),\ t \in (-\infty;0) \\ dt = \cosh x\,dx & x \in (0;\infty),\ t \in (0;\infty) \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x+e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = e^x & x = \ln t & x \in R \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & t \in (0;\infty) \end{array} \right]$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cosh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} & x \in R \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & t \in (-1;1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int dt$$

$$= \int \frac{dx}{2\cosh^2 \frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in R \\ dt = \frac{dx}{2} & t \in R \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\cosh^2 t}$$

$$= \int \frac{\cosh x\,dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \sinh x & x \in (-\infty;0),\ t \in (-\infty;0) \\ dt = \cosh x\,dx & x \in (0;\infty),\ t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x+e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } t = e^x & x = \ln t & x \in R \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & t \in (0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,dt}{t(2+t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t+1}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2}$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cosh x}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x \in R \\ dx = \frac{2\,dt}{1-t^2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} & t \in (-1;1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int dt = t + c_1$$

$$= \int \frac{dx}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \frac{x}{2} & x \in R \\ dt = \frac{dx}{2} & t \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c_1$$

$$= \int \frac{\cosh x\,dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t = \sinh x & x \in (-\infty;0),\ t \in (-\infty;0) \\ dt = \cosh x\,dx & x \in (0;\infty),\ t \in (0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{1}{-t} - \operatorname{cotgh} x + c_2$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x+e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t = e^x & x = \ln t & x \in R \\ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t} & dx = \frac{dt}{t} & t \in (0;\infty) \end{array} \right] = \int \frac{2\,dt}{t(2+t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t+1}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = \int 2(t+1)^{-2}\,dt = \frac{2(t+1)^{-1}}{-1} + c_3$$

Integrály hyperbolických funkcií

$$\int \frac{dx}{1+\cosh x} = \operatorname{tgh}\frac{x}{2} + c_1 = c_2 - \frac{1+\cosh x}{\sinh x} = -\frac{2}{e^x+1} + c_3$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l} \text{UHS:} & t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & x\in R \\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2} & \cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2} & t\in(-1;1) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int dt = t+c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}+c_1, \quad x\in R,\ c_1\in R.$$

$$= \int \frac{dx}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t=\frac{x}{2} & x\in R \\ dt=\frac{dx}{2} & t\in R \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c_1 = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$= \int \frac{\cosh x\,dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\ \ t=\sinh x & x\in(-\infty;0),\ t\in(-\infty;0) \\ dt=\cosh x\,dx & x\in(0;\infty),\ t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{1}{-t} - \operatorname{cotgh} x + c_2 = c_2 - \frac{1}{\sinh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = c_2 - \frac{1+\cosh x}{\sinh x},\ x\in R-\{0\},\ c_2\in R.$$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{2+e^x+e^{-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ t=e^x & x=\ln t & x\in R \\ e^{-x}=t^{-1}=\frac{1}{t} & dx=\frac{dt}{t} & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,dt}{t(2+t+\frac{1}{t})} = \int \frac{2\,dt}{t^2+2t+1}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = \int 2(t+1)^{-2}\,dt = \frac{2(t+1)^{-1}}{-1} + c_3 = -\frac{2}{e^x+1}+c_3,\ x\in R,\ c_3\in R.$$