# Matematická analýza 1

## 2018/2019

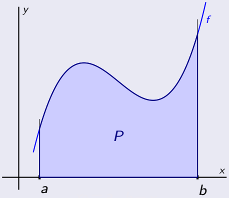
## 15. Určitý integrál

# Obsah

# Integrálne súčty

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2\, ;\, x \in \langle a; b\rangle\, , 0 \le y \le f(x)\}.$

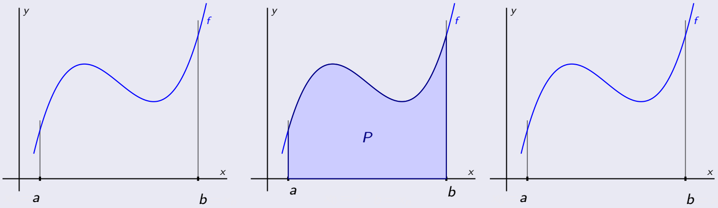


# Integrálne súčty

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2\,;\ x \in \langle a; b\rangle\,, 0 \leq y \leq f(x)\}.$

Rozdeľme interval $\langle a; b\rangle$

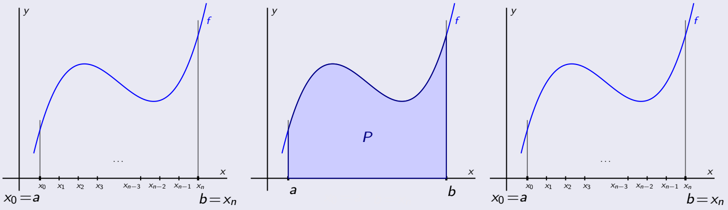


# Integrálne súčty

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b \rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2\,;\ x \in \langle a; b \rangle\,, 0 \leq y \leq f(x)\}.$

Rozdeľme interval $\langle a; b \rangle$ na $n$ podintervalov $\langle x_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; x_2 \rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n \rangle$

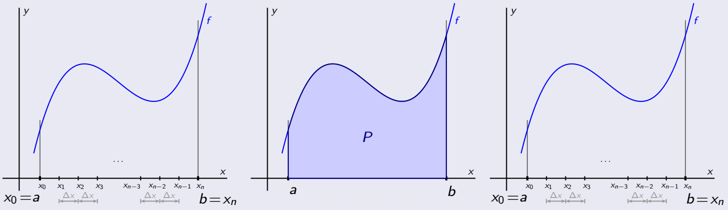


# Integrálne súčty

$y = f(x) > 0$, $x \in \langle a; b\rangle$, $a, b \in R$, $a < b$.

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2 ; x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Rozdeľme interval $\langle a; b\rangle$ na $n$ podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$, $n \in N$.



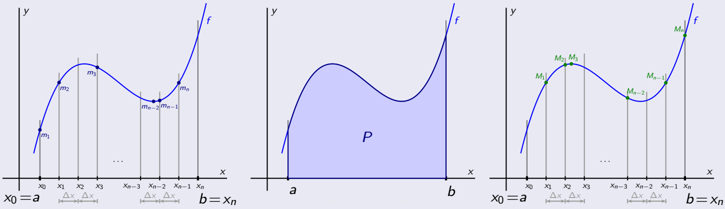
# Integrálne súčty

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

**Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2 ;\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.**

Rozdeľme interval $\langle a;b\rangle$ na $n$ podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$, $n \in N$.

Označme $m_i = \min\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.



# Integrálne súčty

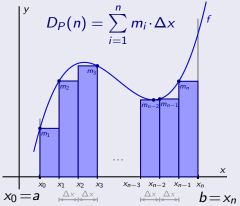
$y=f(x)>0,\ x\in\langle a;b\rangle,\ a,b\in R,\ a<b.$

Určte plošný obsah množiny $P=\{[x;y]\in R^2;\ x\in\langle a;b\rangle,\ 0\leq y\leq f(x)\}.$

Rozdeľme interval $\langle a;b\rangle$ na $n$ podintervalov $\langle x_0;x_1\rangle,\ \langle x_1;x_2\rangle,\ \ldots,\ \langle x_{n-1};x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x=x_1-x_0=x_2-x_1=\cdots=x_n-x_{n-1}=\frac{b-a}{n},\ n\in N.$

Označme $m_i=\min\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $M_i=\max\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$ pre $i=1,2,\ldots,n$.

Plochu $P$ pokryjeme $n$ obdĺžnikmi a odhadneme zdola a zhora hodnotami $D_P(n)$ a $H_P(n)$.



# Integrálne súčty

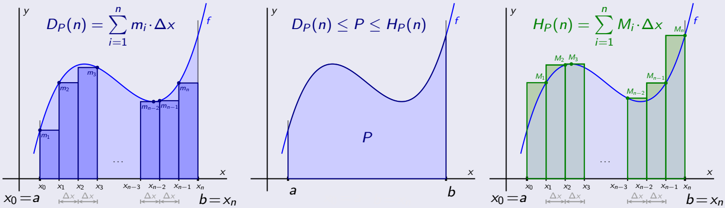
$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2 ;\ x \in \langle a; b\rangle,\ 0 \le y \le f(x)\}.$

Rozdeľme interval $\langle a;b\rangle$ na $n$ podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$
s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$, $n \in N$.

Označme $m_i = \min\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.

Plochu $P$ pokryjeme $n$ obdĺžnikmi a odhadneme zdola a zhora hodnotami $D_P(n)$ a $H_P(n)$.




Je zrejmé, že pre väčšie $n$ sa odhady $D_P(n)$, $H_P(n)$ nezhoršia (zlepšia alebo ostanú rovnaké).

# Integrálne súčty

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

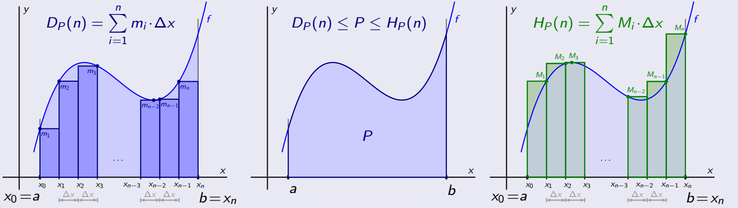
**Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2 ;\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.**

Rozdeľme interval $\langle a;b\rangle$ na $n$ podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle, \langle x_1; x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}; x_n\rangle$

s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$, $n \in N$.

Označme $m_i = \min \{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max \{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.

Plochu $P$ pokryjeme $n$ obdĺžnikmi a odhadneme zdola a zhora hodnotami $D_P(n)$ a $H_P(n)$.




Je zrejmé, že pre väčšie $n$ sa odhady $D_P(n)$, $H_P(n)$ nezhoršia (zlepšia alebo ostanú rovnaké).

Ak $n \to \infty$, t. j. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$, potom $D_P(n) \to P$ (dolný odhad), $H_P(n) \to P$ (horný odhad).

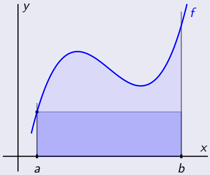
# Integrálne súčty

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b \rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2 ;\ x \in \langle a; b \rangle,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$

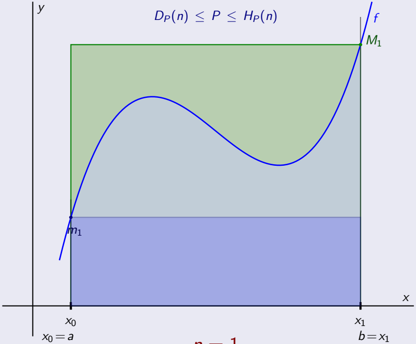
$D_P(n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \ \to\ P$

pre $n \to \infty$, t. j. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$




$D_P(1) = \sum_{i=1}^{1} m_i \cdot \Delta x_i$

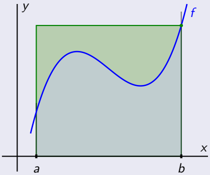
Dolný odhad




$n = 1$

$P \leftarrow \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = H_P(n)$

pre $n \to \infty$, t. j. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$

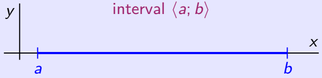



$H_P(1) = \sum_{i=1}^{1} M_i \cdot \Delta x_i$

Horný odhad

# Integrálne súčty

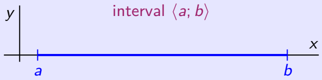
## $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.



# Integrálne súčty

## $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$



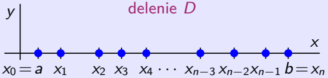
# Integrálne súčty

## $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n}, \ n\in N,$$

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$



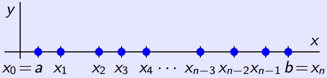
# Integrálne súčty

**$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.**

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.



# Integrálne súčty

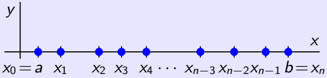
## $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

**Delením intervalu $\langle a; b\rangle$** nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú **deliace body**.



# Integrálne súčty

**$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.**

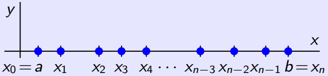
Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.



# Integrálne súčty

**$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.**

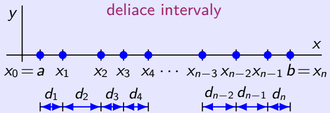
Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$, jednoznačne určujú delenie

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$,



# Integrálne súčty

**$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.**

**Delením intervalu $\langle a; b\rangle$** nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\; n\in N,$$

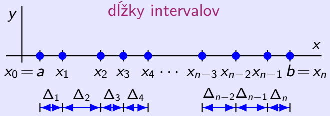
jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú **deliace body**.

**Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$** označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

**Deliace intervaly**: $d_i=\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$,

**dĺžky intervalov**: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$,



# Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

**Delením intervalu** $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n},\ n \in N,$$

jednoznačne určujú delenie

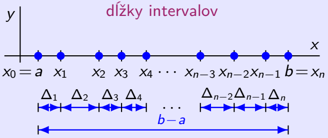
kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sú **deliace body**.

**Množinu všetkých delení** $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D;\ D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

**Deliace intervaly**: $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

**dĺžky intervalov**: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a.$



# Integrálne súčty

**$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.**

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \; n \in N,$$

jednoznačne určujú delenie

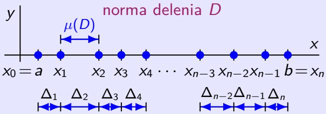
kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

dĺžky intervalov: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a.$




Norma delenia $D$: $\mu(D) = \max\{\Delta x_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov $d_i$).

# Integrálne súčty

**$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.**

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

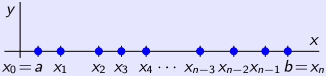
$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\ D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i=\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$,




dĺžky intervalov: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=b-a.$

Norma delenia $D$: $\mu(D)=\max\{\Delta x_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov $d_i$).

Ak $D^*, D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D^*\subset D^{**}$, potom delenie $D^{**}$ sa nazýva zjemnenie delenia $D^*$.

# Integrálne súčty

## $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

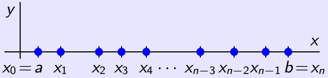
$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i=\langle x_{i-1}; x_i\rangle,\ i=1,2,\ldots,n,$




dĺžky intervalov: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,2,\ldots,n,$

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=b-a.$

Norma delenia $D$: $\mu(D)=\max\{\Delta x_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov $d_i$).

Ak $D^*, D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D^*\subset D^{**}$, potom delenie $D^{**}$ sa nazýva zjemnenie delenia $D^*$.

Každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení.

# Integrálne súčty

## $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

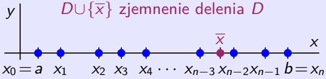
$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\; n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i=\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$,




dĺžky intervalov: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=b-a.$

Norma delenia $D$: $\mu(D)=\max\{\Delta x_i,\, i=1,2,\ldots,n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov $d_i$).

Ak $D^*, D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D^*\subset D^{**}$, potom delenie $D^{**}$ sa nazýva zjemnenie delenia $D^*$.

Každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení.

Stačí zvoliť ľubovoľný bod $\overline{x}\in\langle a; b\rangle$, $\overline{x}\notin D$ a delenie $D\cup\{\overline{x}\}$ je zjemnením delenia $D$.

# Integrálne súčty

## $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

**Delením intervalu $\langle a; b\rangle$** nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n},\ n \in N,$$

jednoznačne určujú delenie

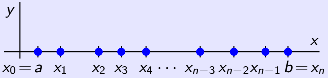
kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sú **deliace body**.

**Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$** označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D;\ D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

**Deliace intervaly**: $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n,$

**dĺžky intervalov**: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, n,$

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a.$




**Norma delenia $D$**: $\mu(D) = \max\{\Delta x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov $d_i$).

Ak $D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D^* \subset D^{**}$, potom delenie $D^{**}$ sa nazýva **zjemnenie delenia $D^*$**.

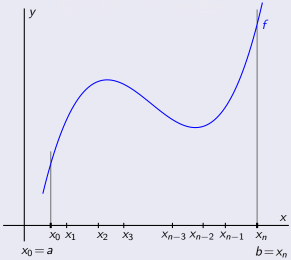
Každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení.

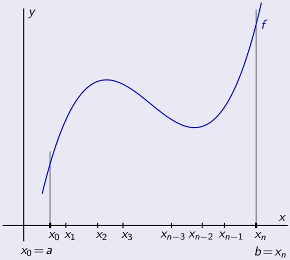
Stačí zvoliť ľubovoľný bod $\overline{x} \in \langle a; b\rangle$, $\overline{x} \notin D$ a delenie $D \cup \{\overline{x}\}$ je zjemnením delenia $D$.

Ak $D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, potom $D = D^* \cup D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ sa nazýva **spoločné zjemenenie $D^*, D^{**}$**.

# Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,

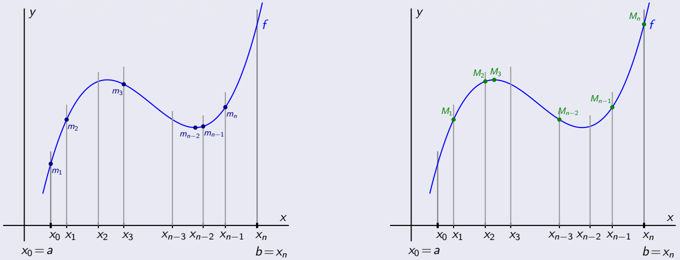


# Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,

$m_i = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

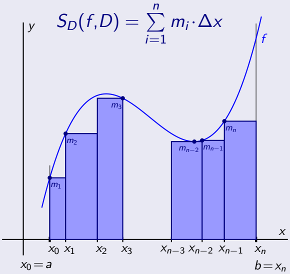


# Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,
$m_i = \inf \{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \sup \{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dolným Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_D(f,D)$ funkcie $f$ pri delení $D$

nazývame $$S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$



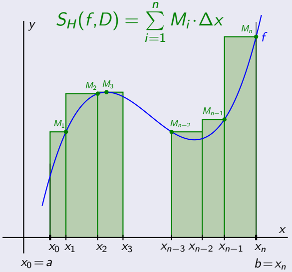
# Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,
$m_i = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

hornými Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_H(f,D)$ funkcie $f$ pri delení $D$

nazývame

$$S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

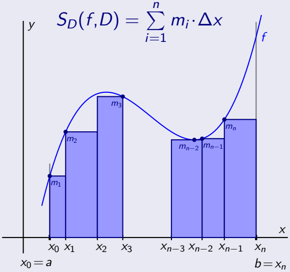


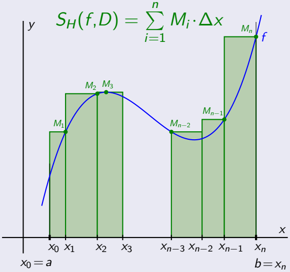
# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,
$m_i=\inf\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $M_i=\sup\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $i=1,2,\ldots,n$.

Dolným Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_D(f,D)$ funkcie $f$ pri delení $D$
a horným Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_H(f,D)$ funkcie $f$ pri delení $D$

nazývame čísla: $$S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i,\quad S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x_i.$$



# Integrálne súčty

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená**

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f, D); D \in \mathfrak{D}\langle a; b\rangle\}$, $\{S_H(f, D); D \in \mathfrak{D}\langle a; b\rangle\}$ sú ohraničené

# Integrálne súčty

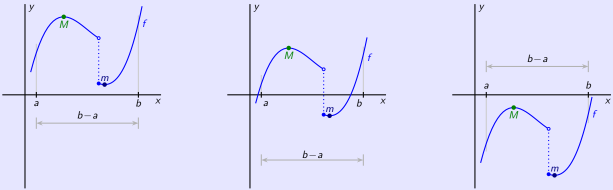
**$y = f(x)$, $x \in \langle a;\, b\rangle$ je ohraničená**

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.

# Integrálne súčty

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená**

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b \rangle}\}$, $\{S_H(f, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b \rangle}\}$ sú ohraničené.

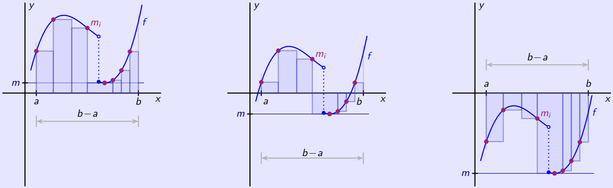



Označme $m = \inf \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}$, $M = \sup \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}$.

# Integrálne súčty

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená**

$\Rightarrow$ množiny $\left\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$, $\left\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sú ohraničené.



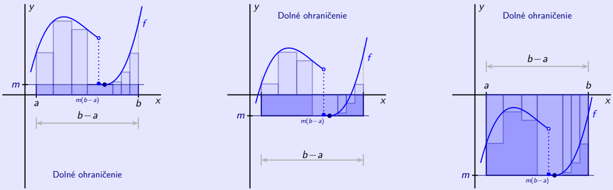

Označme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$.

Pre každé $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ platí $m\leq m_i$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

# Integrálne súčty

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená**

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.




Označme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$.

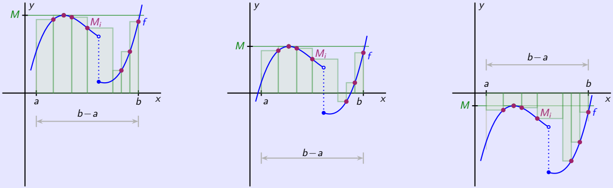
Pre každé $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ platí $m\leq m_i$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

$$m(b-a)=m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}m\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=S_D(f,D)$$

# Integrálne súčty

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;\,b\rangle$ je ohraničená**

$\Rightarrow$ množiny $\left\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$, $\left\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sú ohraničené.



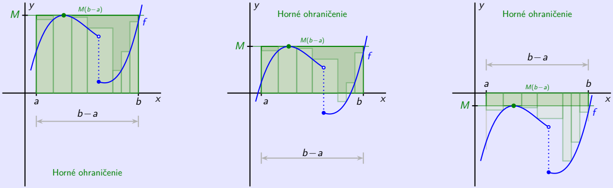

Označme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;\,b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;\,b\rangle\}$.

Pre každé $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ platí $M_i\leq M$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

# Integrálne súčty

## $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.




Označme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$.

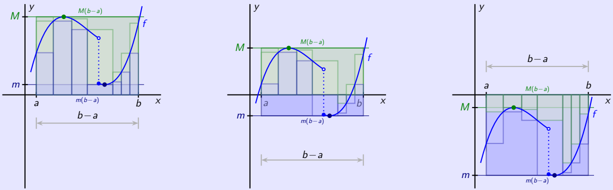
Pre každé $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ platí $M_i\leq M$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

$$S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=M(b-a).$$

# Integrálne súčty

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená**

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.




Označme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$.

Pre každé $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ platí $m\leq m_i\leq M_i\leq M$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

$$m(b-a)=m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}m\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=S_D(f,D)\leq$$

$$\leq S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=M(b-a).$$

# Integrálne súčty

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$** ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$\Rightarrow S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$

# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$\Rightarrow$ $S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D)$.

# Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D \subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$\Rightarrow$ $S_D(f,D) \leq S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^*) \leq S_H(f,D)$.

$D^*$ vznikne z $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$\Rightarrow$ $S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D)$.

$D^*$ vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$

a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.

# Integrálne súčty

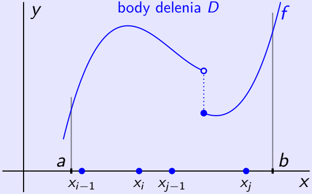
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D \subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

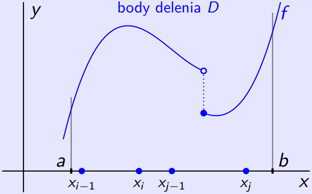
$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) \leq S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^*) \leq S_H(f,D).$$

$D^*$ vznikne z $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

t. j. stačí overiť iba prípad $D^* = D \cup \{\overline{x}\}$

a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



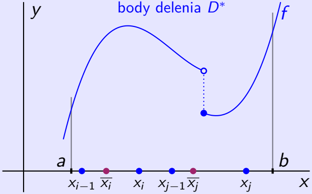



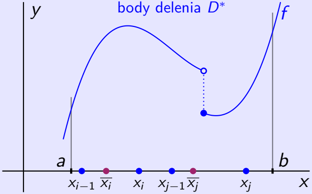
# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

$D^*$ vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,
t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.]
a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



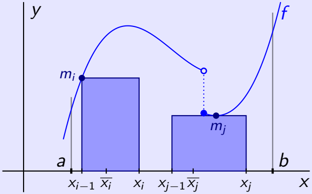



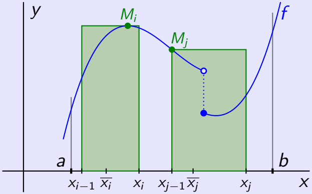
# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

$D^*$ vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,
t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.]
a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



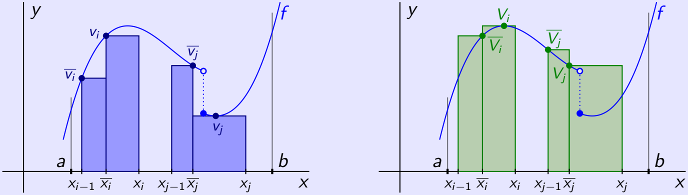



# Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b \rangle}$, $D \subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) \leq S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^*) \leq S_H(f,D).$$

$D^*$ vznikne z $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,
t. j. stačí overiť iba prípad $D^* = D \cup \{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i} \in (x_{i-1}; x_i)$, $\overline{x_j} \in (x_{j-1}; x_j)$.]
a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.

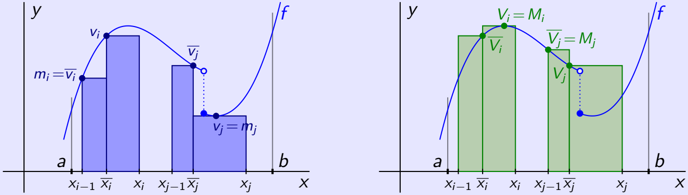


# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$$\Rightarrow\quad S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

$D^*$ vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,
t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.]
a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.

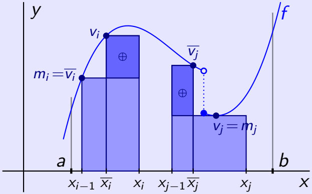


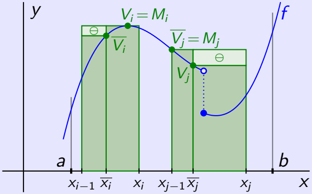
# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)\le S_D(f,D^*)\le S_H(f,D^*)\le S_H(f,D).$$

$D^*$ vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov, t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.] a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



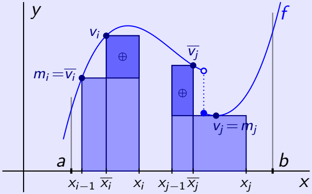



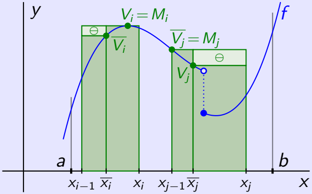
# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$\Rightarrow$ $S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D)$.

$D^*$ vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov, t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.] a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



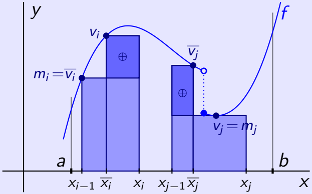

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D^*,D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ ($D^*,D^{**}$ sú ľubovoľné delenia)

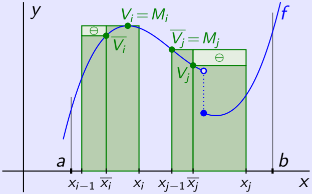
# Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ ($D^*$ je zjemnením delenia $D$)

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

$D^*$ vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov, t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.] a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.




$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D^*,D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ ($D^*,D^{**}$ sú ľubovoľné delenia)

$$\Rightarrow\ S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^{**}).$$

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená,

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;\, b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_H(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

(určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a;\, b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{S_D(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

# Riemannov určitý integrál

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,**

číslo $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_H(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{S_D(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_H(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{S_D(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$,

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{S_H(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{S_D(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_H(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{S_D(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$

a $f$ sa nazýva riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a;b\rangle$, ozn. $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{S_H(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{S_D(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$

a $f$ sa nazýva riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a;b\rangle$, ozn. $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dolný a horný Riemannov integrál existujú vždy

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{S_H(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{S_D(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$

a $f$ sa nazýva riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a;b\rangle$, ozn. $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dolný a horný Riemannov integrál existujú vždy a platí

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a),$$

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{S_H(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{S_D(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na $\langle a;b\rangle$ resp. od $a$ po $b$

a $f$ sa nazýva riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a;b\rangle$, ozn. $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dolný a horný Riemannov integrál existujú vždy a platí

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a),$$

pričom $m=\inf\{f(x),\ x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x),\ x\in\langle a;b\rangle\}$.

# Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b \rangle$, $c \in R$ je konštanta.

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1,2,\ldots,n$

# Riemannov určitý integrál

**$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.**

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i$$

# Riemannov určitý integrál

**$f(x)=c$, $x\in\langle a;b\rangle$, $c\in R$ je konštanta.**

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c,\quad M_i=\sup\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}c\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\,\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\,\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \; S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \; \underline{\int_a^b} c\,dx \qquad\qquad = c(b-a)$$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x \qquad = c(b-a)$$

# Riemannov určitý integrál

**$f(x)=c,\ x\in\langle a;b\rangle,\ c\in R$ je konštanta.**

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c,\quad M_i=\sup\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}c\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b} c\,dx=\overline{\int_a^b} c\,dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a)$$

# Riemannov určitý integrál

**$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.**

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a),$$

špeciálne $\underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c$, $\quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c$.

$$\Rightarrow \; S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \; \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a), \qquad \text{špeciálne} \quad \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

## Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \ S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \ \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a), \qquad \text{špeciálne} \ \underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

## Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c$, $\quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c$.

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a), \qquad \text{špeciálne} \quad \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

## Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$m_i = \inf\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 0$, $M_i = \sup\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 1$.

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c$, $\quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c$.

$$\Rightarrow \; S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \; \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a), \qquad \text{špeciálne} \quad \underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

## Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$m_i = \inf\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 0$, $M_i = \sup\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 1$.

$$\Rightarrow \; S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0,$$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a), \qquad \text{špeciálne} \quad \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

## Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i = \inf\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 0, \quad M_i = \sup\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 1.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0, \qquad S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1-0 = 1.$$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c,\ x \in \langle a; b\rangle,\ c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a),$$ špeciálne $$\underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

## Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle,\ x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle,\ x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 0, \quad M_i = \sup\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 1.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0, \qquad S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_0^1} \chi(x)\,dx = 0,$$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a), \quad \text{špeciálne} \quad \underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

## Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 0, \quad M_i = \sup\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 1.$$

$$\Rightarrow S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0, \quad S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

$$\Rightarrow \underline{\int_0^1} \chi(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_0^1} \chi(x)\,dx = 1,$$

# Riemannov určitý integrál

## $f(x)=c$, $x\in\langle a;b\rangle$, $c\in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí
$m_i=\inf\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c$, $M_i=\sup\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c$.

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}c\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b} c\,dx=\overline{\int_a^b} c\,dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a),\quad \text{špeciálne}\ \underline{\int_a^b} dx=\overline{\int_a^b} dx=\int_a^b dx=b-a.$$

## Dirichletova funkcia $\chi(x)=1$ pre $x\in\langle 0;1\rangle$, $x\in Q$, $\chi(x)=0$ pre $x\in\langle 0;1\rangle$, $x\notin Q$.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí
$m_i=\inf\{\chi(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=0$, $M_i=\sup\{\chi(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=1$.

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0=0,\quad S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1-0=1.$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_0^1}\chi(x)\,dx=0,\quad \overline{\int_0^1}\chi(x)\,dx=1,\quad \int_0^1\chi(x)\,dx\ \text{neexistuje}.$$

# Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

# Riemannov určitý integrál

**$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly** $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle} \quad \Rightarrow \quad f \in R_{\langle c;d\rangle}$$

# Riemannov určitý integrál

**$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly** $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

# Riemannov určitý integrál

**$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly** $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ $\big($t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N\big)$

# Riemannov určitý integrál

**$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly** $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ $\big($t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N\big)$ sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0.$

# Riemannov určitý integrál

**$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly** $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,dx.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť**

# Riemannov určitý integrál

**$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly** $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť**

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k),$$

# Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

# Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

# Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$

# Riemannov určitý integrál

**$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly** $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť**

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.**

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$

$\Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$

# Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

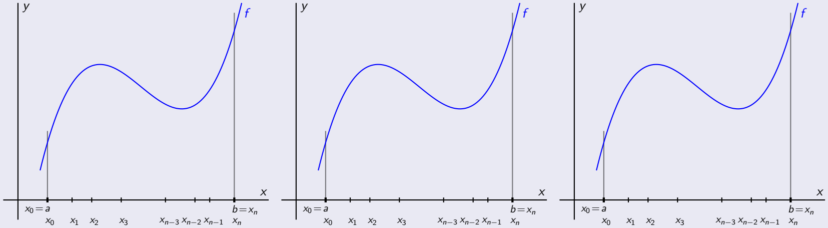
$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_H(f,D_k).$$

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$$
$$\Leftrightarrow \text{ pre každú normálnu } \{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} \text{ platí } \lim_{k\to\infty} S_H(f,D_k) = \lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k).$$

# Riemannov určitý integrál

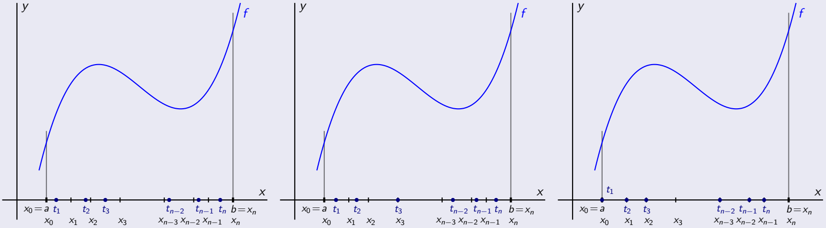
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,



# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,

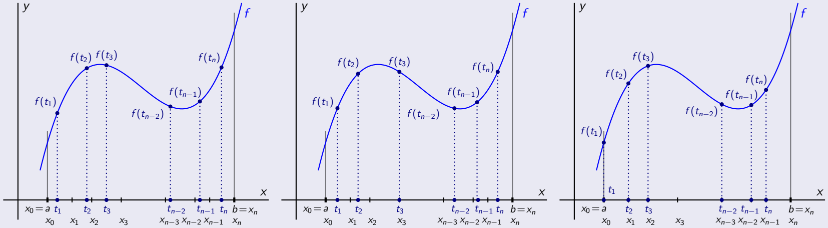
$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ pričom $t_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$



# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,

$T=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\dots,n$.

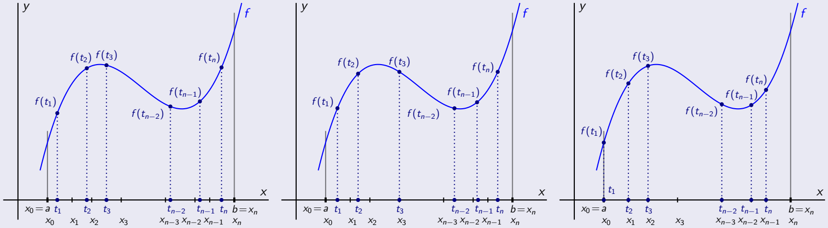


# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,

$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n$.

Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_T(f,D)$ funkcie $f$ pri delení $D$ a voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}=\{t_i\,;\,t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$

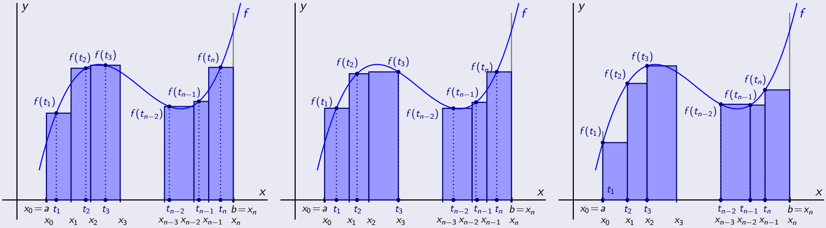


# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,
$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n$.

Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_T(f,D)$ funkcie $f$ pri delení $D$ a voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}=\{t_i\,;\ t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$

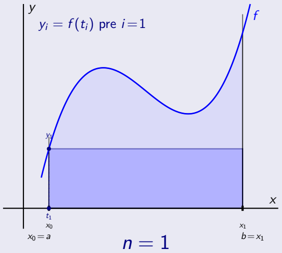
nazývame číslo $$S_T(f,D)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i.$$

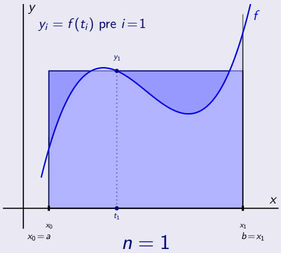


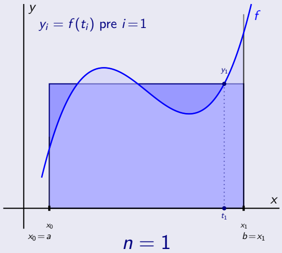
# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,

$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ pričom $t_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.



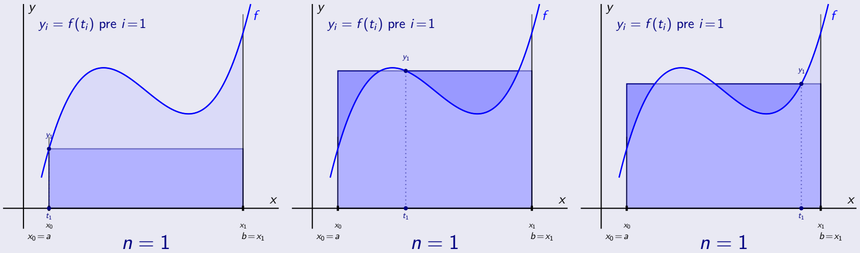



# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,

$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n.$

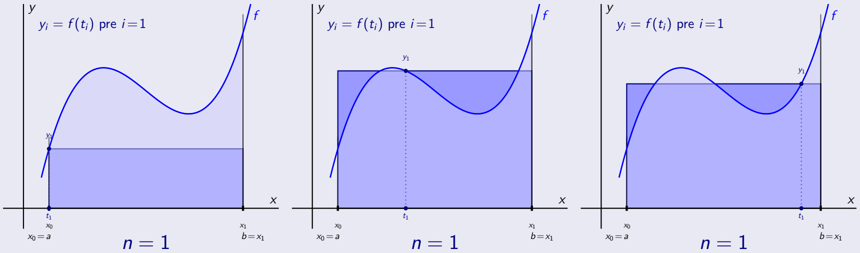



Pre integrálny súčet $S_T(f,D)$ pri ľubovoľnej voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,

$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n.$




Pre integrálny súčet $S_T(f,D)$ pri ľubovoľnej voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$

platí $m(b-a)\le S_D(f,D)\le S_T(f,D)\le S_H(f,D)\le M(b-a)$,

pričom $m=\inf\{f(x);x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x);x\in\langle a;b\rangle\}$.

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

# Riemannov určitý integrál

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená.**

$f(x) \in R_{\langle a;b \rangle}$

# Riemannov určitý integrál

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.**

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$,

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a;\, b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$,

pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$

# Riemannov určitý integrál

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.**

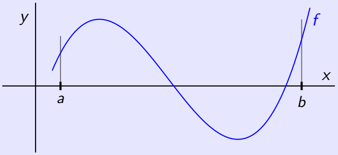
$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a;\, b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

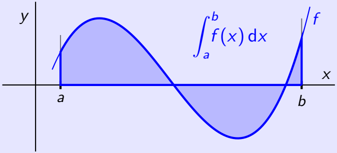


# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a; b\rangle$.

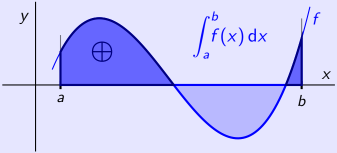


# Riemannov určitý integrál

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.**

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a;b\rangle$.
Pre $f(x)\geq 0$ je táto plocha kladná.

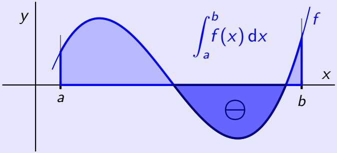


# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a;\, b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a;\, b\rangle$.
Pre $f(x) \leq 0$ je táto plocha záporná.



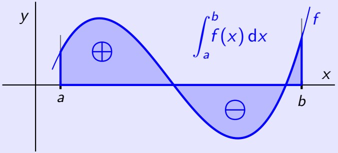
# Riemannov určitý integrál

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.**

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

plochu krivočiareho lichobežníka
určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a; b\rangle$.
Pre $f(x) \le 0$ je táto plocha záporná.

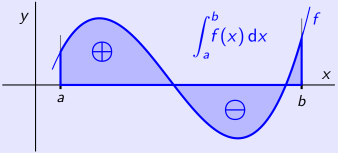


# Riemannov určitý integrál

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.**

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a;b\rangle$.
Pre $f(x)\leq 0$ je táto plocha záporná.



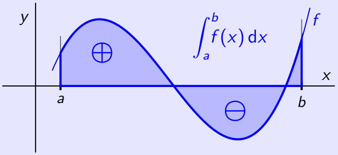

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ spojitá, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.**

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k)$.

Geometricky predstavuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a; b\rangle$. Pre $f(x) \leq 0$ je táto plocha záporná.




$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ spojitá, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$.

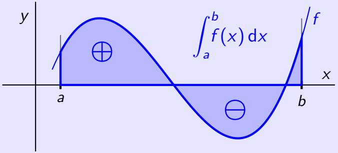
$\Rightarrow$ existujú $u_i, v_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$

# Riemannov určitý integrál

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.**

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a;b\rangle$. Pre $f(x)\leq 0$ je táto plocha záporná.




**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ spojitá, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.**

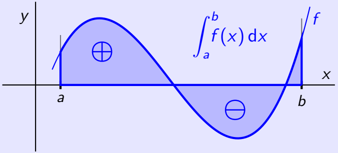
$\Rightarrow$ existujú $u_i,v_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ pre $i=1,2,\ldots,n$ také, že $f(u_i)=m_i$, $f(v_i)=M_i$

# Riemannov určitý integrál

**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.**

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a;b\rangle$.
Pre $f(x)\leq 0$ je táto plocha záporná.




**$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ spojitá, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.**

$\Rightarrow$ existujú $u_i,v_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ pre $i=1,2,\dots,n$ také, že $f(u_i)=m_i$, $f(v_i)=M_i$

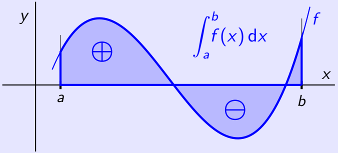
[$f$ nadobúda extrémy na $\langle x_{i-1};x_i\rangle$].

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov $T$ platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou $f$ a intervalom $\langle a;b\rangle$.
Pre $f(x)\le 0$ je táto plocha záporná.




$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ spojitá, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.

$\Rightarrow$ existujú $u_i,v_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ pre $i=1,2,\ldots,n$ také, že $f(u_i)=m_i$, $f(v_i)=M_i$
[$f$ nadobúda extrémy na $\langle x_{i-1};x_i\rangle$].

$\Rightarrow$ $S_D(f,D)$, $S_H(f,D)$ sú Riemannovými integrálnymi súčtami pre konkrétne voľby bodov $T_D=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, $T_H=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$.

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b \rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b \rangle}$.

# Riemannov určitý integrál

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.**

$\Rightarrow$ $f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.**

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b \rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b \rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b \rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b \rangle}$.

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je monotónna na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je spojitá na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a;b\rangle \subset D(f)$,

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$,
ak má na $\langle a; b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti,

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je monotónna na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow\quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je spojitá na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow\quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a;b\rangle\subset D(f)$, ak má na $\langle a;b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti, ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;\, b\rangle$ je monotónna na intervale $x\in\langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow\quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y=f(x)$, $x\in\langle a;\, b\rangle$ je spojitá na intervale $x\in\langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow\quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a;\, b\rangle \subset D(f)$,
ak má na $\langle a;\, b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti,
ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na intervale $I \subset D(f)$,

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;\, b\rangle$ je monotónna na intervale $x\in\langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y=f(x)$, $x\in\langle a;\, b\rangle$ je spojitá na intervale $x\in\langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a;\, b\rangle \subset D(f)$,
ak má na $\langle a;\, b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti,
ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na intervale $I\subset D(f)$,
ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a;\, b\rangle \subset I$.

# Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je monotónna na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je spojitá na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a;b\rangle\subset D(f)$,
ak má na $\langle a;b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti,
ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na intervale $I\subset D(f)$,
ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a;b\rangle\subset I$.

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je po častiach spojitá na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.

# Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f$ sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$,
ak má na $\langle a; b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti,
ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

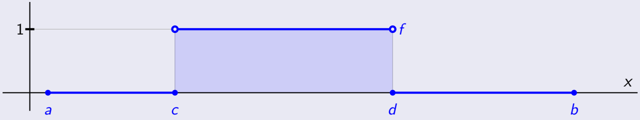
$f$ sa nazýva po častiach spojitá na intervale $I \subset D(f)$,
ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset I$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je po častiach spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

# Príklady

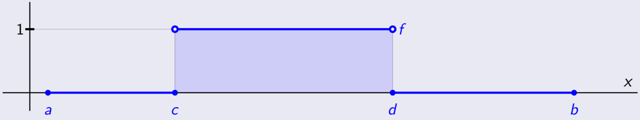
$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (c; d), \\ 0 & \text{pre } x \in \langle a; c \rangle \cup \langle d; b \rangle, \end{cases}$ $a < b < c < d$, $a, b, c, d \in R$.



# Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

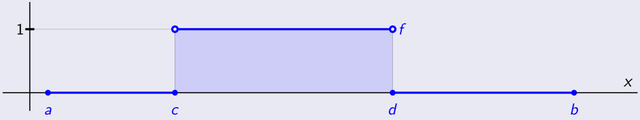
$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle$



# Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

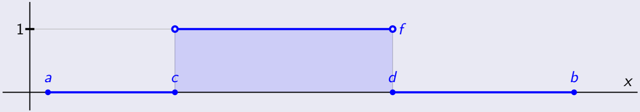
$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$.



# Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

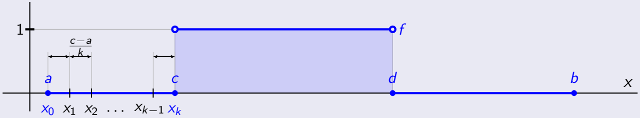


# Príklady

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x \in \langle a;c\rangle \cup \langle d;b\rangle\,, \end{cases}$ $a<b<c<d,$ $a,b,c,d \in R.$

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k \in N$ zvoľme $D_k = \{x_i\}_{i=0}^{3k} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a = x_0, x_1, \ldots, x_k = c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1 = \frac{c-a}{k}$.

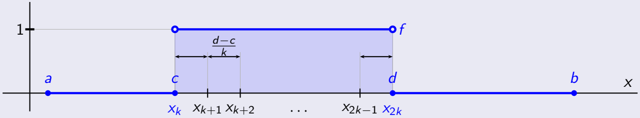


# Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad , \text{ pričom } f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases} \qquad a<b<c<d,\quad a,b,c,d\in R.$$

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.

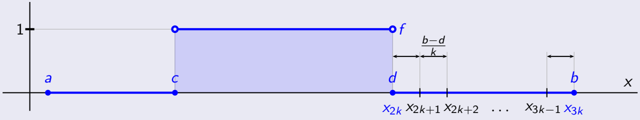


# Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \text{ pričom } f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases} \quad a<b<c<d,\ a,b,c,d\in R.$$

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.



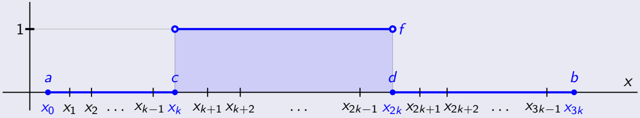
# Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{, pričom} \quad f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases} \qquad a<b<c<d,\quad a,b,c,d\in R.$$

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna,



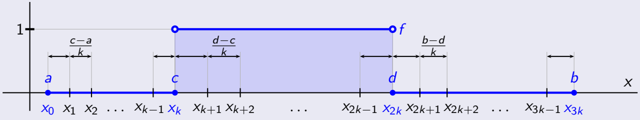
# Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\dots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\dots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\dots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.



# Príklady

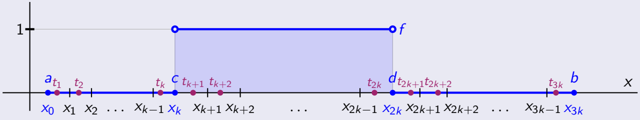
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].



# Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \text{ pričom } f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases} \quad a<b<c<d,\quad a,b,c,d\in R.$$

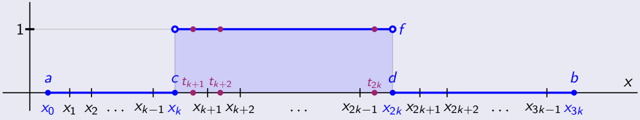
$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow\ f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$,



# Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

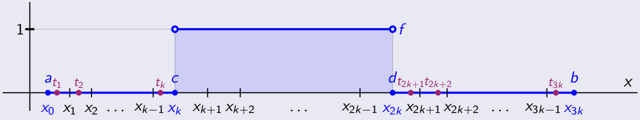
$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.



# Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases}$ $a<b<c<d,\quad a,b,c,d\in R.$

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

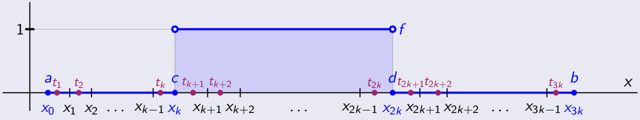
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $\quad f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_1+\sum_{i=k+1}^{2k} f(t_i)\cdot\Delta x_2+\sum_{i=2k+1}^{3k} f(t_i)\cdot\Delta x_3$$



# Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d), \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d,$ $a,b,c,d\in R.$

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

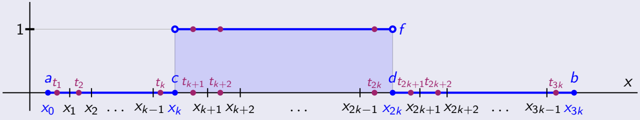
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}$$



# Príklady

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d), \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

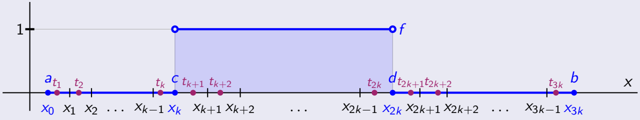
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{d-c}{k}$$



# Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$ , pričom $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d), \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c)\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

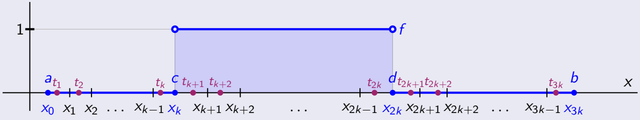
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{d-c}{k}=k\cdot\frac{d-c}{k}$$



# Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{, pričom} \quad f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases} \qquad a<b<c<d, \quad a,b,c,d\in R.$$

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

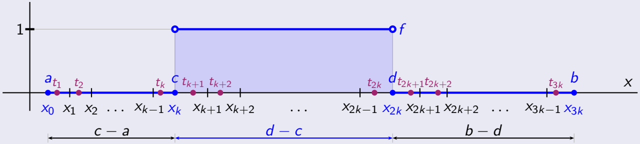
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $\quad f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{d-c}{k}=k\cdot\frac{d-c}{k}=d-c \text{ pre } k\in N.$$



# Príklady

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = d-c, \text{ pričom } f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases} \qquad a<b<c<d, \quad a,b,c,d\in R.$$

$f$ je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na $k$ intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

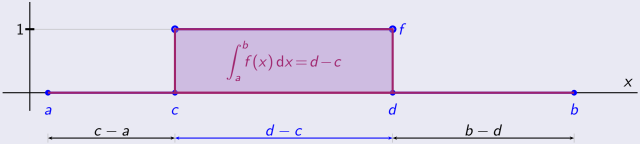
$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [$t_i$ je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $\quad f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{d-c}{k}=k\cdot\frac{d-c}{k}=d-c \text{ pre } k\in N.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = d-c.$$



# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

# Príklady

## $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je rastúca, spojitá

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k = \left\{ \frac{i}{k} \right\}_{i=0}^{k} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$,

# Príklady

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i = \frac{1}{k} \to 0$ pre $k \to \infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

# Príklady

## $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$,

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$,

# Príklady

## $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2},\ x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle},\ \Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k},\ M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$,

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

# Príklady

## $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$S_D(f,D_k)$

$S_T(f,D_k)$

$S_H(f,D_k)$

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i$$

# Príklady

## $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}$$

# Príklady

## $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i = \frac{1}{k} \to 0$ pre $k \to \infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$, $M_i = f(x_i) = \frac{i}{2k}$ pre $i = 1, 2, \ldots, k$.

$T = \{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i = \frac{i-1+i}{2k} = \frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $f(t_i) = \frac{2i-1}{4k}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k \cdot k} = \frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}$$

$$S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k \cdot k} = \frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}$$

$$S_H(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2k \cdot k} = \frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}$$

# Príklady

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}$$

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4}$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}$$

# Príklady

## $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\{\frac{i}{k}\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}\to\frac{1}{4},$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4},$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}\to\frac{1}{4}\ \text{pre}\ k\to\infty.$$

# Príklady

## $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}\to\frac{1}{4},$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4},$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}\to\frac{1}{4}\ \text{pre}\ k\to\infty.$$

$$\Rightarrow\ \int_0^1\frac{x\,dx}{2}$$

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}\to\frac{1}{4},$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4},$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}\to\frac{1}{4}\ \text{pre}\ k\to\infty.$$

$$\Rightarrow\ \int_0^1\frac{x\,dx}{2}=\lim_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}S_T(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}S_H(f,D_k)$$

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}.$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\dots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\dots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\dots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}\to\frac{1}{4},$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\dots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4},$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\dots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}\to\frac{1}{4}\ \text{pre}\ k\to\infty.$$

$$\Rightarrow \int_0^1\frac{x\,dx}{2}=\lim_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}S_T(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\frac{1}{4}.$$

# Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}.$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

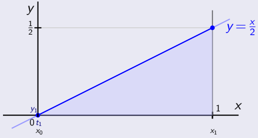
$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$, $t_i=\frac{2i-1}{2k}$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f,D) = \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4}$$

$y_i=m_i=\frac{i-1}{2\cdot 1}$ $\quad i=1$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}=\frac{1}{1}$ $\quad t_i=\frac{i-1}{1}$ $\quad n=1$

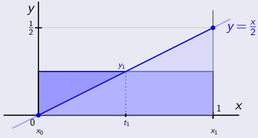



$S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{i-1}{2\cdot 1^2}=0$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f,D) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$y_i=f(t_i)=\frac{2i-1}{4\cdot 1}$ $\quad i=1$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}=\frac{1}{1}$ $\quad t_i=\frac{i}{1}$ $\quad n=1$

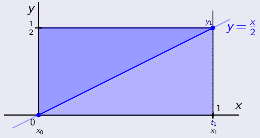



$S_T(f,D)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{2i-1}{4\cdot 1^2}=0.25$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_H(f,D) = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4}$$

$y_i=M_i=\frac{i}{2\cdot 1}$ $\quad i=1$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}=\frac{1}{1}$ $\quad t_i=\frac{i}{1}$ $\quad n=1$




$S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{i}{2\cdot 1^2}=0.5$

# Príklady

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

# Príklady

## $\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x) = x^2$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je rastúca, spojitá

# Príklady

## $\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x) = x^2$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

# Príklady

## $\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$,

# Príklady

## $\int_0^1 x^2\, dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

# Príklady

## $\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$,

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$,

# Príklady

## $\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

# Príklady

## $\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)$

$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)$

# Príklady

## $\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i$$

# Príklady

## $\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2,\ x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}$$

# Príklady

## $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\dots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\dots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

# Príklady

## $\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2,\ x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}$$

# Príklady

## $\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

# Príklady

## $\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

# Príklady

## $\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2} \text{ pre } k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)\\[2ex]\lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)\end{cases}$$

# Príklady

## $\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\{\frac{i}{k}\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}\\[2mm]\lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\end{cases}$$

# Príklady

## $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})(2+\frac{1}{k})}{6}\\[2ex] \lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{k})(2-\frac{1}{k})}{6}\end{cases}$$

# Príklady

## $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2,\ x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})(2+\frac{1}{k})}{6}=\frac{(1+0)(2+0)}{6}\\[2ex]\lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{k})(2-\frac{1}{k})}{6}=\frac{(1-0)(2-0)}{6}\end{cases}$$

# Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})(2+\frac{1}{k})}{6}=\frac{(1+0)(2+0)}{6}=\frac{1}{3},\\ \lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{k})(2-\frac{1}{k})}{6}=\frac{(1-0)(2-0)}{6}=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

# Príklady

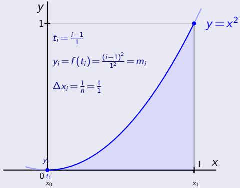
$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}.$$

$f(x)=x^2,\ x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

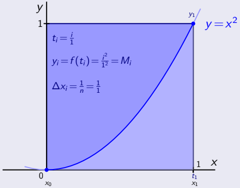
$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].




$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\approx 0.333333$

$n=1$

$i=1$




$S_{T_1}(f,D)=\sum_{i=1}^{1} f(t_i)\Delta x_i=S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{1} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{(i-1)^2}{1^3}=0$

$S_{T_2}(f,D)=\sum_{i=1}^{1} f(t_i)\Delta x_i=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{1} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{i^2}{1^3}=1$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

**$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.**

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b \rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow \quad cf, f+g \in R_{\langle a;b \rangle}$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b \rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b \rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\, x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\, x \in \langle a; b\rangle\}$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf,\, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\, x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\, x \in \langle a; b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\, x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\, x \in \langle a; b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,
pričom $m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $|f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\, x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\, x \in \langle a; b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $|f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, pričom $\inf\{g(x); x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x); x \in \langle a; b\rangle\} < 0$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,
pričom $m = \inf\{f(x);\, x \in \langle a;b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\, x \in \langle a;b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $|f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, pričom $\inf\{g(x); x \in \langle a;b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x); x \in \langle a;b\rangle\} < 0$.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

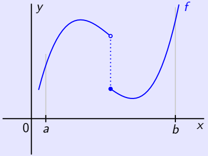
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

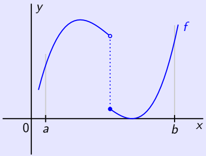
# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

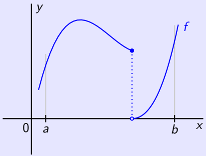
$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$



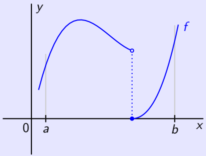

$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b)$



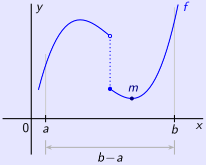

$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a; b\rangle$

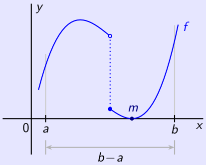
# Vlastnosti Riemannovho integrálu

**$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$.**

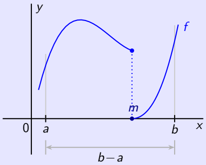
$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$



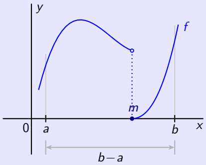
$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$



$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$



$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$



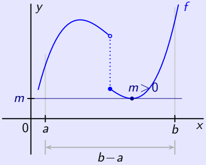
$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$

$$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a;\, b\rangle \quad \Rightarrow \quad m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a;\, b\rangle\} \geq 0$$

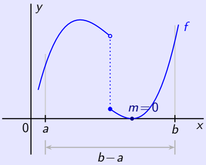
# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

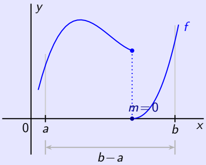
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$



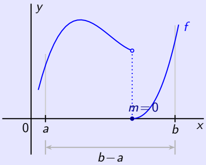

$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



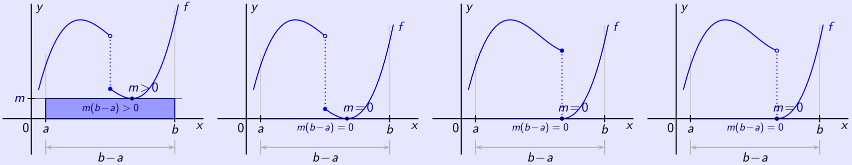

$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

$$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a; b\rangle \quad \Rightarrow \quad m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\} \geq 0$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$




$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ $\quad$ $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ $\quad$ $f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ $\quad$ $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

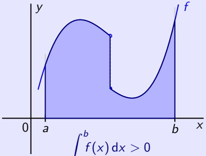
$$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a; b\rangle \quad \Rightarrow \quad m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\} \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad m(b-a) \geq 0.$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

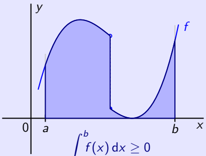
$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$



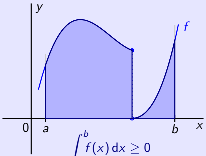

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$



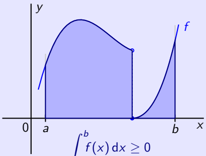

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$




$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b )$




$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$

$$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a; b \rangle \quad \Rightarrow \quad m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b \rangle\} \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq m(b-a) \geq 0.$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

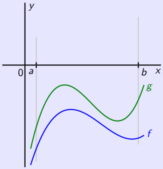
$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

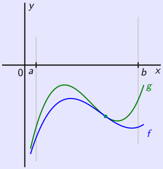
# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

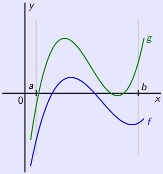
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



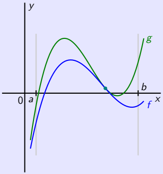

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



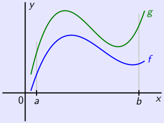

$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



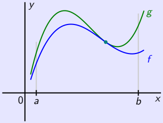

$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

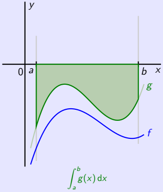



$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

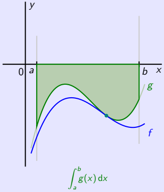
# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

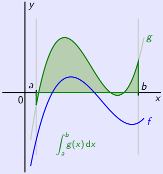
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$



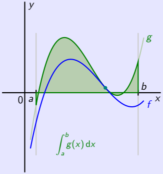

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



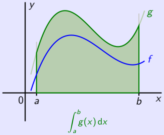

$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



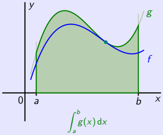

$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

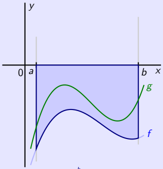



$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

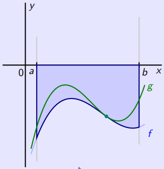
# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

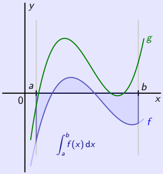
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



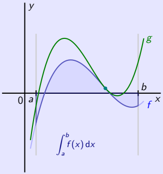

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



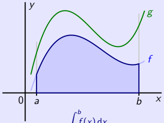

$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



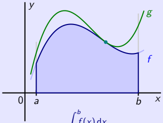

$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

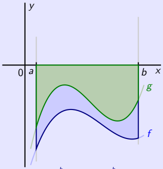



$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

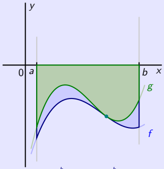
$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



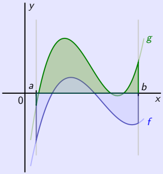

$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

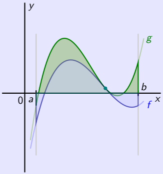



$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

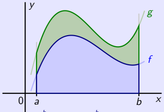
$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

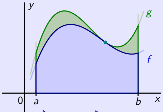



$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



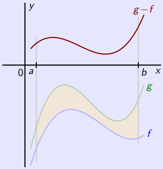

$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

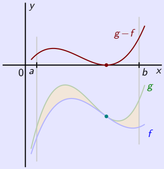
# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

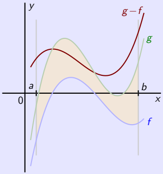
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



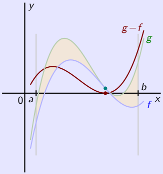

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



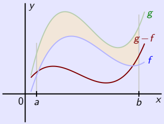

$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



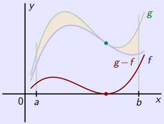

$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

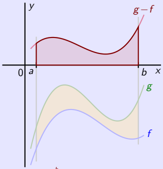



$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

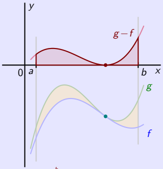
$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$



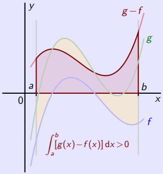

$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx > 0$

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

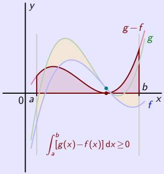



$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0$

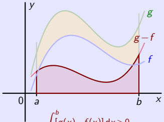
$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

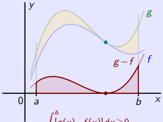



$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx > 0$

$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



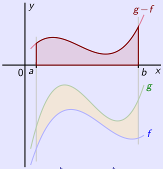

$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0$

$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

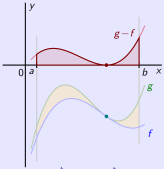
$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



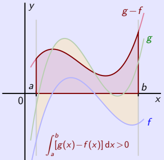

$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



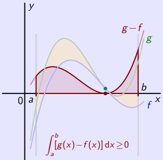

$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



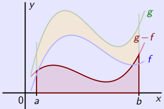

$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



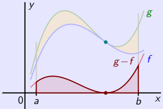

$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



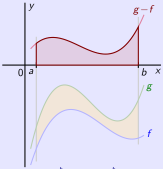

$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

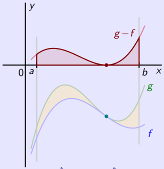
$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



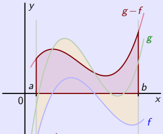

$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

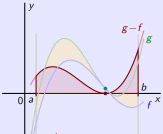
$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x > 0$

$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

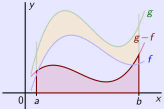
$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$

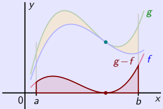
$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

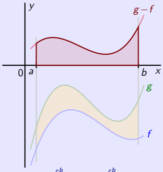
$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

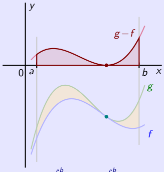
$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$



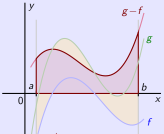

$0 > \int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx$

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$0 > \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$

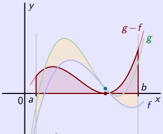
$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx > 0$

$\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx$

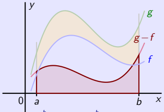
$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0$

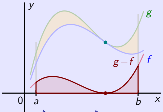
$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$

$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx > 0$

$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$




$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx > 0$

$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ sú ohraničené,

$f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ okrem konečného počtu bodov.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x,\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow\quad g\in R_{\langle a;b\rangle}$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$\Rightarrow \quad g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;\, b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;\, b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;\, b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$\Rightarrow \quad g\in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} g(x)\,dx,\qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow\quad g\in R_{\langle a;b\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.
- Riemannov integrál môžeme definovať pre ohraničenú funkciu,
  nedefinovanú v konečnom počte bodov

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$\Rightarrow \quad g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.
- Riemannov integrál môžeme definovať pre ohraničenú funkciu,
  nedefinovanú v konečnom počte bodov – vrátane krajných bodov $a$, $b$.

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad g \in R_{\langle a;b\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.
- Riemannov integrál môžeme definovať pre ohraničenú funkciu,
  nedefinovanú v konečnom počte bodov – vrátane krajných bodov $a$, $b$.
- Riemannov integrál na intervale $I$ s krajnými bodmi $a$, $b$ môžeme značiť
  $$\int_a^b f(x)\,dx,$$

# Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad g\in R_{\langle a;b\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.
- Riemannov integrál môžeme definovať pre ohraničenú funkciu,
  nedefinovanú v konečnom počte bodov – vrátane krajných bodov $a$, $b$.
- Riemannov integrál na intervale $I$ s krajnými bodmi $a$, $b$ môžeme značiť

$$\int_a^b f(x)\,dx, \text{ resp. } \int_I f(x)\,dx, \int_{\langle a;b\rangle} f(x)\,dx, \int_{\langle a;b)} f(x)\,dx, \int_{(a;b\rangle} f(x)\,dx, \int_{(a;b)} f(x)\,dx.$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $c \in (a; b)$.**

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $c\in(a;b)$.

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

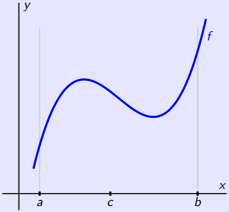
# Aditívnosť Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $c \in (a; b)$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

## Aditívnosť integrálu

$c \in (a; b)$ [ľubovoľný vnútorný bod]



# Aditívnosť Riemannovho integrálu

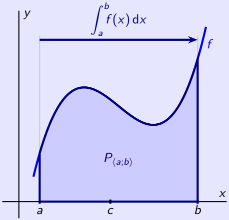
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $c \in (a; b)$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

## Aditívnosť integrálu

$c \in (a; b)$ [ľubovoľný vnútorný bod]

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$



# Aditívnosť Riemannovho integrálu

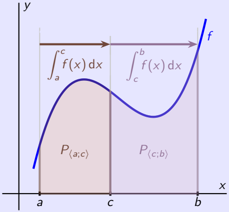
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $c \in (a; b)$.

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

## Aditívnosť integrálu

$c \in (a; b)$ [ľubovoľný vnútorný bod]

$$f \in R_{\langle a;b\rangle} \quad \Leftrightarrow \quad f \in R_{\langle a;c\rangle},\ f \in R_{\langle c;b\rangle}$$



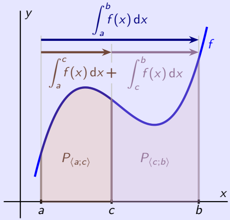
# Aditívnosť Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $c\in(a;b)$.

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^c} f(x)\,dx+\underline{\int_c^b} f(x)\,dx,\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^c} f(x)\,dx+\overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

**Aditívnosť integrálu** $c\in(a;b)$ [ľubovoľný vnútorný bod]

$$f\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle a;c\rangle},\ f\in R_{\langle c;b\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$



# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$,

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

**$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.**

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

**$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.**

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

**$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.**

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[Aditívnosť nezávisí od vzájomnej polohy $a,b,c$.]

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

**$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.**

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[Aditívnosť nezávisí od vzájomnej polohy $a,b,c$.]

Aditívnosť môžeme názorne ilustrovať na vektoroch,

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a \rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[Aditívnosť nezávisí od vzájomnej polohy $a,b,c$.]

Aditívnosť môžeme názorne ilustrovať na vektoroch, napr.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

**$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.**

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[Aditívnosť nezávisí od vzájomnej polohy $a,b,c$.]

Aditívnosť môžeme názorne ilustrovať na vektoroch, napr.

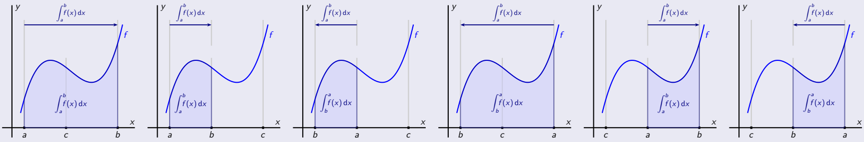
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx,$$

resp. $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{bc}$.

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

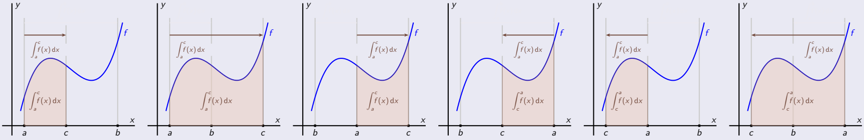



$a < c < b$ $a < b < c$ $b < a < c$ $b < c < a$ $c < a < b$ $c < b < a$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

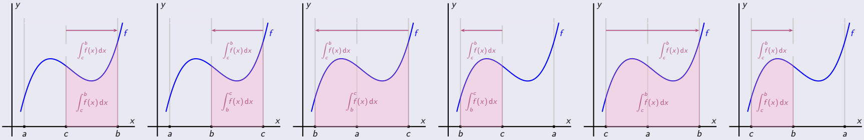


$a<c<b$ $\quad$ $a<b<c$ $\quad$ $b<a<c$ $\quad$ $b<c<a$ $\quad$ $c<a<b$ $\quad$ $c<b<a$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

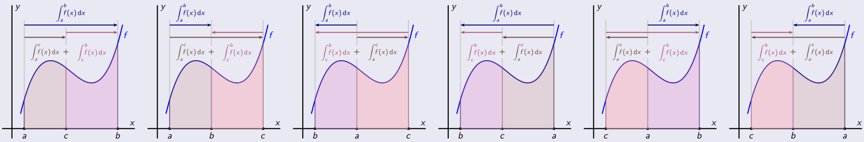


$a < c < b$ $\quad$ $a < b < c$ $\quad$ $b < a < c$ $\quad$ $b < c < a$ $\quad$ $c < a < b$ $\quad$ $c < b < a$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

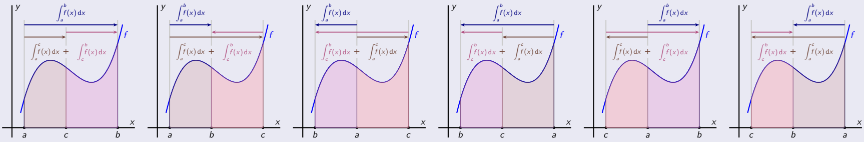


$a<c<b$ $\quad a<b<c$ $\quad b<a<c$ $\quad b<c<a$ $\quad c<a<b$ $\quad c<b<a$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$a < c < b$ $a < b < c$ $b < a < c$ $b < c < a$ $c < a < b$ $c < b < a$

Zvyšné možnosti $a = b = c$, $a = b < c$, ..., $a < b = c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

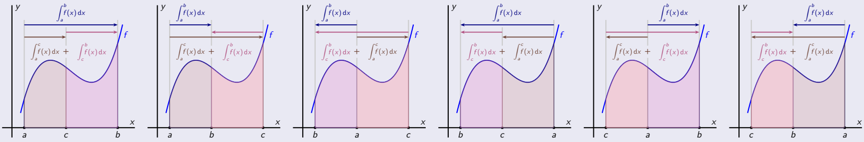
$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, ..., $f \in R_{I_k}$. Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na množine $A$ definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{I_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{I_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, $\ldots$, $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

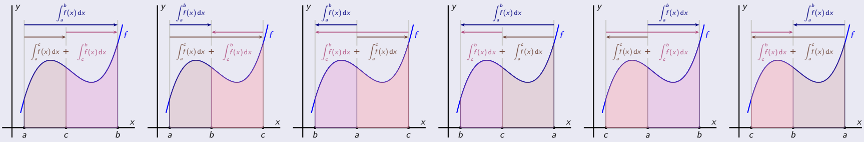
$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné ($I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, $\ldots$, $f \in R_{I_k}$. Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na množine $A$ definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f\in R_I$, $I\subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c\in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

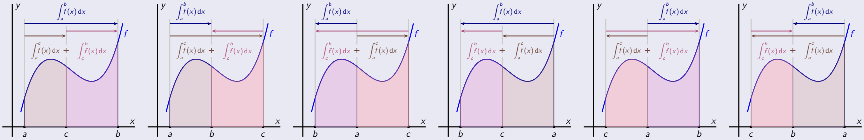
Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, $\ldots$, $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

$A = I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k\in N$ sú nedegenerované ohraničené

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, $\ldots$, $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

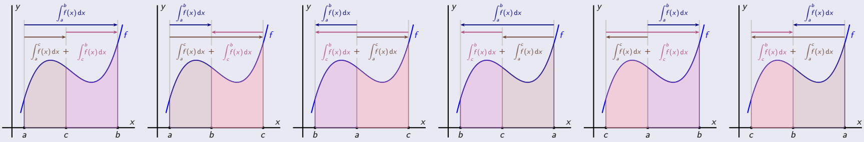
$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, $\ldots$, $f \in R_{I_k}$. Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na množine $A$ definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a<c<b$ $\quad$ $a<b<c$ $\quad$ $b<a<c$ $\quad$ $b<c<a$ $\quad$ $c<a<b$ $\quad$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, $\ldots$, $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, $\ldots$, $f \in R_{I_k}$.

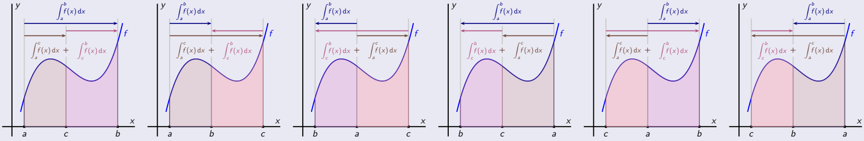
Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na množine $A$ definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f\in R_I$, $I\subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a,b,c\in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



$a<c<b$ $\quad$ $a<b<c$ $\quad$ $b<a<c$ $\quad$ $b<c<a$ $\quad$ $c<a<b$ $\quad$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, $\ldots$, $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

$A=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k\in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i\cap I_j=\emptyset$ pre $i\neq j$) intervaly, $f\in R_{I_1}$, $f\in R_{I_2}$, $\ldots$, $f\in R_{I_k}$.

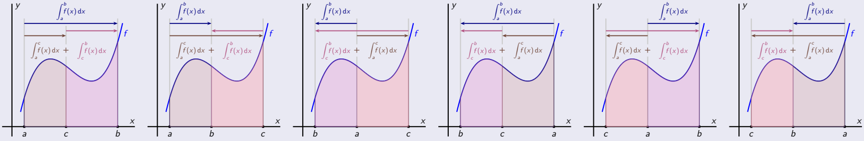
Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na množine $A$ definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{I_1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{I_2} f(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

# Aditívnosť Riemannovho integrálu

**Aditívnosť** $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, ..., $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

$A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \dots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, ..., $f \in R_{I_k}$.
Riemannov (určitý) integrál funkcie $f$ na množine $A$ definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

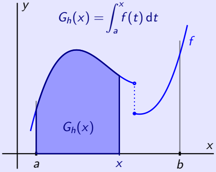
# Výpočet Riemannovho integrálu

## Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ $f \in R_{\langle a;b\rangle}$

# Výpočet Riemannovho integrálu

## Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ — $f \in R_{\langle a;b\rangle}$

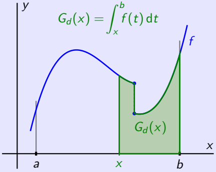
Funkcia $G_h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).



# Výpočet Riemannovho integrálu

## Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_d(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

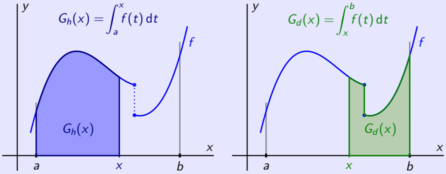


# Výpočet Riemannovho integrálu

## Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva
integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva
integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).



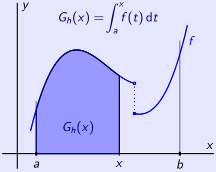
# Výpočet Riemannovho integrálu

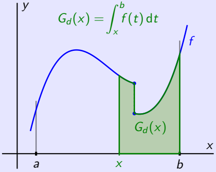
## Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva
integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva
integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$
plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou $f$ a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.



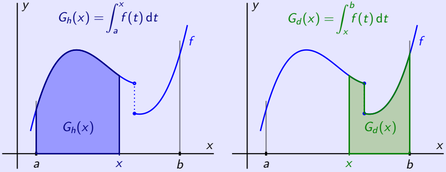
# Výpočet Riemannovho integrálu

## Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva
integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva
integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$
plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou $f$ a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.




$$G_h(a) = 0 = G_d(b).$$

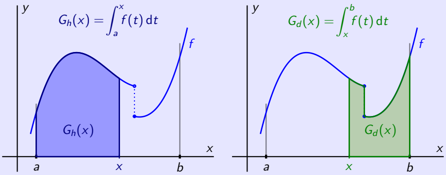
# Výpočet Riemannovho integrálu

**Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$** $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$ plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou $f$ a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.




$$G_h(a) = 0 = G_d(b).$$

$$G_h(b) = \int_a^b f(t)\,dt = G_d(a).$$

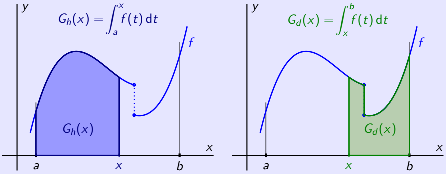
# Výpočet Riemannovho integrálu

## Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$ $f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$ plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou $f$ a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.




$$G_h(a) = 0 = G_d(b).$$

$$G_h(b) = \int_a^b f(t)\,dt = G_d(a).$$

$$G_h(x)+G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

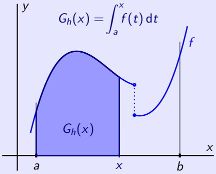
**Neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na intervale $\langle a; b\rangle$** $f \in R_{\langle a;b\rangle}$

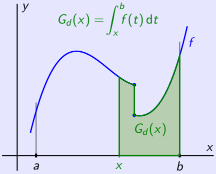
Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva
integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva
integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Funkciu $G_h$, resp. $G_d$ nazývame tiež neurčitý Riemannov integrál funkcie $f$ na $\langle a; b\rangle$.

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$
plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou $f$ a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.




$$G_h(a) = 0 = G_d(b).$$

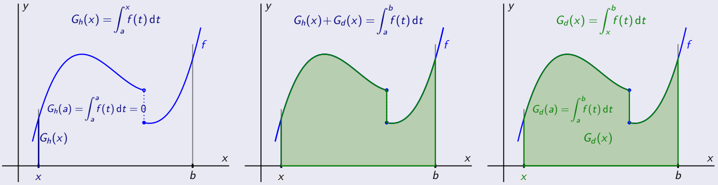
$$G_h(b) = \int_a^b f(t)\,dt = G_d(a).$$

$$G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

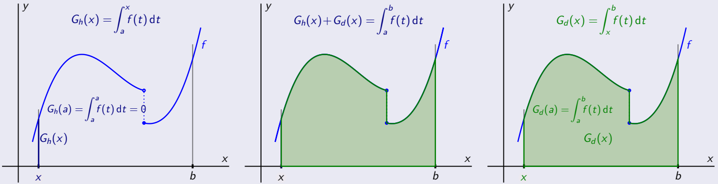
$$\Rightarrow G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



# Výpočet Riemannovho integrálu

## $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow G_h(a)=G_d(b)=0, \quad G_h(b)=G_d(a)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G_h(x)+G_d(x)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

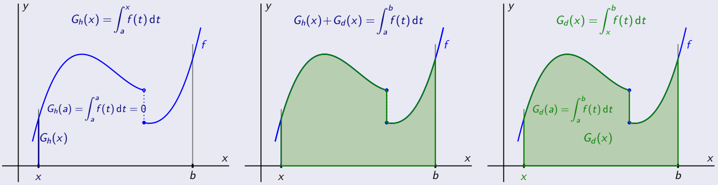



## $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

# Výpočet Riemannovho integrálu

## $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



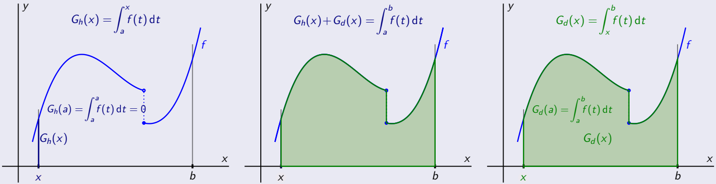

## $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

- $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt = G_h(d) - G_h(c),$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



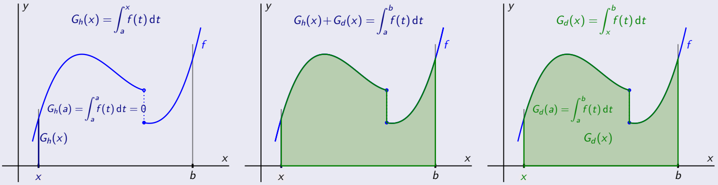

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

- $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt = G_h(d) - G_h(c), \quad \int_c^d f(t)\,dt = G_d(c) - G_d(d).$

# Výpočet Riemannovho integrálu

## $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



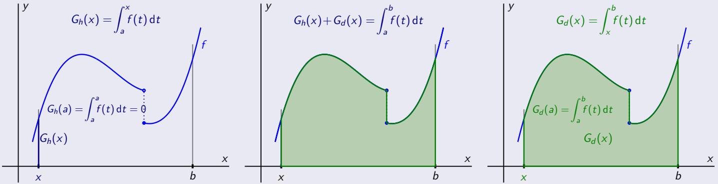

## $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

- $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt = G_h(d) - G_h(c), \quad \int_c^d f(t)\,dt = G_d(c) - G_d(d).$
- Funkcie $G_h$, $G_d$ sú spojité na $\langle a; b\rangle$.

# Výpočet Riemannovho integrálu

## $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$




## $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

- $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt = G_h(d) - G_h(c), \qquad \int_c^d f(t)\,dt = G_d(c) - G_d(d).$
- Funkcie $G_h$, $G_d$ sú spojité na $\langle a; b\rangle$.
- Funkcie $G_h$, $-G_d$ sú primitívne k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b \rangle$.

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

## Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$.

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \text{ ozn. } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$,

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

## Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ ozn. } \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je primitívna k $f$,

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je primitívna k $f$, $F(1) = \frac{1}{4}$,

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je primitívna k $f$, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

## Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je primitívna k $f$, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

V praxi píšeme priamo: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1$

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

## Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

## $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je primitívna k $f$, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

V praxi píšeme priamo: $$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

**Newton-Leibnizov vzorec**

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b \rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ ozn. } \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je primitívna k $f$, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

V praxi píšeme priamo: $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4}$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

## Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

## $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0; 1\rangle$, $F(x)=\frac{x^2}{2\cdot 2}+c$, $x\in\langle 0; 1\rangle$ je primitívna k $f$, $F(1)=\frac{1}{4}$, $F(0)=0$.

V praxi píšeme priamo: $$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{1}{4} - 0$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

## Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $F$ je ľubovoľná primitívna funkcia k $f$ na $\langle a;b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre $f$ a $F$. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

## $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$, $F(x)=\frac{x^2}{2\cdot 2}+c$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je primitívna k $f$, $F(1)=\frac{1}{4}$, $F(0)=0$.

V praxi píšeme priamo: $$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$\int_{-1}^0 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$\int_{-1}^0 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0$$

$$\int_{-1}^0 x^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3}$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

# Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \tfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$

# Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \tfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{2\pi}$$

# Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 - 0$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = 0$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= \Big[ \ln |x| \Big]_{-1}^{1}$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

$$= \Big[ \ln |x| \Big]_{-1}^{1} = \ln |1| - \ln |-1|$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

$$= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

$$= \Big[ \ln |x| \Big]_{-1}^{1} = \ln |1| - \ln |-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\xcancel{= \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$,

# Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, x \, dx$$

# Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$~~= \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.~~$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

# Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln |x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big) dx$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big) \mathrm{d}x$$

$$= \Big[\operatorname{tg} x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big) dx$$

$$= \Big[ \operatorname{tg} x - x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0)$$

# Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \Big( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big) dx$$

$$= \Big[ \operatorname{tg} x - x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4} - (0 - 0)$$

# Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[ \ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \Big( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big) dx$$

$$= \Big[ \operatorname{tg} x - x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4} - (0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

# Metóda per partes

## Metóda per partes $\quad u, v \in R_{\langle a;b \rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b \rangle}.$

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

# Metóda per partes

## Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

# Metóda per partes

**Metóda per partes** $u, v \in R_{\langle a;b \rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b \rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[ u(x)\, v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned} u(x)v(x) &= \int \big[ u(x)v(x) \big]' \, \mathrm{d}x \\ &= \int \big[ u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \big] \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

# Metóda per partes

**Metóda per partes** $u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x$$

# Metóda per partes

## Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

# Metóda per partes

## Metóda per partes $u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \Big[u(x)v(x)\Big]'\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\Big]\, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

## $\int_0^{2\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$

# Metóda per partes

## Metóda per partes

$u,\, v \in R_{\langle a;b\rangle},\ u',\, v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \Big[u(x)v(x)\Big]'\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

## $\int_0^{2\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right]$$

# Metóda per partes

**Metóda per partes** $u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$$

# Metóda per partes

## Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle},\ u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

## $\int_0^{2\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= \Big[-2\pi\cos 2\pi + 0\cdot\cos 0\Big] + \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

# Metóda per partes

**Metóda per partes** $u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[-2\pi\cos 2\pi + 0\cdot\cos 0\Big] + \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi} = -2\pi + \Big[\sin 2\pi - \sin 0\Big]$$

# Metóda per partes

## Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \ u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

## $\int_0^{2\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = -2\pi$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= \Big[-2\pi\cos 2\pi + 0\cdot\cos 0\Big] + \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi} = -2\pi + \Big[\sin 2\pi - \sin 0\Big] = -2\pi.$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[ -x^2 \cos x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix}$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x)\, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big]$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x)\, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big]$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x)\, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x\cos x)\, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x\cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 \cos 2\pi + 2 \cdot 2\pi \sin 2\pi + 2\cos 2\pi - (-4 \cdot 0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2\cos 0)$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[ -x^2 \cos x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[ -4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0) \Big] + 2 \int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right]$$

$$= \Big[ -4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \Big] + 2 \left[ \Big[ x \sin x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \right]$$

$$= -4\pi^2 + 2 \Big[ 2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0 \Big] - 2 \Big[ -\cos x \Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2 \Big[ 2\pi \cdot 0 - 0 \Big] - 2 \Big[ -\cos 2\pi + \cos 0 \Big] = -4\pi^2 + 0 - 2 \Big[ -1 + 1 \Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[ -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 \cos 2\pi + 2 \cdot 2\pi \sin 2\pi + 2 \cos 2\pi - (-4 \cdot 0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2 \cos 0)$$

$$= -4\pi^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot 1 - (0 + 0 + 2 \cdot 1)$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 \cos 2\pi + 2 \cdot 2\pi \sin 2\pi + 2\cos 2\pi - (-4 \cdot 0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2\cos 0)$$

$$= -4\pi^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot 1 - (0 + 0 + 2 \cdot 1) = -4\pi^2 + 2 - 2$$

# Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[ -x^2 \cos x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[ -4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0) \Big] + 2 \int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right]$$

$$= \Big[ -4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \Big] + 2 \left[ \Big[ x \sin x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \right]$$

$$= -4\pi^2 + 2 \Big[ 2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0 \Big] - 2 \Big[ -\cos x \Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2 \Big[ 2\pi \cdot 0 - 0 \Big] - 2 \Big[ -\cos 2\pi + \cos 0 \Big] = -4\pi^2 + 0 - 2 \Big[ -1 + 1 \Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[ -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 \cos 2\pi + 2 \cdot 2\pi \sin 2\pi + 2 \cos 2\pi - (-4 \cdot 0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2 \cos 0)$$

$$= -4\pi^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot 1 - (0 + 0 + 2 \cdot 1) = -4\pi^2 + 2 - 2 = -4\pi^2.$$

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y = f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x = \varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J) \subset I$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow \quad f(\varphi)\varphi' \in R_J$

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a$, $b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi'\in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Metódu môžeme použiť obomi smermi ($f$ je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a$, $b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi ($f$ je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y = f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x = \varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J) \subset I$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi ($f$ je spojitá na $I \Rightarrow f \in R_I$).

Pre $y = f(x)$, $x \in I$ ohraničenú a pre $x = \varphi(t)$, $t \in J$ rýdzo monotónnu,

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi'\in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi ($f$ je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu, môžeme metódu substitúcie zovšeobecniť.

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi'\in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi ($f$ je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu,

môžeme metódu substitúcie zovšeobecniť.

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je ohraničená na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$.

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi'\in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi ($f$ je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu, môžeme metódu substitúcie zovšeobecniť.

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je ohraničená na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$.

$\Rightarrow$ $f\in R_I \Leftrightarrow f(\varphi)\cdot\varphi'\in R_J$

# Metóda substitúcie

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je spojitá na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'$ je spojitá na $J$.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi'\in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi ($f$ je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu, môžeme metódu substitúcie zovšeobecniť.

**Metóda substitúcie** $y=f(x)$ je ohraničená na intervale $I$ s hranicami $a, b$, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale $J$ s hranicami $\alpha, \beta$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$.

$\Rightarrow$ $f\in R_I \Leftrightarrow f(\varphi)\cdot\varphi'\in R_J$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \;\;\mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in \langle -1; 1 \rangle & x = 1 \ \ \mapsto t = \frac{\pi}{2} & 1 = \sin \frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\, dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle & x = -1 \mapsto t = -\frac{\pi}{2} & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I = \langle -1; 1 \rangle$, $x = \varphi(t) = \sin t$ má na $J = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t) = \cos t$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \ \ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.}\ \ x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|c|c}\text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1\ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t\\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle\end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in \langle -1; 1 \rangle & x = 1 \;\; \mapsto t = \frac{\pi}{2} & 1 = \sin \frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\, dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle & x = -1 \mapsto t = -\frac{\pi}{2} & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\, dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2} \right) \right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I = \langle -1; 1 \rangle$, $x = \varphi(t) = \sin t$ má na $J = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t) = \cos t$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.}\ \ x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \ \ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

# Metóda substitúcie

## $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.} \quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \;\;\mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

# Metóda substitúcie

## $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \;\;\mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

---

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1}$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \;\mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2} + \frac{\arcsin 1}{2} - \left(\frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2} + \frac{\arcsin(-1)}{2}\right)$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1\ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

---

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$=\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2}+\frac{\arcsin 1}{2}-\left(\frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2}+\frac{\arcsin(-1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot 0}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}}{2}-\left(\frac{-1\cdot 0}{2}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{Subst.}\ \ x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$=\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2}+\frac{\arcsin 1}{2}-\left(\frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2}+\frac{\arcsin(-1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot 0}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}}{2}-\left(\frac{-1\cdot 0}{2}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0+\frac{\pi}{4}-0+\frac{\pi}{4}$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1\ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

---

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$=\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2}+\frac{\arcsin 1}{2}-\left(\frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2}+\frac{\arcsin(-1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot 0}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}}{2}-\left(\frac{-1\cdot 0}{2}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0+\frac{\pi}{4}-0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) \mathrm{d}t$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) \mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right]$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\,dt$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sin x\,dx$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\,dt$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_{2}^{5}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) \mathrm{d}t$$

$$= \left[ \begin{array}{l|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \frac{\cos 5-\cos 2}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5+\cos 2\Big] = \frac{\cos 5-\cos 2}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) dt = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 2 \rangle & t=2 \mapsto x = 2^2+1 = 5 \\ dx = 2\,dt & x \in \langle 1; 5 \rangle & t=-1 \mapsto x = (-1)^2+1 = 2 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_{2}^{5} \sin x \, dx = \frac{1}{2} \Big[ -\cos x \Big]_{2}^{5}$$

$$= \frac{1}{2} \Big[ -\cos 5 + \cos 2 \Big] = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x) = \sin x$ je spojitá na $I = \langle 2; 5 \rangle$, $x = \varphi(t) = t^2+1$ má na $J = \langle -1; 2 \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t) = 2t$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(-1) = 2$, $\varphi(2) = 5$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos t \, dt$$

$$\left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & t \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle & t = \frac{\pi}{2} \mapsto x = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ dx = \cos t \, dt & x \in \langle 0; 1 \rangle & t = 0 \mapsto x = \sin 0 = 0 \end{array} \right]$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) dt = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\, dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos t\, dt$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & t\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x=\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ dx=\cos t\, dt & x\in\langle 0;1\rangle & t=0 \mapsto x=\sin 0=0 \end{array}\right]$$

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\, dt = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 2\rangle & t=2 \mapsto x = 2^2+1 = 5 \\ dx = 2\,dt & x \in \langle 1; 5\rangle & t=-1 \mapsto x = (-1)^2+1 = 2 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_{2}^{5} \sin x\, dx = \frac{1}{2} \Big[ -\cos x \Big]_{2}^{5}$$

$$= \frac{1}{2} \Big[ -\cos 5 + \cos 2 \Big] = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x) = \sin x$ je spojitá na $I = \langle 2; 5\rangle$, $x = \varphi(t) = t^2+1$ má na $J = \langle -1; 2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t) = 2t$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(-1) = 2$, $\varphi(2) = 5$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos t\, dt$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle & t = \frac{\pi}{2} \mapsto x = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ dx = \cos t\, dt & x \in \langle 0; 1\rangle & t = 0 \mapsto x = \sin 0 = 0 \end{array} \right] = \int_{0}^{1} x^3\, dx$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x) = x^3$ je spojitá na $I = \langle 0; 1\rangle$, $x = \varphi(t) = \sin t$ má na $J = \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t) = \cos t$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \frac{\cos 5-\cos 2}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5+\cos 2\Big] = \frac{\cos 5-\cos 2}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cdot\cos t\,dt$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x=\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ dx=\cos t\,dt & x\in\langle 0;1\rangle & t=0 \mapsto x=\sin 0=0 \end{array}\right] = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=x^3$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t\sin\left(t^2+1\right)\mathrm{d}t = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_{2}^{5}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & t\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x=\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & x\in\langle 0;1\rangle & t=0 \mapsto x=\sin 0=0 \end{array}\right] = \int_{0}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=x^3$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\,dt = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 2\rangle & t=2 \mapsto x = 2^2+1=5 \\ dx = 2\,dt & x \in \langle 1; 5\rangle & t=-1 \mapsto x = (-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos t\,dt = \frac{1}{4}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x = \sin\frac{\pi}{2}=1 \\ dx = \cos t\,dt & x \in \langle 0; 1\rangle & t=0 \mapsto x = \sin 0=0 \end{array}\right] = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=x^3$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x}$$

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e \rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right]$$

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e \rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; e \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(e) = 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e\rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1\rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1\rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(e) = 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{x}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;\mathrm{e}\rangle & x=\mathrm{e}\mapsto t=\ln \mathrm{e}=1 \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;\mathrm{e}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(\mathrm{e})=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e\rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1\rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1\rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(e) = 1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;e\rangle & x=e\mapsto t=\ln e=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array}\right] = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(e)=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,dx = \int_\pi^0 \sin^2 x\cdot\sin x\,dx$$

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e \rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; e \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(e) = 1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x \, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_\pi^0 (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e \rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; e \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(e) = 1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x \, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_\pi^0 (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \cos x & x \in \langle 0; \pi \rangle & x = 0 \mapsto t = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x \, dx & t \in \langle -1; 1 \rangle & x = \pi \mapsto t = \cos \pi = -1 \end{array} \right]$$

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x\, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1; e\rangle & x=e \mapsto t=\ln e=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1 \mapsto t=\ln 1=0 \end{array} \right] = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(e)=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x\, dx$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x) \sin x\, dx = \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\langle 0;\pi\rangle & x=0 \mapsto t=\cos 0=1 \\ dt=-\sin x\, dx & t\in\langle -1;1\rangle & x=\pi \mapsto t=\cos\pi=-1 \end{array} \right] = -\int_{-1}^{1} (1-t^2)\, dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \,dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;e\rangle & x=e\mapsto t=\ln e=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array} \right] = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(e)=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,dx = \int_\pi^0 \sin^2 x\cdot\sin x\,dx$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\langle 0;\pi\rangle & x=0\mapsto t=\cos 0=1 \\ dt=-\sin x\,dx & t\in\langle -1;1\rangle & x=\pi\mapsto t=\cos\pi=-1 \end{array} \right] = -\int_{-1}^1 (1-t^2)\,dt$$

$$= \int_1^{-1} (1-t^2)\,dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;\mathrm{e}\rangle & x=\mathrm{e}\mapsto t=\ln\mathrm{e}=1 \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array}\right] = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;\mathrm{e}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(\mathrm{e})=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int_\pi^0 \sin^2 x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\langle 0;\pi\rangle & x=0\mapsto t=\cos 0=1 \\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x & t\in\langle -1;1\rangle & x=\pi\mapsto t=\cos\pi=-1 \end{array}\right] = -\int_{-1}^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^{-1} (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;e\rangle & x=e\mapsto t=\ln e=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array}\right] = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(e)=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,dx = \int_\pi^0 \sin^2 x\cdot\sin x\,dx$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\langle 0;\pi\rangle & x=0\mapsto t=\cos 0=1 \\ dt=-\sin x\,dx & t\in\langle -1;1\rangle & x=\pi\mapsto t=\cos\pi=-1 \end{array}\right] = -\int_{-1}^1 (1-t^2)\,dt$$

$$= \int_1^{-1} (1-t^2)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} = \left[-1-\frac{(-1)^3}{3} - \left(1-\frac{1^3}{3}\right)\right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^e \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e \rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; e \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(e) = 1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x \, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_\pi^0 (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \cos x & x \in \langle 0; \pi \rangle & x = 0 \mapsto t = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x \, dx & t \in \langle -1; 1 \rangle & x = \pi \mapsto t = \cos \pi = -1 \end{array} \right] = -\int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt$$

$$= \int_1^{-1} (1 - t^2) \, dt = \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} = \left[ -1 - \frac{(-1)^3}{3} - \left( 1 - \frac{1^3}{3} \right) \right] = -2 + \frac{2}{3}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = 1 - t^2$ je spojitá na $I = \langle -1; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \cos x$ má na $J = \langle 0; \pi \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = -\sin x$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\pi) = -1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e \rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; e \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(e) = 1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x \, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = -\frac{4}{3}$$

$$= \int_\pi^0 (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \cos x & x \in \langle 0; \pi \rangle & x = 0 \mapsto t = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x \, dx & t \in \langle -1; 1 \rangle & x = \pi \mapsto t = \cos \pi = -1 \end{array} \right] = -\int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt$$

$$= \int_1^{-1} (1 - t^2) \, dt = \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} = \left[ -1 - \frac{(-1)^3}{3} - \left( 1 - \frac{1^3}{3} \right) \right] = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = 1 - t^2$ je spojitá na $I = \langle -1; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \cos x$ má na $J = \langle 0; \pi \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = -\sin x$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\pi) = -1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right]$$

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,e^{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\, e^{1-x^2}\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\, du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\, du$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1 \mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0 \mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\,\mathrm{e}^u\,\Big]_0^1$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\, e^{1-x^2}\, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array} \right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\Big[\, e^u \,\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\, e^1 - e^0 \,\Big]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\,\mathrm{e}^u\,\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\,\Big] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\,\mathrm{e}^u\,\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\,\Big] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\mathrm{tg}\,1}^{\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,e^{1-x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^1 - e^0\Big] = \frac{e-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg} 1}^{\operatorname{tg}\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\left\langle \operatorname{tg} 1; \operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ dt=\frac{dx}{x^2+1} & t\in\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg} 1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg} 1=1 \end{array}\right]$$

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,e^{1-x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1 \mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\Big[\,e^u\,\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,e^1-e^0\,\Big] = \frac{e-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg} 1}^{\operatorname{tg}\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\left\langle \operatorname{tg} 1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}\frac{3}{2} \mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ dt=\frac{dx}{x^2+1} & t\in\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg} 1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg} 1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\left\langle \operatorname{tg} 1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\operatorname{tg} 1)=1$, $\varphi(\operatorname{tg}\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,e^{1-x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\Big[\,e^u\,\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,e^1-e^0\,\Big] = \frac{e-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg} 1}^{\operatorname{tg}\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\langle \operatorname{tg} 1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\rangle & x=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ dt=\frac{dx}{x^2+1} & t\in\langle 1;\frac{3}{2}\rangle & x=\operatorname{tg} 1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg} 1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array}\right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\langle 1;\frac{3}{2}\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\langle \operatorname{tg} 1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\operatorname{tg} 1)=1$, $\varphi(\operatorname{tg}\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,e^{1-x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\Big[\,e^u\,\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,e^1 - e^0\,\Big] = \frac{e-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg} 1}^{\operatorname{tg}\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\left\langle \operatorname{tg}1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ dt=\frac{dx}{x^2+1} & t\in\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg}1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array}\right]$$

$$= \Big[t\ln t\Big]_1^{\frac{3}{2}} - \int_1^{\frac{3}{2}} dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\left\langle \operatorname{tg}1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\operatorname{tg}1)=1$, $\varphi(\operatorname{tg}\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\,\mathrm{e}^u\,\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\,\Big] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg}1}^{\operatorname{tg}\frac{3}{2}} \frac{\ln\operatorname{arctg}x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg}x & x\in\left\langle\operatorname{tg}1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} & t\in\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg}1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array}\right]$$

$$= \Big[\,t\ln t\,\Big]_1^{\frac{3}{2}} - \int_1^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{3}{2}\cdot\ln\tfrac{3}{2}-1\cdot\ln 1\Big] - \left(\tfrac{3}{2}-1\right)$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg}x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\left\langle\operatorname{tg}1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\operatorname{tg}1)=1$, $\varphi(\operatorname{tg}\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

# Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\,e^{1-x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^1 - e^0\Big] = \frac{e-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\mathrm{tg}\,1}^{\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3\ln 3 - 3\ln 2 - 1}{2} = \frac{\ln 27 - \ln 8 - \ln e}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{27}{8\,e} = \ln\sqrt{\frac{27}{8\,e}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\langle \mathrm{tg}\,1;\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\rangle & x=\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ dt=\frac{dx}{x^2+1} & t\in\langle 1;\frac{3}{2}\rangle & x=\mathrm{tg}\,1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg} 1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array}\right]$$

$$= \Big[t\ln t\Big]_1^{\frac{3}{2}} - \int_1^{\frac{3}{2}} dt = \Big[\tfrac{3}{2}\cdot\ln\tfrac{3}{2} - 1\cdot\ln 1\Big] - \left(\tfrac{3}{2}-1\right) = \frac{3}{2}\cdot\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\langle 1;\frac{3}{2}\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\langle \mathrm{tg}\,1;\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\mathrm{tg}\,1)=1$, $\varphi(\mathrm{tg}\,\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b \rangle}$.

$\Rightarrow$ $f(-x) \in R_{\langle -b;-a \rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x=-t & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a \mapsto t=-a & x=b \mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x=-t & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

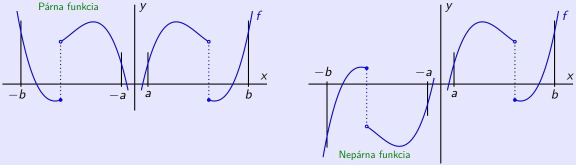
# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x)\in R_{\langle -b;-a\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x=-t & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ x\in\langle a;\, b\rangle & t\in\langle -b;\, -a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

- $f\in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna.
- $f\in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna.



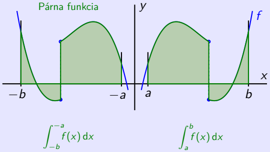
# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

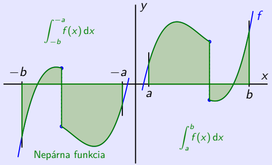
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\qquad \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\qquad \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$



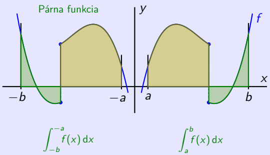
# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

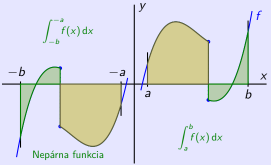
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x=-t & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\qquad \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\qquad \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x$



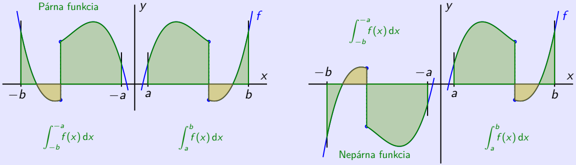
# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a \mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$



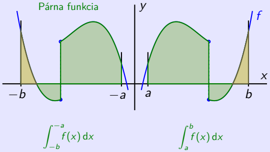
# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

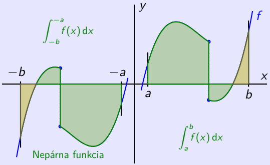
$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $f(-x)\in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\ \ x=-t & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

- $f\in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x$
- $f\in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x$



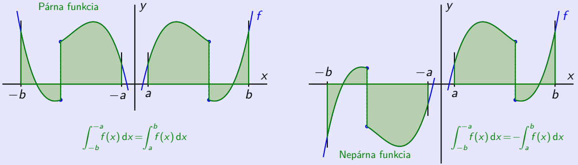
# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x=-t & \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x.$



# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

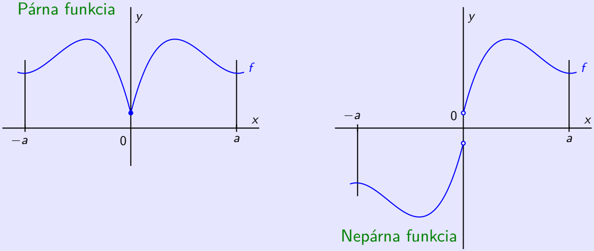
$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

$f$ je párna

$f$ je nepárna

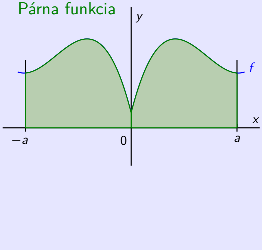


# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

$f$ je párna $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$

$f$ je nepárna $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$

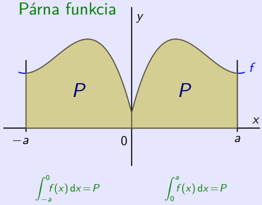


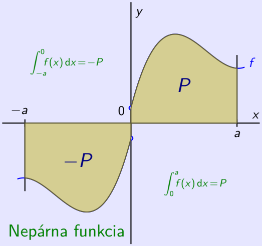
# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

$f$ je párna $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$f$ je nepárna $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$



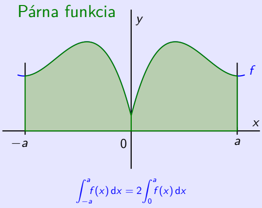



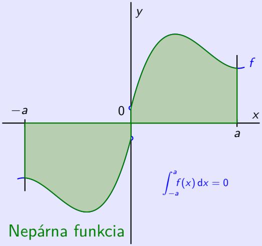
# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

$$f \text{ je párna} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

$$f \text{ je nepárna} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$



# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx$$

$$= \left[ f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle \quad \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ \end{array}\right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2 (-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin |x|\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi; \pi\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi; \pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_{0}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi; \pi\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{\pi} \sin|x|\, dx = \left[ \begin{array}{c} x \in \langle 0; \pi\rangle, \ |x|=x \\ \sin|x| = \sin x \end{array} \right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_0^{\pi}\sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x \end{array}\right]$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_0^{\pi}\sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x \end{array}\right]$$

$$=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna}\end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna}\end{array}\right] = 2\int_0^{\pi}\sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x\end{array}\right]$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi}$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna}\end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna}\end{array}\right] = 2\int_0^{\pi}\sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x\end{array}\right]$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos\pi - \cos 0\Big]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{\pi} \sin|x|\, dx = \left[ \begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x \end{array} \right]$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos\pi - \cos 0\Big]$$

$$= -2\Big[-1-1\Big]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_0^{\pi}\sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x \end{array}\right]$$

$$=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos\pi - \cos 0\Big]$$

$$=-2\Big[-1-1\Big] = (-2)\cdot(-2)$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 4$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_0^{\pi}\sin|x|\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x \end{array}\right]$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos\pi - \cos 0\Big]$$

$$= -2\Big[-1-1\Big] = (-2)\cdot(-2) = 4.$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, dx$$

$$= \left[ f(x) = x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \;\middle|\; g(x) = \sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle \Rightarrow g \in R_{\langle -1;1\rangle} \right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\,\mathrm{d}x$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, \mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow g \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\, \mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\, \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^4\, \mathrm{d}x - 0$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow g \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\, dx - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\, dx = 2\int_{0}^{1} x^4\, dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x^2\,dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx = 2\int_0^1 x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ & \end{array}\right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx = 2\int_0^1 x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x^2\,dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4-\sin^3 4x)\,dx=\frac{2}{5}$$

$$=\left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$=\int_{-1}^{1}x^4\,dx-\int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx=2\int_{0}^{1}x^4\,dx-0=2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=2\left[\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right]=\frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x^2\,dx=0$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right]=0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x^2\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=x\cos x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ & \end{array}\right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, dx = \tfrac{2}{5}$$

$$= \left[ \begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\, dx - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\, dx = 2\int_{0}^{1} x^4\, dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x^2\, dx = 0$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x^2\, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} f(x)=x\cos x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\cos(-x)^2=-x\cos x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x^2\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\cos x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\cos(-x)^2=-x\cos x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[ f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi; 2\pi\rangle} \right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi; 2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \begin{bmatrix} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi; 2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{bmatrix} = 2 \int_{0}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi; 2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad\qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_{0}^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

---

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= 2\Big[-x \cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$$

---

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x \cos x\Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x \, dx$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[ \begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= 2\Big[-x \cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 2\Big[-2\pi \cos 2\pi + 0 \cdot \cos 0\Big] + 2\Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

---

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x \cos x\Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x \, dx$$

$$= \Big[-2\pi \cos 2\pi + (-2\pi) \cos(-2\pi)\Big] + \Big[\sin x\Big]_{-2\pi}^{2\pi}$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$= \left[ \begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{2\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x = \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= 2\Big[-x \cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = 2\Big[-2\pi \cos 2\pi + 0 \cdot \cos 0\Big] + 2\Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2\Big[-2\pi \cdot 1 + 0\Big] + 2\Big[\sin 2\pi - \sin 0\Big]$$

---

$$= \left[ \begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x \cos x\Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= \Big[-2\pi \cos 2\pi + (-2\pi) \cos(-2\pi)\Big] + \Big[\sin x\Big]_{-2\pi}^{2\pi}$$

$$= \Big[-2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot 1\Big] + \Big[\sin 2\pi - \sin(-2\pi)\Big]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = x\sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x\sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x\sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right]$$

$$= 2\Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = 2\Big[-2\pi\cos 2\pi + 0\cdot\cos 0\Big] + 2\Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2\Big[-2\pi\cdot 1 + 0\Big] + 2\Big[\sin 2\pi - \sin 0\Big] = -4\pi + 2\Big[0 - 0\Big]$$

---

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= \Big[-2\pi\cos 2\pi + (-2\pi)\cos(-2\pi)\Big] + \Big[\sin x\Big]_{-2\pi}^{2\pi}$$

$$= \Big[-2\pi\cdot 1 - 2\pi\cdot 1\Big] + \Big[\sin 2\pi - \sin(-2\pi)\Big] = -4\pi + \Big[0 - 0\Big]$$

# Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx = -4\pi$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right]$$

$$= 2\Big[-x \cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 2\Big[-2\pi \cos 2\pi + 0 \cdot \cos 0\Big] + 2\Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2\Big[-2\pi \cdot 1 + 0\Big] + 2\Big[\sin 2\pi - \sin 0\Big] = -4\pi + 2\Big[0 - 0\Big] = -4\pi.$$

---

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x \cos x\Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x \, dx$$

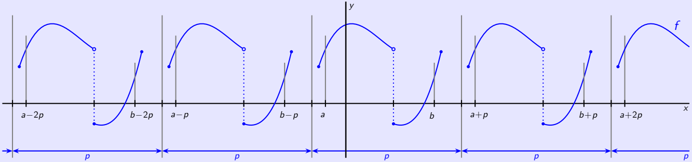
$$= \Big[-2\pi \cos 2\pi + (-2\pi) \cos(-2\pi)\Big] + \Big[\sin x\Big]_{-2\pi}^{2\pi}$$

$$= \Big[-2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot 1\Big] + \Big[\sin 2\pi - \sin(-2\pi)\Big] = -4\pi + \Big[0 - 0\Big] = -4\pi.$$

# Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b \rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p > 0$,

t. j. $f(x+kp) = f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a; b \rangle$.

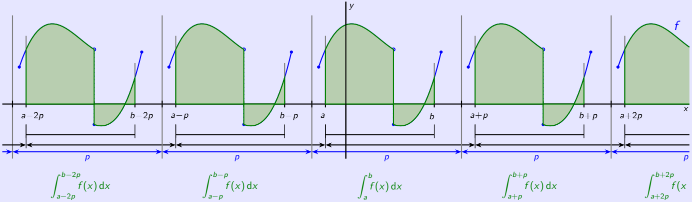


# Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b \rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p > 0$,

t. j. $f(x+kp) = f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a; b \rangle$.

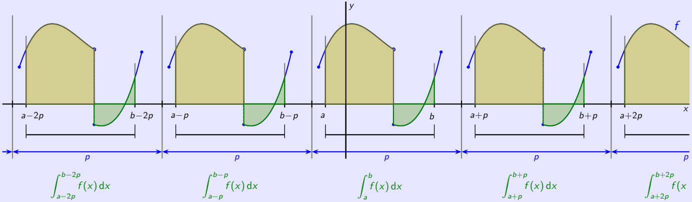
$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp \rangle}$ pre všetky $k \in Z$



# Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,
t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k \in Z$

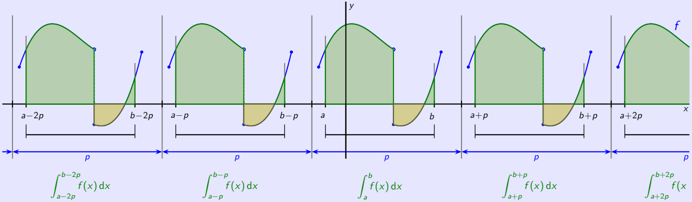


# Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$

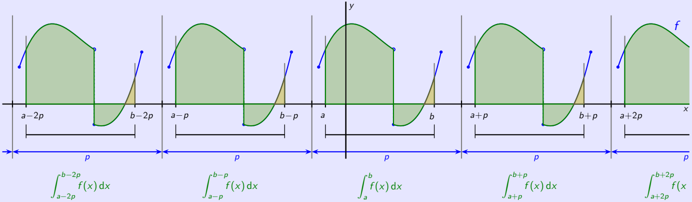


# Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k \in Z$

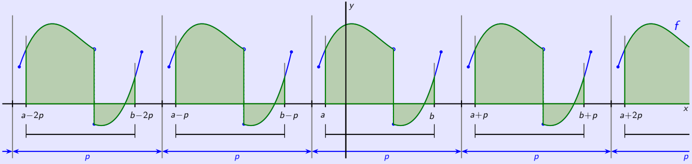


# Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k \in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx.$




$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ pre všetky $k \in Z$

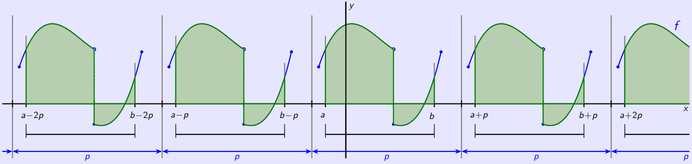
# Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx$.

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx$$




$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ pre všetky $k\in Z$

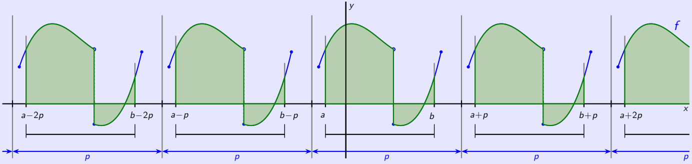
# Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad x=t+kp & x\in\langle a+kp;\, b+kp\rangle & x=b+kp\mapsto t=b \\ t=x-kp,\ \ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t & t\in\langle a;\, b\rangle & x=a+kp\mapsto t=a \end{array}\right]$$




$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ pre všetky } k\in Z$$

# Integrovanie periodických funkcií

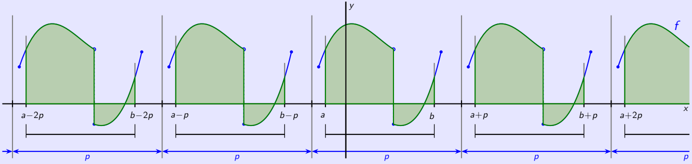
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx.$

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad x=t+kp & x\in\langle a+kp;\, b+kp\rangle & x=b+kp \mapsto t=b \\ t=x-kp,\ dx=dt & t\in\langle a;\, b\rangle & x=a+kp \mapsto t=a \end{array}\right]$$

$$= \int_a^b f(t+kp)\,dt$$




$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ pre všetky $k\in Z$

# Integrovanie periodických funkcií

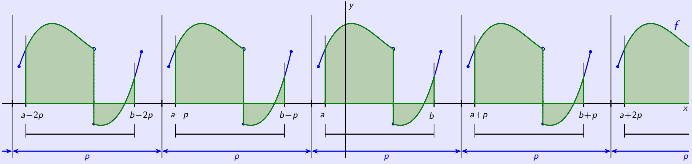
$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx$.

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\quad x=t+kp & x\in\langle a+kp;\,b+kp\rangle & x=b+kp\mapsto t=b\\ t=x-kp,\ dx=dt & t\in\langle a;\,b\rangle & x=a+kp\mapsto t=a\end{array}\right]$$

$$=\int_a^b f(t+kp)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$




$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ pre všetky $k\in Z$

# Integrovanie periodických funkcií

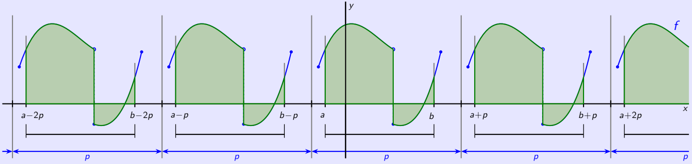
$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f$ je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\quad x=t+kp & x\in\langle a+kp;\,b+kp\rangle & x=b+kp\mapsto t=b\\ t=x-kp,\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t & t\in\langle a;\,b\rangle & x=a+kp\mapsto t=a\end{array}\right]$$

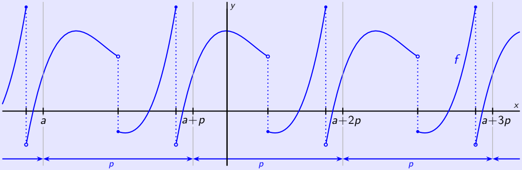
$$=\int_a^b f(t+kp)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$




$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $k\in Z$

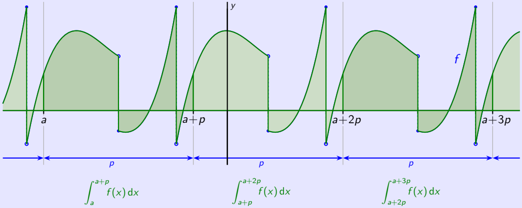
# Integrovanie periodických funkcií

**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**



# Integrovanie periodických funkcií

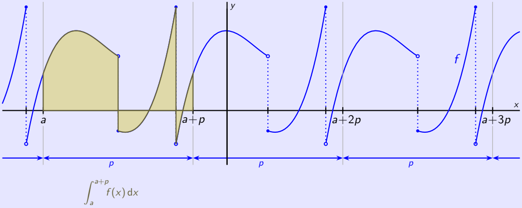
**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**



# Integrovanie periodických funkcií

**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a \in R$.**

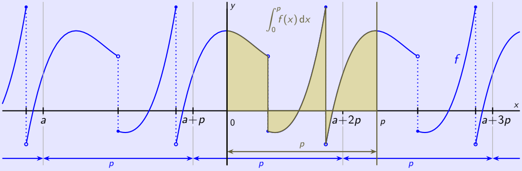
$f \in R_{\langle a;a+p\rangle}$



# Integrovanie periodických funkcií

## $f$ je periodická s periódou $p > 0$, $a \in R$.

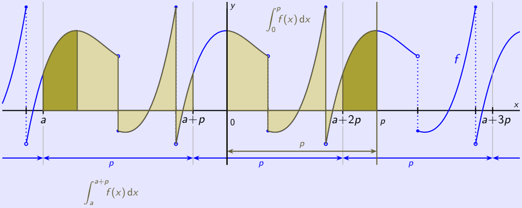
$$f \in R_{\langle a;a+p\rangle} \quad \Leftrightarrow \quad f \in R_{\langle 0;p\rangle}$$



# Integrovanie periodických funkcií

**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**

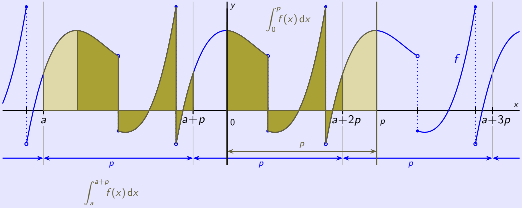
$$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \quad\Leftrightarrow\quad f\in R_{\langle 0;p\rangle}$$



# Integrovanie periodických funkcií

**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**

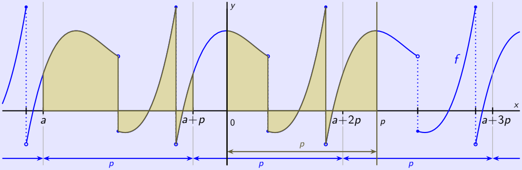
$$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \quad \Leftrightarrow \quad f\in R_{\langle 0;p\rangle}$$



# Integrovanie periodických funkcií

**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \;\Leftrightarrow\; f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$



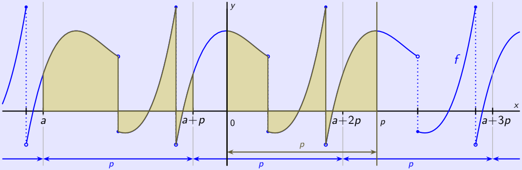

$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $a\in R$

# Integrovanie periodických funkcií

**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;\, kp\rangle$.




$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $a\in R$

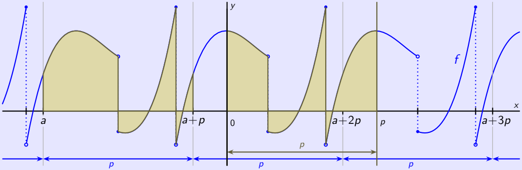
# Integrovanie periodických funkcií

$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x$$




$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $a\in R$

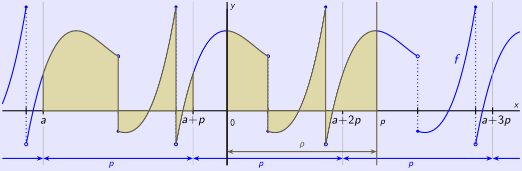
# Integrovanie periodických funkcií

**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \;\Leftrightarrow\; f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;kp\rangle$.

$$\Rightarrow\quad \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{kp} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{kp}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x$$




$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $a\in R$

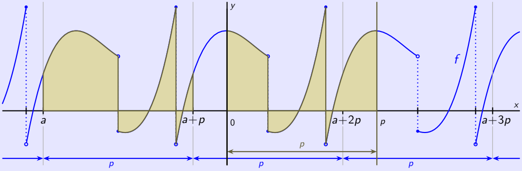
# Integrovanie periodických funkcií

**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \;\Leftrightarrow\; f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{kp} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{kp}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^{kp} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{kp-p}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$




$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $a\in R$

# Integrovanie periodických funkcií

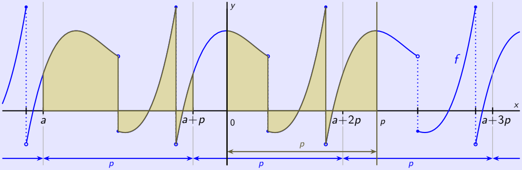
**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \iff f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_a^{kp} f(x)\,dx+\int_{kp}^{a+p} f(x)\,dx$$

$$=\int_a^{kp} f(x)\,dx+\int_{kp-p}^{a} f(x)\,dx=\int_{kp-p}^{kp} f(x)\,dx$$




$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^p f(x)\,dx$ pre všetky $a\in R$

# Integrovanie periodických funkcií

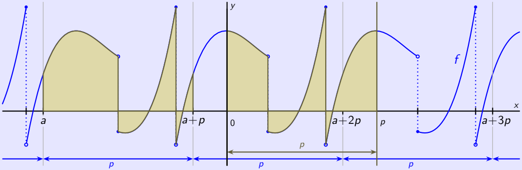
**$f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.**

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \;\Leftrightarrow\; f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;\, kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_a^{kp} f(x)\,dx+\int_{kp}^{a+p} f(x)\,dx$$

$$=\int_a^{kp} f(x)\,dx+\int_{kp-p}^{a} f(x)\,dx=\int_{kp-p}^{kp} f(x)\,dx=\int_0^{p} f(x)\,dx.$$

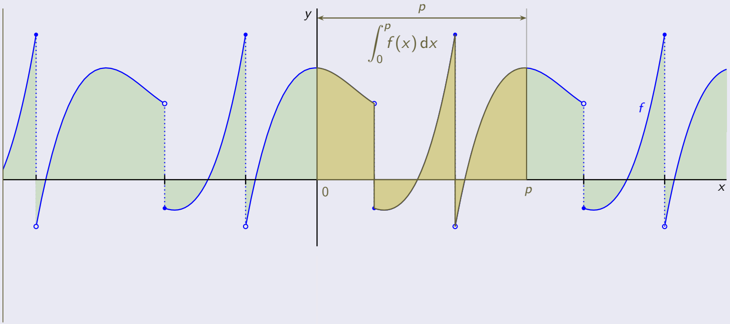



$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^{p} f(x)\,dx$ pre všetky $a\in R$

# Integrovanie periodických funkcií

## $f$ je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \quad\Leftrightarrow\quad f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx.$



# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[ f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \quad \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[ f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \quad \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right]$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2}-\frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n}-\frac{0}{2}+\frac{\sin 0}{4n}$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2}+\frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n}-\frac{0}{2}-\frac{\sin 0}{4n}$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\begin{bmatrix} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{2}-\frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n}-\frac{0}{2}+\frac{\sin 0}{4n}$$

$$=\pi-0-0+0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\begin{bmatrix} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{2}+\frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n}-\frac{0}{2}-\frac{\sin 0}{4n}$$

$$=\pi+0-0-0$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4n}$$

$$= \pi - 0 - 0 + 0 = \pi.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} + \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4n}$$

$$= \pi + 0 - 0 - 0 = \pi.$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[ f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\,dx \qquad a \in R,\ m, n \in N,\ m \neq n$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} f(x) = \sin(mx) \cdot \sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f \in R_{\langle a; a+2\pi \rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f \in R_{\langle 0; 2\pi \rangle} \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\,dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_{a}^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{0}^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \big[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{0}^{2\pi}$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\big[0-0-0+0\big]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[0-0-0+0\Big] = 0.$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[0-0-0+0\Big] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ \ \end{array}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\big[0-0-0+0\big] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{bmatrix}$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\begin{array}{c} f \text{ je} \\ \text{nepárna} \end{array}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\begin{array}{c} f \text{ je} \\ \text{nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\, f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi}$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0 - 0-0\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\big]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\big[0+0-0-0\big] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[ f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\Big]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[0+0-0-0\Big] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle}\end{bmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\Big]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[0+0-0-0\Big] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\begin{array}{c} f \text{ je} \\ \text{nepárna} \end{array}\right]$$

# Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\begin{array}{c} f \text{ je} \\ \text{nepárna} \end{array}\right] = 0.$$