
Rudolf Blaško

MATEMATICKÁ ANALÝZA II

Rudolf Blaško

MATEMATICKÁ ANALÝZA II

2016

© RNDr. Rudolf Blaško, PhD., 2016

beerb@frcatel.fri.uniza.sk

<http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb>

Obsah

1	Integrál reálnej funkcie	3
1.1	Neurčitý integrál	3
1.1.1	Metódy integrovania	6
1.1.2	Integrovanie racionálnych funkcií	14
1.1.3	Integrovanie iracionálnych funkcií	17
1.1.4	Integrovanie goniometrických a hyperbolických funkcií	24
1.1.5	Riešené príklady	27
	Cvičenia	41
1.2	Riemannov určitý integrál	44
1.2.1	Základné vlastnosti Riemannovho integrálu	53
1.2.2	Výpočet Riemannovho integrálu	61
1.2.3	Integrovanie párných, nepárnych a periodických funkcií	69
1.2.4	Numerické integrovanie	72
1.2.5	Nevlastný integrál	75
1.2.6	Aplikácie Riemannovho integrálu	90
	Cvičenia	105
	Výsledky cvičení	107
	Literatúra	111

Kapitola 1

Integrál reálnej funkcie

1.1 Neurčitý integrál

Zavedenie pojmu derivácie sme motivovali úlohou určiť okamžitú rýchlosť hmotného bodu, ktorý sa pohybuje po priamke. Úlohu môžeme obrátiť a hľadať dráhu hmotného bodu za predpokladu, že poznáme jeho okamžitú rýchlosť v danom čase.

Príklad 1.1.1.

Uvažujme hmotný bod pohybujúci sa po súradnicovej osi x v kladnom smere rýchlosťou $v(t) = 2t + 2$, $t \in \langle 0; \infty \rangle$, pričom v čase $t_0 = 0$ má polohu x_0 .

Hľadáme funkciu, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu, t. j. hľadáme funkciu $x(t)$, $t \in \langle 0; \infty \rangle$ tak, aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2$, $t \in \langle 0; \infty \rangle$ a $x(t_0) = x(0) = x_0$.

Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c$, $t \in \langle 0; \infty \rangle$, kde $c \in R$ je ľubovoľné. Ešte musíme určiť $c \in R$ tak, aby $x(0) = x_0$. Platí $x_0 = x(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + c = c$, t. j. $c = x_0$. Z toho vyplýva, že hľadanou funkciou je $x(t) = t^2 + 2t + x_0$, $t \in \langle 0; \infty \rangle$. ■

Nech $I \subset R$ je otvorený interval. Hovoríme, že funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I** , ak pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$ a pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 1.1.1.

Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.

Ak by bol interval I uzavretý, resp. otvorený iba na jednej strane, potom by sme v týchto krajných bodoch uvažovali jednostranné derivácie funkcie F .

Veta 1.1.1.

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I , $c \in R$ (konštanta) \implies

$G(x) = F(x) + c$ je primitívna k $f(x)$ na I .

Dôkaz.

$$x \in I \implies G'(x) = \left(F(x) + c \right)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x). \blacksquare$$

Veta 1.1.2.

F, G sú primitívne k f na intervale $I \implies F - G$ je konštantná na I .

Dôkaz.

$$x \in I \Rightarrow (F-G)'(x) = (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$\xrightarrow{\text{ma1: veta 4.3.8 a)}} F-G$ je konštantná na I . ■

Ak I nie je interval, potom veta 1.1.2 neplatí. Dokazuje to nasledujúci príklad 1.1.2. Množinu I musíme rozdeliť na intervaly a na každom z nich už uvedená veta platí.

Príklad 1.1.2.

Označme $I_1 = (-1; 0)$, $I_2 = (1; 2)$, $I = I_1 \cup I_2$, $F(x) = x^3$, $x \in I$, $G(x) = \begin{cases} x^3, & x \in I_1, \\ x^3 - 1, & x \in I_2. \end{cases}$

Funkcie $F(x)$, $G(x)$ sú primitívne k funkcii $f(x) = 3x^2$, $x \in I$ na množine I .

Ich rozdiel nie je na I konštantná funkcia, pretože $(F-G)(x) = \begin{cases} 0, & x \in I_1, \\ 1, & x \in I_2. \end{cases}$

Reštrikcie $(F-G)(x) = 0$, $x \in I_1$, $(F-G)(x) = 1$, $x \in I_2$ sú konštantné funkcie. ■

Poznámka 1.1.2.

Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I . Z definície primitívnej funkcie vyplýva, že **funkcia F je na intervale I spojitá** (ma1: veta 4.1.4).

Z predchádzajúceho vyplýva, že všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I sa navzájom líšia o konštantu a tvoria množinu $\{F(x) + c; c \in R\}$, pričom $F(x)$, $x \in I$ je ľubovoľná z primitívnych funkcií k f . Táto množina sa nazýva **neurčitý integrál funkcie f na intervale I** a označuje sa:¹

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad x \in I, \quad c \in R.$$

Na určenie neurčitého integrálu funkcie nám postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia. Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva **integrovanie**. Zápis neurčitého integrálu funkcie f na intervale I je určený na začiatku **integračným znakom** \int a na konci symbolom diferenciálu dx .² Funkcia f sa nazýva **integračná funkcia** alebo **integrand**, x sa nazýva **integračná premenná** a c sa nazýva **integračná konštantá**. Interval I sa nazýva **definičný obor (obor definície) integrálu**. Ak nie je obor definície integrálu explicitne zadaný, potom pod oborom definície integrálu myslíme maximálny možný interval (resp. zjednotenie intervalov³), na ktorom integrál existuje.

Je zrejmé, že nie ku každej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje na intervale I primitívna funkcia (príklad 1.1.3). Ako dokazuje veta 1.1.3, ak je funkcia f spojitá na intervale I , potom k nej primitívna funkcia existuje. Samozrejme existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie (príklad 1.1.3).

Veta 1.1.3.

$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I \implies$ na I ku f existuje primitívna funkcia.

Dôkaz tejto vety je s doterajšími vedomosťami zložitý a vykonáme ho až neskôr, keď budeme poznať súvislosti medzi neurčitým a určitým integrálom (veta 1.2.27, str. 63).

¹Symbole pre množinu sa vynechávajú a namiesto $\{F(x) + c; c \in R\}$ sa stručne píše $F(x) + c, c \in R$.

²Z uvedeného dôvodu nemusíme zložitejšie vyjadrenia funkcie $f(x)$ pri integrovaní dávať do zátvoriek, ale kvôli prehľadnosti sa to doporučuje.

Vzorec [$a \in \mathbb{R}$]	Platnosť	Vzorec [$a \in \mathbb{R}$]	Platnosť
$\int dx = \int 1 dx = x + c,$	$x \in \mathbb{R}$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,$	$a \neq -1, x \in \mathbb{R} - \{0\}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c,$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c,$	$f(x) \neq 0, x \in D(f)$
$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R}$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R}$	$\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{\cotg ax}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R},$ $x \neq \frac{k\pi}{a}, k \in \mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\tg ax}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R},$ $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}, k \in \mathbb{Z}$
$\int \sinh ax dx = \frac{\cosh ax}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R}$	$\int \cosh ax dx = \frac{\sinh ax}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax} = -\frac{\cotgh ax}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R} - \{0\}$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\tgh ax}{a} + c,$	$a \neq 0, x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c_2,$		$a \neq 0, x \in \mathbb{R}$	
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c,$		$a \neq 0, x \in \mathbb{R} - \{\pm a\}$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{ a } + c_1 = -\arccos \frac{x}{ a } + c_2,$		$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$ $a \neq 0, x \in (- a ; a)$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2-a^2} \right + c,$		$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$ $a \neq 0, x \in (-\infty; - a) \cup (a ; \infty)$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right) + c,$		$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}},$ $a \neq 0, x \in \mathbb{R}$	

Tabuľka 1.1.1: Neurčité integrály základných elementárnych funkcií

Príklad 1.1.3.

a) Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in (-1; 1)$ nemá na $(-1; 1)$ primitívnu funkciu.

Pre $x \in (0; 1)$ platí $f(x) = 1$ a na intervale $(0; 1)$ má f primitívnu funkciu $F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$. Analogicky na $(-1; 0)$ má f primitívnu funkciu $F(x) = -x + c, c \in \mathbb{R}$.

Na intervale $(-1; 1)$ je problém v bode $x = 0$, pretože pokiaľ $F'(0)$ existuje, musí platiť $F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(x) = -1, F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = 1$, t. j. $F'_-(0) \neq F'_+(0)$. To je spor.

b) Funkcia $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}, f(0) = 0$ je nespojitá v bode $x = 0$. Ukážeme, že $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}, F(0) = 0$ je primitívnu funkciou k f na \mathbb{R} .

$$x \neq 0 \Rightarrow F'(x) = \left[x^2 \sin \frac{1}{x} \right]' = 2x \sin \frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = f(x).$$

$$x = 0 \Rightarrow F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0). \blacksquare$$

V tabuľke 1.1.1 sú uvedené základné vzorce pre integrovanie. Tieto vzorce úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií (ma1: tab. 4.1.1) a pre praktické potreby **je nevyhnutné si ich zapamätať**. Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly.³ Platnosť týchto vzorcov dokážeme priamym derivovaním pravých strán.

Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I . Pre všetky $x \in I$ platí:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + c)' = f(x), \quad \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + c.$$

Príklad 1.1.4.

- a) $\int \cotg x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{[\sin x]'}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + c, x \in R - \{k\pi; k \in Z\}, c \in R.$
- b) $\int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c, x \geq 0, c \in R.$
- c) $\int |x| dx = \left\{ \begin{array}{l} \int x dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad x \geq 0 \\ \int (-x) dx = -\frac{x^2}{2} + c, \quad x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int |x| dx = \frac{x|x|}{2} + c, x \in R, c \in R. \blacksquare$

1.1.1 Metódy integrovania

Integrovanie je vo všeobecnosti zložitý proces a niektoré (aj elementárne funkcie) nevieme integrovať bez použitia nekonečných funkcionálnych radov. Z vety 1.1.3 vyplýva, že **ku každej spojitaj funkcii definovanej na intervale existuje na tomto intervale primitívna funkcia**. Problém je v tom, že nie všetky z týchto primitívnych funkcií vieme vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Na ich vyjadrenie potrebujeme spomínané nekonečné funkcionálne rady. Sú to napríklad integrály ($m \in N \cup \{0\}, n \in N, m + n \geq 2$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{e^{\pm x^n}}{x^m} dx, \quad \int \frac{\sin(x^n)}{x^m} dx, \quad \int \frac{\cos(x^n)}{x^m} dx.$$

Základom integrovania je rozklad integrandov na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu) a transformácia integrandov na iné, ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy). Niekedy môžeme integrál dopredu odhadnúť a bez integrovania dopočítať neznáme parametre (metóda neurčitých koeficientov). Jednotlivé metódy môžeme navzájom kombinovať. Existujú aj tabuľky integrálov [28] a softvérové aplikácie na symbolické výpočty (Maxima, Maple, Wolfram Mathematica, ...), ktoré môžeme pri výpočte integrálov použiť. Ale aby sme tieto pomôcky mohli účinne využiť, musíme vedieť integrovať.

Veta 1.1.4 (Metóda rozkladu).

F, G sú primitívne funkcie k f, g na intervale $I, a, b \in R, |a| + |b| > 0 \Rightarrow$

³Napr. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1, x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce: jeden pre $x \in (-\infty; 0)$ a druhý pre $x \in (0; \infty)$. Tieto vzorce sú rovnaké, líšiť sa môžu iba o konštantu.

$aF + bG$ je primitívna funkcia k funkcii $af + bg$ na intervale I a platí:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx = aF(x) + bG(x) + c, \quad x \in I, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dôkaz.

$$x \in I \Rightarrow (aF(x) + bG(x))' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x). \blacksquare$$

Poznámka 1.1.3.

Výraz $a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$ znamená množinu všetkých primitívnych funkcií, takže by sme mali správne písať $a \int f(x) dx + b \int g(x) dx = \{aF(x) + bG(x) + c; x \in I, c \in \mathbb{R}\}$.

V tomto zmysle predstavuje $a \int f(x) dx + b \int g(x) dx = \int [af(x) + bg(x)] dx$ rovnosť množín

$$\begin{aligned} a \{F(x) + c_1; x \in I, c_1 \in \mathbb{R}\} + b \{G(x) + c_2; x \in I, c_2 \in \mathbb{R}\} = \\ = \{aF(x) + bG(x) + c; x \in I, c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

V praxi chápeme $a \int f(x) dx + b \int g(x) dx = aF(x) + b \int g(x) dx$ ako súčet množín a zátvorky $\{ \}$ nepíšeme. Na pravej strane integračnú konštantu priradenú k primitívnej funkcii $F(x)$ písať nemusíme, pretože je zahrnutá v symbole $b \int g(x) dx$. Na konci výpočtu integrálu sa všetky integračné konštanty sčítajú do jednej výslednej (viď príklad 1.1.5).

Príklad 1.1.5.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,^4 \\ &x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + c, \\ &x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \frac{(x-1)^2}{x} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{d) } \int \left(2 \cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1} \right) dx = 2 \sin x + \frac{x^4}{4} + 3 \operatorname{arctg} x + c, \quad x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Veta 1.1.5 (Metóda per partes).

u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale $I \implies$

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx, \quad x \in I. \quad (1.1)$$

Dôkaz.

Zo spojitosti u', v' na I a z vety 1.1.3 vyplýva existencia $\int u(x)v'(x) dx, \int u'(x)v(x) dx$ na I . Zvyšok vyplýva zo vzťahu $[uv]' = u'v + uv'$, t. j. $uv' = [uv]' - u'v, x \in I$. Platí:

$$\begin{aligned} x \in I \implies u(x)v'(x) &= [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x) \implies \\ \int u(x)v'(x) dx &= \int [u(x)v(x)]' dx - \int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

⁴Namiesto zápisu $\int \frac{1}{f(x)} dx$ sa tiež používa $\int \frac{dx}{f(x)}$.

Príklad 1.1.6.

$$\text{a) } \int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ v' = \cos x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = \\ = x \sin x + \cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } \int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c, \quad x \in (0; \infty), c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{c) } \int \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \operatorname{arctg} x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{0+2x}{1+x^2} \, dx = \\ = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + c, \quad x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Poznámka 1.1.4.

Vzorec (1.1) môžeme písať tiež v tvare

$$\int u'(x) v(x) \, dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) \, dx, \quad x \in I.$$

Nie každá voľba funkcií u, v musí viesť k cieľu, napr. v príklade 1.1.6 b):

$$\int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u' = x \\ v = \cos x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u = \frac{x^2}{2} \\ v' = -\sin x \end{array} \right] = \frac{x^2 \cos x}{2} + \int \frac{x^2 \sin x}{2} \, dx = \dots$$

Metódu *per partes* môžeme použiť viackrát za sebou, ale musíme si dať pozor, aby sme sa pri jej opätovnom použití nevrátili k pôvodnému integrálu (príklad 1.1.7).

Príklad 1.1.7.

Vypočítajte neurčitý integrál $J = \int \cos 5x \sin 4x \, dx$.

Riešenie.

$$J = \left[\begin{array}{l} u' = \cos 5x \\ v = \sin 4x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v' = 4 \cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx = \\ = \left[\begin{array}{l} u' = \sin 5x \\ v = \cos 4x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v' = -4 \sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[-\frac{\cos 5x \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right].$$

Dostali sme rovnicu, v ktorej J považujeme za neznámy parameter:

$$J = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} + \frac{4 \cos 5x \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} J \implies J = \frac{5 \sin 5x \sin 4x}{9} + \frac{4 \cos 5x \cos 4x}{9} + c, \quad x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

Pri opačnej (t. j. nesprávnej) druhej voľbe funkcií u, v by sme dostali:

$$= \left[\begin{array}{l} u' = \cos 4x \\ v = \sin 5x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u = \frac{\sin 4x}{4} \\ v' = 5 \cos 5x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[\frac{\sin 5x \sin 4x}{4} - \frac{5}{4} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right] = J.$$

Iné riešenie.

Použijeme vzorec $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ (ma1: veta 3.1.9). Ak položíme $4 = \frac{\alpha - \beta}{2}$, $5 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, potom $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = 5 + 4 = 9$, $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = 5 - 4 = 1$ a platí:

$$J = \int \left[\frac{\sin 9x}{2} - \frac{\sin x}{2} \right] dx = \frac{-\cos 9x}{9 \cdot 2} - \frac{-\cos x}{2} + c = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \quad x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Príklad 1.1.8.

$$J_n = \int x^n e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^n \\ v' = e^x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = nx^{n-1} \\ v = e^x \end{array} \right] = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n J_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\implies J_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = x e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$J_1 = x e^x - J_0 = x e^x - e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$J_2 = x^2 e^x - 2J_1 = x^2 e^x - 2[x e^x - e^x] + c = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$J_3 = x^3 e^x - 3J_2 = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \dots \blacksquare$$

V predchádzajúcom príklade sme vyjadrili integrál J_n **rekurentným vzťahom** pomocou J_{n-1} . Pre konkrétne $n \in \mathbb{N}$ musíme tento vzťah použiť niekoľkokrát za sebou. Iné riešenie tohto integrálu pre $n = 3$ nájdeme v príklade 1.1.9 b).

Metóda per partes sa používa pomerne často a môžeme ju použiť pre mnohé druhy integrálov. Vhodná je napríklad pre integrovanie funkcií typov:

$$P(x) e^{ax}, \quad P(x) \cos ax, \quad P(x) \sin ax, \quad P(x) \ln Q(x), \quad P(x) \operatorname{arctg} Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ sú reálne polynómy, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Vyššie uvedené funkcie môžeme samozrejme integrovať aj inými metódami. Uvedieme jednu z nich. V niektorých prípadoch môžeme neurčitý integrál $\int f(x) dx$ odhadnúť⁵ neurčitým výrazom $F(x, a_1, a_2, \dots)$ s konečným počtom neznámych koeficientov a_1, a_2, \dots . Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes. Pri určovaní koeficientov a_1, a_2, \dots nahradíme proces integrovania derivovaním výrazu $F(x, a_1, a_2, \dots)$. Pre neznáme koeficienty a_1, a_2, \dots dostaneme systém algebraických rovníc. To znamená, že namiesto integrovania riešime sústavu rovníc (príklad 1.1.9). Táto metóda sa nazýva **metóda neurčitých koeficientov**.⁶ Symbolicky to môžeme znázorniť nasledovne ($c \in \mathbb{R}$ je integračná konštanta):

$$\int f(x) dx = F(x, a_1, a_2, \dots) + c \implies f(x) = \frac{dF(x, a_1, a_2, \dots)}{dx} = F'(x, a_1, a_2, \dots).$$

Príklad 1.1.9.

$$\text{a) } \int x^3 e^x dx = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Na pravej strane je odhad integrálu s neznámymi koeficientami $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Po zderivovaní a delení nenulovou funkciou e^x dostaneme rovnosť dvoch polynómov:

$$x^3 e^x = (3x^2 + 2\alpha x + \beta) e^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^x$$

$$x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = x^3 + (3 + \alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma).$$

Z poslednej rovnosti vyplývajú tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ :

$$x^2: 0 = 3 + \alpha, \quad x: 0 = 2\alpha + \beta, \quad x^0: 0 = \beta + \gamma \implies \alpha = -3, \quad \beta = 6, \quad \gamma = -6.$$

$$\implies \int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

⁵V príklade 1.1.8 to môže byť odhad $J_n = e^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) + c$, kde a_0, a_1, \dots, a_{n-1} sú neznáme koeficienty, ktoré musíme vypočítať.

⁶V literatúre sa niekedy nazýva **Ostrogradského metóda**.

$$b) \int x^3 \sin x \, dx = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \cos x + (\varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \sin x + c.$$

Postup je analogický ako v časti a). V odhade musí byť $\sin x$ a musí tam byť aj $\cos x$. Po zderivovaní dostaneme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \mu, \nu \in R$:⁷

$$\begin{aligned} (1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0) \sin x + (0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0) \cos x &= x^3 \sin x = \\ &= (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \sin x + \\ &\quad + (3\varepsilon x^2 + 2\varphi x + \mu) \sin x + (\varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu) \cos x = \\ &= (-\alpha x^3 + (3\varepsilon - \beta)x^2 + (2\varphi - \gamma)x + (\mu - \delta)) \sin x + \\ &\quad + (\varepsilon x^3 + (3\alpha + \varphi)x^2 + (2\beta + \mu)x + (\gamma + \nu)) \cos x. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^3 \sin x: 1 = -\alpha, \quad x^3 \cos x: 0 = \varepsilon \\ x^2 \sin x: 0 = 3\varepsilon - \beta, \quad x^2 \cos x: 0 = 3\alpha + \varphi \\ x \sin x: 0 = 2\varphi - \gamma, \quad x \cos x: 0 = 2\beta + \mu \\ \sin x: 0 = \mu - \delta, \quad \cos x: 0 = \gamma + \nu \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -1, \quad \varepsilon = 0, \\ \beta = 0, \quad \varphi = 3, \\ \gamma = 6, \quad \mu = 0, \\ \delta = 0, \quad \nu = -6. \end{array}$$

$$\Rightarrow \int x^3 \sin x \, dx = (-x^3 + 6x) \cos x + (3x^2 - 6) \sin x + c, \quad x \in R, c \in R. \blacksquare$$

Veta 1.1.6 (1. metóda substitúcie).

$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I , $x = \varphi(t)$ má na intervale J deriváciu, $\varphi(J) \subset I$
 $\Rightarrow F(\varphi(t))$ je primitívna funkcia k funkcii $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na J a platí:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int f(x) \, dx = F(x) + c = F(\varphi(t)) + c, \quad t \in J, c \in R.$$

Dôkaz.

Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí (mal: veta 4.1.7 o derivácii zloženej funkcie):

$$F'(x) = [F(\varphi(t))]'' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

To znamená, že $F(\varphi(t))$ je primitívna k $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na J a veta je dokázaná. \blacksquare

Veta 1.1.6 (ozn. **1. ms**) sa používa na výpočet integrálov $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$, pričom formálne nahradíme (použijeme **substitúciu**) $x = \varphi(t)$ a diferenciál $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t) \, dt$. Vznikne $\int f(x) \, dx$, ktorý vypočítame, t. j. nájdeme primitívnu funkciu $F(x)$. Následne rovnakou substitúciou $x = \varphi(t)$ dostaneme hľadaný integrál, t. j. primitívnu funkciu $F(\varphi(t))$. V praxi overujeme splnenie predpokladov vety väčšinou až na konci, po úspešnom integrovaní. Na rozdiel od 2. ms (veta 1.1.8) nepoužívame inverznú substitúciu.

Existenciu primitívnej funkcie, t. j. existenciu neurčitého integrálu $\int f(x) \, dx$, nám zaručí napríklad spojitosť funkcie f (veta 1.1.3).

⁷Pri hlbšom preskúmaní metódy per partes v tomto integráli by sme mohli odhad zjednodušiť na tri neznáme koeficienty: $(-x^3 + \gamma x) \cos x + (\varphi x^2 + \nu) \sin x + c$, $\gamma, \varphi, \nu \in R$.

Príklad 1.1.10.

$$\text{a) } \int \sin^3 t \cos t \, dt = \left[\begin{array}{l} x = \sin t, \, dx = \cos t \, dt \\ t \in R, \, x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = \int x^3 \, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{\sin^4 t}{4} + c, \, x \in R, \, c \in R.$$

Podmienky vety 1.1.6 sú splnené: $f(x) = x^3$ je spojitá na R , $x = \varphi(t) = \sin t: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ má spojitú deriváciu $\varphi'(t) = \cos t$ na R , $\varphi(R) = \langle -1; 1 \rangle \subset R$.

$$\text{b) } \int \frac{x^3 \, dx}{x^8 + 1} = \left[\begin{array}{l} t = x^4, \, x \in R \\ 4x^3 \, dx = dt, \, t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c, \, x \in R, \, c \in R.$$

$$\text{c) } \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) \, dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c, \, x \in D(f), \, c \in R. \quad \blacksquare$$

Príklad 1.1.11.

Ak k funkcii f existuje na intervale I primitívna funkcia F , potom pre $a, b \in R$, $a \neq 0$ platí:

$$\int f(ax + b) \, dx = \left[\begin{array}{l} t = ax + b \\ dt = a \, dx \end{array} \right] = \int \frac{f(t) \, dt}{a} = \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c, \, x \in I, \, c \in R.$$

Ak α, β sú hranice intervalu I , potom $a\alpha + b, a\beta + b$ sú hranice intervalu J ($t \in J$). ■

Pri dôkaze vety 1.1.8 budeme potrebovať nasledujúce tvrdenie.

Lema 1.1.7.

$x = \varphi(t): J \rightarrow I$, I, J sú intervaly, $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in J$

$\implies \forall t \in J: \varphi'(t) > 0$ (φ je rastúca na I), resp. $\varphi'(t) < 0$ (φ je klesajúca na I).

Dôkaz.

φ má na I deriváciu, t. j. (mal: veta 4.1.4) φ je spojitá na I .

Tvrdenie lemy dokážeme sporom. Nech $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$, $\varphi'(t_1) > 0$, $\varphi'(t_2) < 0$.

mal: veta 4.3.9 $\implies \varphi$ rastie v bode t_1 a klesá v bode t_2 . To znamená, že existuje bod $t_0 \in J$ ležiaci medzi t_1, t_2 , v ktorom má φ extrém, t. j. $\varphi'(t_0) = 0$. To je spor. ■

Veta 1.1.8 (2. metóda substitúcie).

$x = \varphi(t): J \rightarrow I$, $\varphi'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in J$, $G(t)$ je primitívna k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervale J

$\implies G(\varphi^{-1}(x))$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I a platí:

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = G(t) + c = G(\varphi^{-1}(x)) + c, \, x \in I, \, c \in R.$$

Dôkaz.

Funkcia $\varphi: J \rightarrow I$ je rýdzo monotónna (rastúca alebo klesajúca — lema 1.1.7). To znamená, že je prostá (mal: veta 3.3.13) a existuje $t = \varphi^{-1}(x): I \rightarrow J$.

Pre $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí (mal: vety 4.1.6 a 4.1.7):

$$\begin{aligned} \left[G(\varphi^{-1}(x)) \right]' &= G'(\varphi^{-1}(x)) [\varphi^{-1}(x)]' = G'(t) [\varphi^{-1}(x)]' = \\ &= f(\varphi(t)) \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x). \end{aligned}$$

To znamená, že $G(\varphi^{-1}(x))$ je primitívna k $f(x)$ na I a veta je dokázaná. ■

⁸V príklade 1.1.10 v častiach b), c) sú premenné x a t navzájom vymenené vzhľadom na vetu 1.1.6.

Použitie vety 1.1.8 (ozn. **2. ms**) je podobné ako použitie vety 1.1.6. Veta sa používa na výpočet integrálov $\int f(x) dx$. Pomocou substitúcie $x = \varphi(t)$ zostrojíme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$, ktorý vypočítame, t. j. nájdeme primitívnu funkciu $G(t)$. Potom použijeme **inverznú substitúciu** $t = \varphi^{-1}(x)$ a dostaneme primitívnu funkciu $G(\varphi^{-1}(x))$. Aj v tomto prípade overujeme splnenie predpokladov vety väčšinou až po úspešnom integrovaní.

Príklad 1.1.12.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} x = \sin t, \quad t = \arcsin x, \quad (\sin t)' = \cos t \neq 0, \quad x \in (-1; 1), \quad t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ dx = \cos t dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array} \right] = \\ = \int \frac{\cos t dt}{\cos t} = \int dt = t + c = \arcsin x + c, \quad x \in (-1; 1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} x = \cos t, \quad t = \arccos x, \quad (\cos t)' = -\sin t \neq 0, \quad x \in (-1; 1), \quad t \in (0; \pi) \\ dx = -\sin t dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array} \right] = \\ = \int \frac{-\sin t dt}{\sin t} = -\int dt = -t + c = -\arccos x + c, \quad x \in (-1; 1), \quad c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Poznámka 1.1.5.

Obe riešenia príkladu 1.1.12 sú správne, pretože (ma1: veta 3.1.11) pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, t. j. $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$. To znamená, že obidve primitívne funkcie sa na intervale $(-1; 1)$ líšia iba o konštantu $\frac{\pi}{2}$.

Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou. Ak použijeme pri integrovaní rôzne postupy, môžeme dospieť „k zdanlivo rôznym výsledkom“. Ale zdanie klame. Pokiaľ sme sa nepomýlili, **výsledky musia byť rovnaké!** Môžu byť vyjadrené v rôznych tvaroch a líšiť sa môžu iba o integračnú konštantu. O správnosti sa presvedčíme napríklad spätným derivovaním výsledku.

Príklad 1.1.13.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} = \left[\begin{array}{l} e^x = t, \quad x = \ln t, \quad dx = \frac{dt}{t}, \quad e^{2x} = t^2 \\ (\ln t)' = \frac{1}{t} \neq 0, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}} = \\ = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{t}, \quad dt = -\frac{du}{u^2}, \quad (\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \neq 0, \quad t \in (0; \infty), \quad u \in (0; \infty) \\ \sqrt{t^2+t+1} = \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1} = \frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}, \quad \sqrt{1+u+u^2} = \sqrt{1+\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \\ = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u} \frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{(u+\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4}}} = \left[\begin{array}{l} u + \frac{1}{2} = v, \quad 1 + u + u^2 = v^2 + \frac{3}{4} \\ du = dv, \quad u \in (0; \infty), \quad v \in (\frac{1}{2}; \infty) \end{array} \right] = \\ = -\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + \frac{3}{4}}} = -\ln \left(v + \sqrt{v^2 + \frac{3}{4}} \right) + c_1 = -\ln \left(u + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + u + u^2} \right) + c_1 = \\ = -\ln \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \right) + c_1 = -\ln \frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t} + c_1 = \ln \frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}} + c_1 = \\ = \ln 2 + \ln t - \ln (2 + t + 2\sqrt{t^2 + t + 1}) + c_1 = [c_1 \in \mathbb{R}, c = c_1 + \ln 2, c \in \mathbb{R}] = \\ = x - \ln (2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}) + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Príklad 1.1.14.

a) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x, \quad x \in (0; \infty) \\ dt = \frac{dx}{x}, \quad t \in (-\infty; \infty) \end{array} \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c, \quad x \in (0; \infty), \quad c \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \cos^2 x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \cos x \mid u' = -\sin x \\ v = \cos x \mid v = \sin x \end{array} \right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \cos^2 x \, dx \implies \\
 &\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + x \right) + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c, \quad x \in R, \quad c \in R.
 \end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\text{a) } \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \mid u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{x} \mid v = \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} \, dx \implies \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c, \quad x > 0, \quad c \in R.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \left[\begin{array}{l} 2x = t, \quad 2 \, dx = dt \\ x \in R, \quad t \in R \end{array} \right] = \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos t \, dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \quad x \in R, \quad c \in R. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Ak pripustíme neexistenciu funkcie f alebo jej derivácie f' v konečnom počte bodov daného intervalu I , potom môžeme pojem primitívnej funkcie na I zovšeobecniť.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **zovšeobecnená primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I** , ak je spojitá na I a pre všetky $x \in I$ okrem konečného počtu existuje derivácia $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 1.1.6.

Interval I nemusí byť otvorený.

Primitívna funkcia je zároveň aj zovšeobecnenou primitívnou funkciou.

Ak $F(x)$, $x \in I$ je zovšeobecnená primitívna funkcia k $f(x)$ na I , $c \in R$ (konštanta), potom $G(x) = F(x) + c$, $x \in I$ je zovšeobecnená primitívna funkcia k $f(x)$ na I (veta 1.1.1).

Ak F, G sú zovšeobecnené primitívne funkcie k f na I , potom $F - G$ je konštantná funkcia na I (veta 1.1.2).

Dá sa tiež dokázať, že každá na intervale I po častiach spojitá funkcia f má na tomto intervale zovšeobecnenú primitívnu funkciu (viď veta 1.2.27 a jej dôsledky).

Príklad 1.1.15.

Heavisideova⁹ jednotková funkcia $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ nemá na R primitívnu funkciu.

Dokážeme nepriamo. Predpokladajme, že funkcia F je primitívnou k f na R .

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 \implies F'(x) = f(x) = 0 \implies F'_-(0) = 0 \\ x \geq 0 \implies F'(x) = f(x) = 1 \implies F'_+(0) = 1 \end{array} \right\} \implies F'(0) \text{ neexistuje.}$$

To znamená, že funkcia f nemá primitívnu funkciu na R .

Funkcia f má na intervale $(-\infty; 0)$ primitívnu funkciu $F(x) = c_1$, $c_1 \in R$ a na $(0; \infty)$ má primitívnu funkciu $F(x) = x + c_2$, $c_2 \in R$. Ak položíme $c = c_1 = c_2$, potom funkcia

$$F(x) = \begin{cases} c, & x < 0, \\ x + c, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{t. j. } F(x) = \frac{x+|x|}{2} + c, \quad x \in R$$

bude pre každé $c \in R$ zovšeobecnenou primitívnou funkciou k funkcii f na R . \blacksquare

⁹Oliver Heaviside [1850–1925] — anglický matematik, fyzik a elektrotechnik.

1.1.2 Integrovanie racionálnych funkcií

Integrovanie polynómu $f_n(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n$ stupňa n , $n \in N \cup \{0\}$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, je triviálne:

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) dx = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + c, \quad c \in R.$$

Integrovanie racionálnej lomenej funkcie $f(x) = \frac{f_k(x)}{f_n(x)}$, kde $f_k(x)$, $f_n(x)$ sú polynómy stupňov k , n , je pomerne jednoduchá, aj keď v mnohých prípadoch práca záležitosť.

Vo väčšine prípadov musíme funkciu f najprv upraviť na jednoduchší, ľahšie integrovateľný tvar. Tieto úpravy sú algebraickej povahy a nesúvisia s vlastným integrovaním, preto nasledujúce úvahy a tvrdenia uvádzame bez dôkazov (viď napr. [4, 7, 20]).

Každú racionálnu nerýdzo lomenú funkciu $f(x) = \frac{f_k(x)}{f_n(x)}$, $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \geq n$ môžeme rozložiť na súčet $f(x) = f_{k-n}(x) + \frac{f_m(x)}{f_n(x)}$, t. j. $f_k(x) = f_{k-n}(x)f_n(x) + f_m(x)$, pričom $f_{k-n}(x)$, $f_m(x)$ sú polynómy stupňov $k-n$ a $m < n$. Uvedený rozklad získame delením polynómu $f_k(x)$ polynómom $f_n(x)$. Polynóm $f_m(x)$ predstavuje zvyšok tohto delenia.

V ďalších úvahách sa obmedzíme na vyšetrovanie racionálnej rýdzo lomenej funkcie a jej rozklad na parciálne zlomky, ktoré vieme integrovať (príklad 1.1.16). **Parciálnym (čiasočným) zlomkom** nazývame každú funkciu v tvare:

$$\frac{a}{(x-b)^n}, \quad \text{resp.} \quad \frac{px+q}{(x^2+rx+s)^n}, \quad a, b, p, q, r, s \in R, \quad a \neq 0, \quad |p| + |q| \neq 0, \quad r^2 - 4s < 0, \quad n \in N.$$

Kvadratický člen $x^2 + rx + s$ nemá reálne korene, ale dva komplexne združené korene.

Zo základnej vety algebry a jej dôsledkov pre reálne polynómy vyplýva, že každý polynóm $f_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ stupňa $n \in N$ s reálnymi koeficientami $a_0, a_2, \dots, a_n \in R$ sa dá nad poľom komplexných čísel rozložiť na súčin:

$$f_n(x) = a_n [(x - b_1)(x - \bar{b}_1)]^{n_1} \dots [(x - b_k)(x - \bar{b}_k)]^{n_k} \cdot (x - b_{k+1})^{n_{k+1}} \dots (x - b_t)^{n_t},$$

pričom $b_1, b_2, \dots, b_k \in C$ (nie reálne), $b_{k+1}, \dots, b_t \in R$ sú jeho $n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_t$ -násobné korene a platí $2(n_1 + n_2 + \dots + n_k) + n_{k+1} + \dots + n_t = n$. Ak má $f_n(x)$ komplexný koreň $b = u + iv$, $u, v \in R$, potom má aj komplexne združený koreň $\bar{b} = u - iv$ a platí:

$$(x - b)(x - \bar{b}) = (x - u - iv)(x - u + iv) = (x - u)^2 + v^2 = x^2 - 2ux + u^2 + v^2.$$

To znamená, že nad poľom reálnych čísel majú koreňové činitele tvar $x - b$ pre $b \in R$, resp. $x^2 + rx + s$, $r = 2u$, $s = u^2 + v^2$, t. j. $r^2 - 4s < 0$, pre $b = u + iv \in C$, $v \neq 0$.

Pri hľadaní rozkladu funkcie $\frac{f_m(x)}{f_n(x)}$, $m < n$ na parciálne zlomky môžeme predpokladať, že polynómy $f_n(x)$, $f_m(x)$ nemajú spoločné korene.¹⁰ Platí nasledujúca veta.

Veta 1.1.9.

$f_n(x)$, $f_m(x)$ sú reálne polynómy stupňov $m < n$, $b_1, b_2, \dots, b_k \in C$ ($b_i = u_i + iv_i$, $v_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$), $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_t \in R$ sú $n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_t$ -násobné korene $f_n(x)$

¹⁰Predpokladajme, že $b \in C$ je koreňom $f_n(x)$ a aj $f_m(x)$. Ak označíme $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{x-b}$, $g_m(x) = \frac{f_m(x)}{x-b}$, potom $\frac{f_m(x)}{f_n(x)} = \frac{g_m(x)}{g_n(x)}$. Tento postup opakujeme, dokiaľ majú čitateľ a menovateľ spoločné korene.

$\implies \exists!$ $\alpha_{1,1}, \beta_{1,1}, \alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \dots, \alpha_{1,n_1}, \beta_{1,n_1}, \alpha_{2,1}, \beta_{2,1}, \alpha_{2,2}, \beta_{2,2}, \dots, \alpha_{2,n_1}, \beta_{2,n_2}, \dots,$
 $\alpha_{k,1}, \beta_{k,1}, \alpha_{k,2}, \beta_{k,2}, \dots, \alpha_{k,n_k}, \beta_{k,n_k}, \gamma_{k+1,1}, \gamma_{k+1,2}, \dots, \gamma_{k+1,n_{k+1}}, \gamma_{k+2,1}, \gamma_{k+2,2}, \dots,$
 $\gamma_{k+2,n_{k+2}}, \dots, \gamma_{l,1}, \gamma_{l,2}, \dots, \gamma_{l,n_l} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{f_n(x)}{f_m(x)} &= \frac{\alpha_{1,1}x + \beta_{1,1}}{(x-u_1)^2 + v_1^2} + \frac{\alpha_{1,2}x + \beta_{1,2}}{[(x-u_1)^2 + v_1^2]^2} + \dots + \frac{\alpha_{1,n_1}x + \beta_{1,n_1}}{[(x-u_1)^2 + v_1]^{n_1}} + \\ &\quad + \frac{\alpha_{2,1}x + \beta_{2,1}}{(x-u_2)^2 + v_2^2} + \frac{\alpha_{2,2}x + \beta_{2,2}}{[(x-u_2)^2 + v_2^2]^2} + \dots + \frac{\alpha_{2,n_2}x + \beta_{2,n_2}}{[(x-u_2)^2 + v_2]^{n_2}} + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \frac{\alpha_{k,1}x + \beta_{k,1}}{(x-u_k)^2 + v_k^2} + \frac{\alpha_{k,2}x + \beta_{k,2}}{[(x-u_k)^2 + v_k^2]^2} + \dots + \frac{\alpha_{k,n_k}x + \beta_{k,n_k}}{[(x-u_k)^2 + v_k]^{n_k}} + \\ &\quad + \frac{\gamma_{k+1,1}}{x-b_{k+1}} + \frac{\gamma_{k+1,2}}{(x-b_{k+1})^2} + \dots + \frac{\gamma_{k+1,n_{k+1}}}{(x-b_{k+1})^{n_{k+1}}} + \\ &\quad + \frac{\gamma_{k+2,1}}{x-b_{k+2}} + \frac{\gamma_{k+2,2}}{(x-b_{k+2})^2} + \dots + \frac{\gamma_{k+2,n_{k+2}}}{(x-b_{k+2})^{n_{k+2}}} + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \frac{\gamma_{l,1}}{x-b_l} + \frac{\gamma_{l,2}}{(x-b_l)^2} + \dots + \frac{\gamma_{l,n_l}}{(x-b_l)^{n_l}}. \end{aligned}$$

Čísla $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$, resp. $\gamma_{i,j}$ z predchádzajúcej vety určíme napríklad metódou neurčitých koeficientov¹¹ (príklad 1.1.19).

Príklad 1.1.16.

Nech $b, q, r, s \in \mathbb{R}$, $r^2 - 4s < 0$, $n \in \mathbb{N}$. Vypočítajte $\int \frac{dx}{(x-b)^n}$, $\int \frac{(x+\frac{r}{2}) dx}{(x^2+rx+s)^n}$, $\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^n}$.

Riešenie.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x-b)^n} = \left[\begin{array}{l} x-b=t \mid x \in (-\infty; b) \Leftrightarrow t \in (-\infty; 0) \\ dx=dt \mid x \in (b; \infty) \Leftrightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^n} \implies$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |x-b| + c,$$

$$I_n = \int t^{-n} dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{1}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + c, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad x \in \mathbb{R} - \{b\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Označme $\varphi^2 = s - \frac{r^2}{4} = \frac{4s-r^2}{4} > 0$, potom $x^2 + rx + s = (x + \frac{r}{2})^2 + s - \frac{r^2}{4} = (x + \frac{r}{2})^2 + \varphi^2$.

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{(x+\frac{r}{2}) dx}{(x^2+rx+s)^n} = \int \frac{(x+\frac{r}{2}) dx}{[(x+\frac{r}{2})^2 + \varphi^2]^n} = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = (x + \frac{r}{2})^2 + \varphi^2 = x^2 + rx + s \mid x \in (-\infty; -\frac{r}{2}) \Rightarrow t \in \langle \varphi^2; \infty \rangle \\ dt = 2(x + \frac{r}{2}) dx \mid x \in \langle -\frac{r}{2}; \infty \rangle \Rightarrow t \in \langle \varphi^2; \infty \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} \implies \end{aligned}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln t + c = \frac{1}{2} \ln (x^2 + rx + s) + c,$$

$$J_n = \frac{1}{2} \int t^{-n} dt = \frac{t^{-n+1}}{2(-n+1)} + c = \frac{1}{2(1-n)(x^2+rx+s)^{n-1}} + c, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} K_n &= \int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^n} = \int \frac{dx}{[(x+\frac{r}{2})^2 + \varphi^2]^n} = \left[\begin{array}{l} t = x + \frac{r}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \\ dt = dx, \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{(t^2 + \varphi^2)^n} = \frac{1}{\varphi^2} \int \frac{\varphi^2 dt}{(t^2 + \varphi^2)^n} = \\ &= \frac{1}{\varphi^2} \int \frac{t^2 + \varphi^2 - t^2}{(t^2 + \varphi^2)^n} dt = \frac{1}{\varphi^2} \left(\int \frac{dt}{(t^2 + \varphi^2)^{n-1}} - \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2 + \varphi^2)^n} \right) = \end{aligned}$$

¹¹Túto metódu sme už použili pri integrovaní na strane 9.

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{l} u = t \\ v' = \frac{t}{(t^2 + \varphi^2)^n} = t(t^2 + \varphi^2)^{-n} \left| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \frac{(t^2 + \varphi^2)^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{1}{2(1-n)(t^2 + \varphi^2)^{n-1}} \end{array} \right. \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{\varphi^2} \left(\int \frac{dt}{(t^2 + \varphi^2)^{n-1}} - \frac{t}{2(1-n)(t^2 + \varphi^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dt}{(t^2 + \varphi^2)^{n-1}} \right) = \\
&= \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{3-2n}{2(1-n)} \int \frac{dt}{(t^2 + \varphi^2)^{n-1}} - \frac{t}{2(1-n)(t^2 + \varphi^2)^{n-1}} \right) = \frac{(3-2n)K_{n-1}}{2\varphi^2(1-n)} - \frac{t}{2\varphi^2(1-n)(t^2 + \varphi^2)^{n-1}} \implies \\
K_1 &= \int \frac{dt}{t^2 + \varphi^2} = \frac{1}{\varphi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\varphi} + c = \frac{1}{\sqrt{s - \frac{r^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{r}{2}}{\sqrt{s - \frac{r^2}{4}}} + c, \\
K_n &= \frac{3-2n}{2(s - \frac{r^2}{4})(1-n)} K_{n-1} - \frac{x + \frac{r}{2}}{2(s - \frac{r^2}{4})(1-n)(x^2 + rx + s)^{n-1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad x \in R, \quad c \in R. \blacksquare
\end{aligned}$$

Pomocou príkladu 1.1.16 môžeme vypočítať integrál každého parciálneho zlomku. Platí:

$$\int \frac{a \, dx}{(x-b)^n} = a \int \frac{dx}{(x-b)^n}, \quad \int \frac{(px+q) \, dx}{(x^2+rx+s)^n} = p \int \frac{(x+\frac{r}{2}) \, dx}{(x^2+rx+s)^n} + (q - \frac{pr}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^n}.$$

Príklad 1.1.17.

- a) $\int \frac{x^2 \, dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x \cdot x \, dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} \left| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = -\frac{1}{x^2+a^2} \end{array} \right. \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2} \right) =$
 $= -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c, \quad x \in R, \quad c \in R$ pre všetky $a > 0$.
- b) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 \, dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(x^2+a^2-x^2) \, dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 \, dx}{(x^2+a^2)^2} =$
 $= \frac{1}{a^2} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} \right) + c =$
 $= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + c, \quad x \in R, \quad c \in R$ pre všetky $a > 0$. \blacksquare

Príklad 1.1.18.

Vypočítajte neurčitý integrál $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2} \, dx$.

Riešenie.

Pomocou príkladu 1.1.16. Dosadíme hodnoty $n = 2$, $p = 2$, $q = 3$, $r = 2$, $s = 3$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2} \, dx &= 2 \int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2} \, dx + \int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} \, dx = 2J_2 + K_2 = \\
&= \frac{2}{2(1-2)(x^2+2x+3)^{2-1}} + \frac{3-2 \cdot 2}{2(3-\frac{2^2}{4})(1-2)} K_1 - \frac{x+\frac{2}{2}}{2(3-\frac{2^2}{4})(1-2)(x^2+2x+3)^{2-1}} = \\
&= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4} K_1 + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} = \frac{1}{4} K_1 + \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} = \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3-\frac{2^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{2}{2}}{\sqrt{3-\frac{2^2}{4}}} + \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + c = \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + c, \quad x \in R, \quad c \in R.
\end{aligned}$$

Iné riešenie.

Priamy výpočet. Použijeme 1. ms a výsledky príkladu 1.1.17 b). Pre $x \in R$ platí:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(2x+3) \, dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \int \frac{(2x+2) \, dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \left[\begin{array}{l} t = x^2 + 2x + 3 \\ dt = (2x + 2) \, dx \\ x \in R, \quad t \in (0; \infty) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} z = x + 1, \quad dz = dx \\ x^2 + 2x + 3 = z^2 + 2 \\ x \in R, \quad z \in R \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c = \\
&= \frac{-1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c = \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c, \quad c \in R. \blacksquare
\end{aligned}$$

Príklad 1.1.19.

Vypočítajte:

$$\text{a) } \int \frac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx, \quad \text{b) } \int \frac{-2x^3 + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2} dx.$$

*Riešenie.*a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2(x^2 + 1)$ a platí:

$$\begin{array}{r} (x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x + 1) : (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) = x^2 + x + 1, \\ \underline{-(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2)} \qquad \qquad \qquad \text{zvyšok } x^3 - x^2 + 2x. \\ \qquad \qquad \qquad \underline{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + 1} \\ \qquad \qquad \qquad \underline{-(x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{x^4 - x^3 + x^2 + 1} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{-(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{x^3 - x^2 + 2x} \end{array}$$

Pre rozklad zvyšku na parciálne zlomky platí: $\frac{x^3 - x^2 + 2x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2+1}$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sú neznáme. Po vynásobení výrazom $(x-1)^2(x^2+1)$ dostaneme:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 2x + 0 &= \alpha(x-1)(x^2+1) + \beta(x^2+1) + (\gamma x + \delta)(x-1)^2 = \\ &= \alpha(x^3 - x^2 + x - 1) + \beta(x^2+1) + (\gamma x + \delta)(x^2 - 2x + 1) = \\ &= (\alpha + \gamma)x^3 + (-\alpha + \beta + \delta - 2\gamma)x^2 + (\alpha - 2\delta + \gamma)x + (-\alpha + \beta + \delta). \end{aligned}$$

Z toho vyplývajú 4 lineárne rovnice pre neznáme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$x^3: 1 = \alpha + \gamma, \quad x^2: -1 = -\alpha + \beta + \delta - 2\gamma, \quad x: 2 = \alpha + \gamma - 2\delta, \quad x^0: 0 = -\alpha + \beta + \delta.$$

Ich riešením je štvorica $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1, \gamma = \frac{1}{2}, \delta = -\frac{1}{2}$.Pre ľahšie integrovanie najprv upravíme $\frac{\gamma x + \delta}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{4} \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}$. Potom platí:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx &= \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln|x^2+1| - \frac{1}{2} \arctg x + c, \quad x \neq 1, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)} = \frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{(x+1)^2}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \implies$$

$$\begin{aligned} -2x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 &= \alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1)^2 + \gamma x^2(x+1) + \delta x^2 = \\ &= (\alpha + \gamma)x^3 + (2\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^2 + (\alpha + 2\beta)x + \beta. \end{aligned}$$

Dostaneme 4 lineárne rovnice: $-2 = \alpha + \gamma, 0 = 2\alpha + \beta + \gamma + \delta, 0 = \alpha + 2\beta, 1 = \beta$, ktorých riešením je štvorica $\beta = 1, \alpha = -2, \gamma = 0, \delta = 3$. Potom pre $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ platí:

$$\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2} dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx = -2 \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

1.1.3 Integrovanie iracionálnych funkcií

S integrovaním iracionálnych funkcií sú väčšinou problémy a často sa nezaobídeme bez nekonečných radov. Existujú ale skupiny iracionálnych funkcií, ktoré dokážeme integrovať relatívne bez problémov. Väčšinou ich vhodným spôsobom (najčastejšie substitúciou) prevedieme na integrály racionálnych funkcií. Hovoríme, že **integrál zracionalizujeme**.

- **Integrály typu** $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}, a, b, d, e \in \mathbb{R}, ae - bd \neq 0$

Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú x , $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$ a konštanty, prípadne ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou algebraických operácií sčítania, násobenia, delenia. Predpoklad $ae - bd \neq 0$ zaručuje, že podiel polynómov $ax+b$, $dx+e$ nie je konštantný.¹²

Uvedené integrály zracionalizujeme pomocou substitúcie $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j.

$$t^n = \frac{ax+b}{dx+e} \Rightarrow x = \frac{et^n - b}{-dt^n + a}, \quad dx = \frac{net^{n-1}(-dt^n + a) - (et^n - b)(ndt^{n-1})}{(-dt^n + a)^2} dt = \frac{nt^{n-1}(ae - bd) dt}{(a - dt^n)^2}.$$

Príklad 1.1.20.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}} dx &= \left[\begin{array}{l} x - x^2 = x(1-x) > 0 \\ x \in (0; 1), \quad \sqrt{x^2} = x \end{array} \right] = \int \frac{1-x}{x\sqrt{x^2 \frac{1-x}{x}}} dx = \int \frac{1-x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}, \quad x \in (0; 1), \quad t \in (1; \infty) \\ t^2 = \frac{1-x}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-2t dt}{(1+t^2)^2} = \frac{-2t dt}{(1+t^2)^2} \end{array} \right] = \int \frac{t^2}{1+t^2} \frac{-2t dt}{(1+t^2)^2} = -2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \\ &= -2 \int \frac{(1+t^2-1) dt}{1+t^2} = -2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = -2(t - \operatorname{arctg} t) + c = \\ &= 2 \operatorname{arctg} t - 2t + c = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c, \quad x \in (0; 1), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} \sqrt[3]{x+1}} &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x+1}, \quad t^6 = x+1, \quad 6t^5 dt = dx, \quad x > -1, \quad t > 0 \\ \sqrt{x+1} = (\sqrt[3]{x+1})^3 = t^3, \quad \sqrt[3]{x+1} = (\sqrt[3]{x+1})^2 = t^2 \end{array} \right] = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = \\ &= 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + c = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln(t+1) + c = \\ &= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[3]{x+1} - 6 \ln(\sqrt[3]{x+1} + 1) + c, \quad x > -1, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{x-1}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x}, \quad t^6 = x, \quad 6t^5 dt = dx, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ \sqrt{x} = (\sqrt[3]{x})^3 = t^3, \quad \sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2 = (\sqrt[3]{x})^4 = t^4 \end{array} \right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5 dt}{(t^3+t^4)t^6} = \\ &= 6 \int \frac{(t^6-1) dt}{t^4+t^5} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = 6 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4}\right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t| - \frac{-1}{t} + \frac{-2}{t^2} - \frac{-3}{t^3}\right) + c = 3t^2 - 6t + \ln t^6 + \frac{6}{t} - \frac{12}{t^2} + \frac{18}{t^3} + c = \\ &= 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[3]{x} + \ln x + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{12}{\sqrt[3]{x}} + \frac{18}{\sqrt[3]{x}} + c, \quad x > 0, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx &= \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{x} \geq 0 \\ x \in (0; 1) \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} dx = \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = 1 - z, \quad dx = -dz \\ z = 1 - x, \quad z \in (0; 1) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1}{1-x} - 1} \Rightarrow t^2(1-x) = x, \quad x = \frac{t^2}{t^2+1} \\ dx = \frac{2t(t^2+1) - t^2 \cdot 2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2t dt}{(t^2+1)^2}, \quad t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \\ &= -\int z^{-\frac{1}{2}} dz - \int \frac{2t^2 dt}{(t^2+1)^2} \stackrel{\text{pr. 1.1.17}}{=} -z^{\frac{1}{2}} - 2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)}\right) = \\ &= -2\sqrt{z} + \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c = \left[\begin{array}{l} t \neq 0 \Rightarrow \frac{t}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1} \frac{1}{t} = x \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{x(1-x)}, \quad x \neq 0 \end{array} \right] = \\ &= -2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}} + c, \quad x \in (0; 1), c \in \mathbb{R}. \blacksquare \end{aligned}$$

¹²Dokážeme nepriamo. Nech $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ je také, že $ax+b = k(dx+e) \Rightarrow (a-kd)x + (b-ke) = 0 \Rightarrow a = kd, b = ke \Rightarrow ake = kdb \Rightarrow ae = bd$. To znamená, že pre $ae - bd \neq 0$ podiel nie je konštantný.

- **Integrály typu** $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + e}) dx$, $a, b, e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú x , $\sqrt{ax^2 + bx + e}$ konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou operácií sčítania, násobenia, delenia.

Tieto integrály môžeme zracionalizovať pomocou niektorej z troch **Eulerových substitúcií** (ozn. **1. ES**, **2. ES**, **3. ES**). Použitie ES je síce účinné, ale väčšinou veľmi pracné (príklad 1.1.26). Často nám pri riešení uvedených integrálov pomôže substitúcia pomocou goniometrickej alebo hyperbolickej funkcie (príklady 1.1.21, 1.1.22).

Prvá Eulerova substitúcia $\sqrt{ax^2 + bx + e} = t \pm \sqrt{ax}$ sa používa pre $a > 0$:

$$ax^2 + bx + e = t^2 \pm 2t\sqrt{ax} + ax^2 \Rightarrow bx \mp 2t\sqrt{ax} = t^2 - e \Rightarrow x = \frac{t^2 - e}{b \mp 2\sqrt{at}},$$

$$dx = \frac{2t(b \mp 2\sqrt{at}) - (t^2 - e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b \mp 2\sqrt{at})^2} dt = \frac{2tb \mp 4\sqrt{at}^2 \pm 2\sqrt{at}^2 \mp 2e\sqrt{a}}{(b \mp 2\sqrt{at})^2} dt = \frac{2(\mp \sqrt{at}^2 + tb \mp e\sqrt{a})}{(b \mp 2\sqrt{at})^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + e} = t \pm \sqrt{ax} = t \pm \sqrt{a} \frac{t^2 - e}{b \mp 2\sqrt{at}} = \frac{tb \mp 2\sqrt{at}^2 \pm \sqrt{at}^2 \mp e\sqrt{a}}{b \mp 2\sqrt{at}} = \frac{\mp \sqrt{at}^2 + tb \mp e\sqrt{a}}{b \mp 2\sqrt{at}}.$$

Druhá Eulerova substitúcia $\sqrt{ax^2 + bx + e} = xt \pm \sqrt{e}$ sa používa pre $e > 0$:

$$ax^2 + bx + e = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{e} + e \Rightarrow ax^2 + bx = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{e} \Rightarrow (a - t^2)x^2 = (\pm 2\sqrt{e}t - b)x$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} x = \frac{\pm 2\sqrt{e}t - b}{a - t^2}, \quad dx = \frac{\pm 2\sqrt{e}(a - t^2) - (\pm 2\sqrt{e}t - b)(-2t)}{(a - t^2)^2} dt = \frac{2(\pm \sqrt{e}t^2 - bt \pm a\sqrt{e})}{(a - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + e} = xt \pm \sqrt{e} = \frac{\pm 2\sqrt{e}t - b}{a - t^2} t \pm \sqrt{e} = \frac{\pm 2\sqrt{e}t^2 - bt \pm a\sqrt{e} \mp \sqrt{e}t^2}{a - t^2} = \frac{\pm \sqrt{e}t^2 - bt \pm a\sqrt{e}}{a - t^2}.$$

Tretia Eulerova substitúcia $t = \sqrt{\frac{x - \alpha}{x - \beta}}$, $t \geq 0$ sa používa,¹³ ak má polynóm $ax^2 + bx + e$ dva rôzne reálne korene α , β , t. j. ak platí $ax^2 + bx + e = a(x - \alpha)(x - \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$:

$$t^2 = a \frac{x - \alpha}{x - \beta} \Rightarrow t^2x - \beta t^2 = ax - a\alpha \Rightarrow x = \frac{a\alpha - \beta t^2}{a - t^2},$$

$$dx = \frac{-2\beta t(a - t^2) - (a\alpha - \beta t^2)(-2t)}{(a - t^2)^2} dt = \frac{-2a\beta t + 2\beta t^3 + 2a\alpha t - 2\beta t^3}{(a - t^2)^2} dt = \frac{2a(\alpha - \beta)t}{(a - t^2)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + e} &= \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \sqrt{a\left(\frac{a\alpha - \beta t^2}{a - t^2} - \alpha\right)\left(\frac{a\alpha - \beta t^2}{a - t^2} - \beta\right)} = \\ &= \sqrt{a \frac{a\alpha - \beta t^2 - a\alpha + \alpha t^2}{a - t^2} \frac{a\alpha - \beta t^2 - a\beta + \beta t^2}{a - t^2}} = \sqrt{a \frac{(\alpha - \beta)t^2}{a - t^2} \frac{a(\alpha - \beta)}{a - t^2}} = \frac{|a(\alpha - \beta)|t}{|a - t^2|}. \end{aligned}$$

V niektorých prípadoch môžeme použiť iba jednu ES a niekedy môžeme použiť aj všetky tri ES. Substitúcie $\sqrt{ax^2 + bx + e} = t + \sqrt{ax}$ a $\sqrt{ax^2 + bx + e} = t - \sqrt{ax}$, resp. $\sqrt{ax^2 + bx + e} = xt + \sqrt{e}$ a $\sqrt{ax^2 + bx + e} = xt - \sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z dvojice si vyberieme. Substitúcia použitá v príklade 1.1.20 a) je tretia ES.

Príklad 1.1.21.

Vypočítajte $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$ (pre $a = 1$ dostaneme príklad 1.1.12.).

¹³V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre premennú t a znamienko výrazu $a - t^2$.

Riešenie.

$$J = \left[\begin{array}{l} 2. \text{ ES: } \sqrt{a^2-x^2} = a - xt, \quad t = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x \in (-a; 0) \Leftrightarrow t \in (-1; 0), \quad x \in (0; a) \Leftrightarrow t \in (0; 1) \\ a^2 - x^2 = a^2 - 2axt + x^2t^2 \Rightarrow 2axt = x^2t^2 + x^2 = x^2(t^2 + 1) \Rightarrow x = \frac{2at}{t^2+1}, \quad x \neq 0 \\ dx = \frac{2a(t^2+1) - 2at \cdot 2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2a(1-t^2) dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a - \frac{2at}{t^2+1}t = \frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1} = \frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \stackrel{\text{'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0, \quad x \rightarrow \pm a \Leftrightarrow t \rightarrow \pm 1 \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{2a(1-t^2) dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}} = \int \frac{2 dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + c = 2 \operatorname{arctg} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c, \quad x \in (-a; a), \quad x \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Iné riešenie.

$$J = \left[\begin{array}{l} x = a \sin t, \quad t = \arcsin \frac{x}{a}, \quad x \in (-a; a), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad dx = a \cos t dt \\ \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t| = a \cos t \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{a \cos t dt}{a \cos t} = \int dt = t + c = \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad x \in (-a; a), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Iné riešenie.

$$J = \left[\begin{array}{l} x = a \cos t, \quad t = \arccos \frac{x}{a}, \quad x \in (-a; a), \quad t \in (0; \pi), \quad dx = -a \sin t dt \\ \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} = a\sqrt{\sin^2 t} = a|\sin t| = a \sin t \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{-a \sin t dt}{a \sin t} = -\int dt = -t + c = -\arccos \frac{x}{a} + c, \quad x \in (-a; a), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Iné riešenie.

$$J = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}, \quad t^2 = \frac{a^2-x^2}{x^2} \Rightarrow t^2 x^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{t^2+1} \Rightarrow |x| = \frac{a}{\sqrt{t^2+1}} \\ x = \frac{\pm a}{\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} \frac{\pm a 2t dt}{\sqrt{(t^2+1)^3}} = \frac{\mp a t dt}{\sqrt{(t^2+1)^3}}, \quad a^2 - x^2 = a^2 - \frac{a^2}{t^2+1} = \frac{a^2 t^2 + a^2 - a^2}{t^2+1} = \frac{a^2 t^2}{t^2+1} \\ x \in (0; a) \Rightarrow t \in (0; \infty), \quad x = \frac{a}{\sqrt{t^2+1}}, \quad dx = \frac{-a t dt}{\sqrt{(t^2+1)^3}}, \quad t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a t}{\sqrt{t^2+1}} \\ x \in (-a; 0) \Rightarrow t \in (0; \infty), \quad x = \frac{-a}{\sqrt{t^2+1}}, \quad dx = \frac{a t dt}{\sqrt{(t^2+1)^3}}, \quad t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{-x}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a t}{\sqrt{t^2+1}} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{\mp a t dt}{\sqrt{(t^2+1)^3}}}{\frac{a t}{\sqrt{t^2+1}}} = \mp \int \frac{dt}{t^2+1} = \mp \operatorname{arctg} t + c = \mp \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\pm x} + c = \left[\begin{array}{l} \text{nepárnosť} \\ \text{funkcie arctg} \end{array} \right] =$$

$$= \mp \left(\pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) + c = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + c, \quad x \in (-a; a), \quad x \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Príklad 1.1.22.

Vypočítajte $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, a > 0$.

Riešenie.

$$J = \left[\begin{array}{l} 1. \text{ ES: } \sqrt{x^2-a^2} = t - x, \quad |x| > a \Rightarrow x^2 - a^2 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2+a^2}{2t} \\ dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2+a^2)}{4t^2} dt = \frac{2t^2-2a^2}{4t^2} dt = \frac{t^2-a^2}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2-a^2} = t - \frac{t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2-a^2}{2t} \\ t = x + \sqrt{x^2-a^2}, \quad x \in (-\infty; -a) \Leftrightarrow t \in (-a; 0), \quad x \in (a; \infty) \Leftrightarrow t \in (a; 2t) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2-a^2}) = \infty + \infty = \infty, \quad x \rightarrow \pm a \Leftrightarrow t \rightarrow \pm a \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x + \sqrt{x^2-a^2}) \frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{-\infty-\infty} = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2} dt}{\frac{t^2-a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + c, \quad x \in \mathbb{R} - \langle -a; a \rangle, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Iné riešenie.

Substitúciu $x = a \cosh t: \mathbb{R} \rightarrow \langle a; \infty \rangle$ môžeme použiť iba pre $x > a$.

$$\begin{aligned}
x > a &\Rightarrow J = \left[\begin{array}{l} x = a \cosh t, \quad t = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a}, \quad dx = a \sinh t dt, \quad t \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = a \sqrt{\sinh^2 t} = a |\sinh t| = a \sinh t \end{array} \right] = \int \frac{a \sinh t dt}{a \sinh t} = \\
&= \int dt = t + c_1 = \operatorname{argcosh} \frac{x}{a} + c_1 \stackrel{\text{mal}}{\text{str. 90}} \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) + c_1 = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + c_1 = \\
&= \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a + c_1 = \left[\begin{array}{l} c = c_1 - \ln a \\ c_1 \in R, \quad c \in R \end{array} \right] = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c, \quad c \in R. \\
x < -a &\Rightarrow J = \left[\begin{array}{l} x = -a \cosh t, \quad t = \operatorname{argcosh} \frac{-x}{a}, \quad dx = -a \sinh t dt, \quad t \in (0; \infty) \\ \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = a \sqrt{\sinh^2 t} = a |\sinh t| = a \sinh t \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{-a \sinh t dt}{a \sinh t} = - \int dt = -t + c_1 = -\operatorname{argcosh} \frac{-x}{a} + c_1 = -\ln \left(\frac{-x}{a} + \sqrt{\left(\frac{-x}{a}\right)^2 - 1} \right) + c_1 = \\
&= -\ln \frac{-x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + c_1 = \ln \left(\frac{a}{-x + \sqrt{x^2 - a^2}} \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right) + c_1 = \ln \frac{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{-x^2 + x^2 - a^2} + c_1 = \\
&= \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + c_1 = \left[\begin{array}{l} c = c_1 - \ln a \\ c_1 \in R, \quad c \in R \end{array} \right] = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c, \quad c \in R. \\
\Rightarrow J &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c, \quad x \in R - \langle -a; a \rangle, \quad c \in R. \blacksquare
\end{aligned}$$

Príklad 1.1.23.

Vypočítajte $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $a > 0$.

Riešenie.

$$\begin{aligned}
J &= \left[\begin{array}{l} \text{1. ES:} \\ dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2 - a^2)}{4t^2} dt = \frac{2t^2 + 2a^2}{4t^2} dt = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = t - \frac{t^2 - a^2}{2t} = \frac{t^2 + a^2}{2t} \\ t = x + \sqrt{x^2 + a^2}, \quad \sqrt{x^2 + a^2} > \sqrt{x^2} = |x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 + a^2}) = \infty, \quad x \in (-\infty; \infty) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \frac{x - \sqrt{x^2 + a^2}}{x - \sqrt{x^2 + a^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - a^2}{x - \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{-a^2}{-\infty - \infty} = 0, \quad t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{\frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + a^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c, \quad x \in R, \quad c \in R.
\end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned}
J &= \left[\begin{array}{l} x = a \sinh t, \quad t = \operatorname{argsinh} \frac{x}{a}, \quad dx = a \cosh t dt, \quad x \in R, \quad t \in R \\ \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t + 1)} = a \sqrt{\cosh^2 t} = a |\cosh t| = a \cosh t \end{array} \right] = \int \frac{a \cosh t dt}{a \cosh t} = \int dt = \\
&= t + c_1 = \operatorname{argsinh} \frac{x}{a} + c_1 \stackrel{\text{mal: str. 90}}{\text{str. 90}} \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} \right) + c_1 = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + c_1 = \\
&= \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a + c_1 = \left[\begin{array}{l} c = c_1 - \ln a \\ c_1 \in R, \quad c \in R \end{array} \right] = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c, \quad c \in R.
\end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned}
J &= \left[\begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} t, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + a^2} = a \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 t}} = \frac{a}{|\cos t|} = \frac{a}{\cos t} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{a dt}{\cos^2 t}}{\frac{a}{\cos t}} = \\
&= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} = \left[\begin{array}{l} u = \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ du = \cos t dt, \quad u \in (-1; 1) \end{array} \right] = \int \frac{du}{1 - u^2} = - \int \frac{du}{u^2 - 1} = \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + c_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} + c_1 = \left[\begin{array}{l} x = \frac{a \sin t}{\cos t} = \sqrt{x^2 + a^2} \sin t \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin t = u \end{array} \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}} + c_1 = \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} + c_1 = \left[\begin{array}{l} \text{úpravy:} \\ c = c_1 - \ln a, \quad c \in R \end{array} \right] = \ln (\sqrt{x^2 + a^2} + x) + c, \quad x \in R, \quad c \in R. \blacksquare
\end{aligned}$$

Príklad 1.1.24.

Vypočítajte neurčité integrály $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$.

Riešenie.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left[x = a \sin t, t = \arcsin \frac{x}{a}, x \in \langle -a; a \rangle, t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle, dx = a \cos t dt \right] = \\ &= \int a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2 \cdot 2} \right) + c = \frac{a^2 t}{2} + \frac{2a^2 \sin t \cos t}{4} + c = \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a \sin t \cdot a \cos t}{4} + c = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + c, x \in \langle -a; a \rangle, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int \frac{-x \cdot x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right] = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx. \\ \xrightarrow{\text{rovnica}} & 2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ & \xrightarrow{\text{pr. 1.1.21}} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, x \in (-a; a). \end{aligned}$$

Zostávajúce integrály vypočítame analogicky a ich výpočet prenechávame čitateľovi ako cvičenie. Platí pre ne:

$$\xrightarrow{\text{pr. 1.1.22}} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x \sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, x \in (-\infty; a) \cup (a; \infty).$$

$$\xrightarrow{\text{pr. 1.1.23}} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, x \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Integrály v príklade 1.1.24 môžeme tiež riešiť priamo pomocou rovnakých substitúcií ako príslušné integrály v príkladoch 1.1.21, 1.1.22 a 1.1.23 alebo pomocou binomických substitúcií (poznámka 1.1.7 na strane 41).

Príklad 1.1.25.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{t}, t = \frac{2}{x}, \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{\frac{4}{t^2} - 4} = \frac{2\sqrt{1 - t^2}}{|t|}, x \in (2; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1), |t| = t \\ dx = -\frac{2 dt}{t^2}, \sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{|x|}, x \in (-\infty; -2) \Rightarrow t \in (-1; 0), |t| = -t \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{-\frac{2 dt}{t^2}}{\frac{4}{t^2} \frac{2\sqrt{1 - t^2}}{|t|}} = \int \frac{-2(\pm t) dt}{8\sqrt{1 - t^2}} = \pm \frac{1}{8} \int \frac{-2t dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \left[\begin{array}{l} z = 1 - t^2 \mid t \in (0; 1) \Rightarrow z \in (0; 1) \\ dz = -2t dt \mid t \in (-1; 0) \Rightarrow z \in (0; 1) \end{array} \right] = \\ &= \pm \frac{1}{8} \int z^{-\frac{1}{2}} dz = \pm \frac{1}{8} z^{\frac{1}{2}} + c = \pm \frac{\sqrt{z}}{4} + c = \pm \frac{\sqrt{1 - t^2}}{4} + c = \pm \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4|x|} + c = \\ &= \pm \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4(\pm x)} + c = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4x} + c, x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} &= \left[\begin{array}{l} \text{1. ES: } \sqrt{x^2 - 4} = t - x, |x| > 2 \Rightarrow x^2 - 4 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 + 4}{2t} \\ dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2 + 4)}{4t^2} dt = \frac{2t^2 - 8}{4t^2} dt = \frac{t^2 - 4}{2t^2} dt, t = x + \sqrt{x^2 - 4} \\ \sqrt{x^2 - 4} = t - x = t - \frac{t^2 + 4}{2t} = \frac{t^2 - 4}{2t}, t^2 + 4 = 2xt = 2x(x + \sqrt{x^2 - 4}) > 0 \\ x \in (-\infty; -2) \Leftrightarrow t \in (-2; 0), x \in (2; \infty) \Leftrightarrow t \in (0; 2) \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{\frac{t^2 - 4}{2t^2} dt}{\left(\frac{t^2 + 4}{2t}\right)^2 \frac{t^2 - 4}{2t}} = \int \frac{4t dt}{(t^2 + 4)^2} = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } z = t^2 + 4 \mid t \in (0; 2) \Rightarrow z \in (4; \infty) \\ dz = 2t dt \mid t \in (-2; 0) \Rightarrow z \in (4; \infty) \end{array} \right] = 2 \int \frac{dz}{z^2} = \\ &= -\frac{2}{z} + c_1 = -\frac{2}{t^2 + 4} + c_1 = -\frac{1}{x^2 + x \sqrt{x^2 - 4}} + c_1 = -\frac{1}{x^2 + x \sqrt{x^2 - 4}} \cdot \frac{x^2 - x \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - x \sqrt{x^2 - 4}} + c_1 = \end{aligned}$$

$$= -\frac{x^2-x\sqrt{x^2-4}}{x^4-x^2(x^2-4)} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2-4}-x^2}{4x^2} + c_1 = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} - \frac{1}{4} + c_1 = \left[\begin{array}{l} c = c_1 - \frac{1}{4} \\ c_1 \in R, c \in R \end{array} \right] = \\ = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c, x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty), c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{array}{l} \text{3. ES: } t = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \Rightarrow t^2 = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow xt^2 - 2t^2 = x+2 \Rightarrow x = \frac{2+2t^2}{t^2-1}, x^2 = \frac{4(t^2+1)^2}{(t^2-1)^2} \\ dx = \frac{4t(t^2-1) - (2+2t^2)2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-8t dt}{(t^2-1)^2}, x^2-4 = \frac{4(t^4+2t^2+1) - 4(t^4-2t^2+1)}{(t^2-1)^2} = \frac{16t^2}{(t^2-1)^2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = \infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x-2} = 1, \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{x-2} = 0, t^2+1 = \frac{x+2}{x-2} + 1 = \frac{2x}{x-2} \\ x \in (2; \infty) \Rightarrow t \in (1; \infty), \sqrt{x^2-4} = \left| \frac{4t}{t^2-1} \right| = \frac{4t}{t^2-1}, \sqrt{(x-2)^2} = x-2 \\ x \in (-\infty; -2) \Rightarrow t \in (0; 1), \sqrt{x^2-4} = -\frac{4t}{t^2-1}, \sqrt{(x-2)^2} = -(x-2) \end{array} \right] = \\ = \int \frac{\frac{-8t dt}{(t^2-1)^2}}{\frac{4(t^2+1)^2}{(t^2-1)^2} \left(\pm \frac{4t}{t^2-1} \right)} = \mp \frac{1}{2} \int \frac{(t^2-1) dt}{(t^2+1)^2} = \mp \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} \pm \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = [\text{pr. 1.1.17}] = \\ = \mp \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \arctg t - \frac{t}{2(t^2+1)} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \arctg t + \frac{t}{2(t^2+1)} \right) + c = \pm \frac{t}{2(t^2+1)} + c = \\ = \pm \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}{2 \frac{2x}{x-2}} + c = \pm \frac{(x-2)}{4x} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{4x} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{4x} + c = \\ = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c, x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty), c \in R. \blacksquare$$

Predchádzajúci príklad môžeme riešiť aj tak, že ho najprv vyriešime pre $x \in (2; \infty)$ a následne využijeme vypočítaný výsledok pomocou substitúcie $t = -x$ pre $x \in (-\infty; -2)$:

$$x \in (-\infty; -2) \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{array}{l} x = -t, dx = -dt \\ x^2 = t^2, t \in (2; \infty) \end{array} \right] = \\ = - \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-4}} = -\frac{\sqrt{t^2-4}}{4t} + c = \frac{\sqrt{(-t)^2-4}}{4(-t)} + c = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c, c \in R.$$

Príklad 1.1.26.

Vypočítajte $J = \int \frac{(x^2-x+1) dx}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}$.

Riešenie.

$$J = \left[\begin{array}{l} \text{2. ES: } \sqrt{-x^2+2x+1} = 1-xt, -x^2+2x+1 = 1-2xt+x^2t^2 \Rightarrow x = \frac{2(t+1)}{t^2+1} \\ dx = \frac{2(t^2+1) - (2t+2)2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-2(t^2+2t-1)}{(t^2+1)^2} dt, \sqrt{-x^2+2x+1} = 1 - \frac{2(t+1)t}{t^2+1} \\ x \in (1-\sqrt{2}; 0) \Leftrightarrow t \in (-1-\sqrt{2}; -1), x \in (0; 1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow t \in (-1; -1+\sqrt{2}) \end{array} \right] = \\ = \frac{t = \frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(-x^2+2x+1)^{-\frac{1}{2}}(-2x+2)}{1} = -1}{0 = -x^2+2x+1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow t = \frac{1-\sqrt{0}}{1 \pm \sqrt{2}} = \frac{1 \mp \sqrt{2}}{1 \mp \sqrt{2}} = -1 \pm \sqrt{2}} \\ = \int \frac{\frac{4(t+1)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{2(t+1)}{t^2+1} + 1}{\frac{2(t+1)}{t^2+1} \left(1 - \frac{2t(t+1)}{t^2+1} \right)} dt = [\text{úpravy}] = \int \frac{(t^4-2t^3+4t^2+6t+3) dt}{(t+1)(t^2+1)^2} = \\ = [\text{rozklad na parc. zlomky}] = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1} + \frac{4t+4}{(t^2+1)^2} \right) dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1} + \frac{2 \cdot 2t}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^2} \right) dt = \\ = [\text{pr. 1.1.17}] = \ln|t+1| - 2 \arctg t - \frac{2}{t^2+1} + 2 \arctg t + \frac{2t}{t^2+1} + c = \frac{2t-2}{t^2+1} + \ln|t+1| + c = \\ = \frac{2 \frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x} - 2}{\left(\frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x} \right)^2 + 1} + \ln \left| \frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x} + 1 \right| + c = [\text{úpravy}] = \\ = -\sqrt{-x^2+2x+1} + \ln \left| \frac{1+x-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x} \right| + c, x \in (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}) - \{0\}, c \in R.$$

Iné riešenie.

Integrand najprv upravíme a až potom použijeme 2. ES.

$$\begin{aligned}
 J &= \int \frac{(x^2-x) dx}{x\sqrt{-x^2+2x+1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+2x+1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x+2) dx}{\sqrt{-x^2+2x+1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+2x+1}} = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } z = -x^2 + 2x + 1, \quad dz = (-2x + 2) dx \\ x \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}), \quad t \in (0; 1) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{2. ES: } \sqrt{-x^2 + 2x + 1} = 1 - xt \\ z \text{ predchádzajúceho riešenia} \end{array} \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \int \frac{-2(t^2+2t-1) dt}{(t^2+1)^2} = \left[\text{úpravy} \right] = -\sqrt{z} + \int \frac{dt}{t+1} = -\sqrt{z} + \ln|t+1| + c = \\
 &= -\sqrt{-x^2 + 2x + 1} + \ln \left| \frac{1 - \sqrt{-x^2 + 2x + 1}}{x} + 1 \right| + c = \\
 &= -\sqrt{-x^2 + 2x + 1} + \ln \left| \frac{1 + x - \sqrt{-x^2 + 2x + 1}}{x} \right| + c, \quad x \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) - \{0\}, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Iné riešenie.

Rovnaký postup ako pri predchádzajúcom riešení, ale namiesto 2. ES použijeme $t = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
 J &= -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x+2) dx}{\sqrt{-x^2+2x+1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+2x+1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x+2) dx}{\sqrt{-x^2+2x+1}} + I \implies \\
 x \in (0; 1 + \sqrt{2}) &\implies I = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow t \rightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2}, \quad t \in (-1 + \sqrt{2}; \infty) \\ x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad \sqrt{-x^2 + 2x + 1} = \sqrt{-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} + 1} = \frac{\sqrt{-1 + 2t + t^2}}{t} \end{array} \right] = \\
 &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \frac{\sqrt{t^2 + 2t - 1}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2 - 2}} = -\ln|t+1 + \sqrt{t^2 + 2t - 1}| + c_1 = \\
 &= -\ln \left| \frac{1}{x} + 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 1} \right| + c_1 = -\ln \left| \frac{1 + x + \sqrt{1 + 2x - x^2}}{x} \right| + c_1 = \\
 &= -\ln \left| \frac{(1+x)^2 - (1+2x-x^2)}{x(1+x-\sqrt{1+2x-x^2})} \right| + c_1 = \left[\begin{array}{l} \text{úpravy: } \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ c = c_1 - \ln 2, \quad c \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \ln \left| \frac{1 + x - \sqrt{-x^2 + 2x + 1}}{x} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\
 x \in (1 - \sqrt{2}; 0) &\implies I = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow t \rightarrow \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2}, \quad t \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \\ x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad |t| = -t, \quad |x| = -x, \quad \sqrt{-x^2 + 2x + 1} = \frac{\sqrt{-1 + 2t + t^2}}{-t} \end{array} \right] = \\
 &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \frac{\sqrt{t^2 + 2t - 1}}{-t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2 - 2}} = \ln|t+1 + \sqrt{t^2 + 2t - 1}| + c = \ln \left| \frac{1}{x} + 1 + \sqrt{\frac{1 + 2x - x^2}{x^2}} \right| + c = \\
 &= \ln \left| \frac{1}{x} + 1 + \frac{\sqrt{1 + 2x - x^2}}{-x} \right| + c = \ln \left| \frac{1 + x - \sqrt{-x^2 + 2x + 1}}{x} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\
 \implies J &= -\sqrt{-x^2 + 2x + 1} + \ln \left| \frac{1 + x - \sqrt{-x^2 + 2x + 1}}{x} \right| + c, \quad x \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) - \{0\}, \quad c \in \mathbb{R}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

1.1.4 Integrovanie goniometrických a hyperbolických funkcií

Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické. Môže byť ale veľmi pracné.

- **Integrály typu** $\int f(\sin x, \cos x) dx$

Integrandy obsahujú konštanty, funkcie $\sin x$, $\cos x$ (môžu byť aj implicitne zadané, napr. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$) a ich kombinácie, ktoré vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia. Na zracionalizovanie týchto integrálov na intervaloch neobsahujúcich body¹⁴ $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sa používa tzv. **univerzálna goniometrická substitúcia** (ozn. **UGS**)

¹⁴V bodoch $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nie je funkcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ definovaná (funkcia $\cos \frac{x}{2}$ je nulová).

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Táto substitúcia, podobne ako ES, je účinná, ale väčšinou pracná,¹⁵ pretože jej použitie vedie na racionálne lomené funkcie s polynómami vyšších stupňov. Platí:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{t^2+1}, \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, \quad x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z.$$

Odvodíme substitučné vzťahy pre funkcie sínus a kosínus:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Príklad 1.1.27.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{array}{l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2 dt}{t^2+1} \quad \left| \begin{array}{l} x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ x \neq \pi + 2k\pi, \quad \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, \quad k \in Z \quad \left| \begin{array}{l} x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right] = \\ = \int \frac{\frac{2 dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c, \quad x \in R, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z, \quad c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \left[t = \frac{x}{2}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z \right] = \int \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t) dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t} - \int \frac{-\sin t dt}{\cos t} = \\ = \ln |\sin t| - \ln |\cos t| + c = \ln |\operatorname{tg} t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c, \quad x \in R, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z, \quad c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = \left[t = \cos x, \quad x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), \quad k \in Z \right] = \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \\ = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c, \quad x \in R, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z, \quad c \in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.28.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left[\begin{array}{l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \quad \left| \begin{array}{l} x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \\ dx = \frac{2 dt}{t^2+1}, \quad x \neq \pi + 2k\pi \quad \left| \begin{array}{l} x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \Rightarrow t \in (-1; 1) \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z \quad \left| \begin{array}{l} x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in (1; \infty) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2 dt}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \\ = - \int \frac{2 dt}{t^2-1} = - \frac{2}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = c - \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right|, \quad x \in R - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi, k \in Z \right\}, \quad c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} = \left[t = \sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in Z \right] = \int \frac{dt}{1-t^2} = - \int \frac{dt}{t^2-1} = \\ = - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c, \quad x \in R, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z, \quad c \in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.29.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \left[\begin{array}{l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \neq \pi + 2k\pi \quad \left| \begin{array}{l} \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in Z \\ dx = \frac{2 dt}{t^2+1}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \quad \left| \begin{array}{l} x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \Rightarrow t \in R \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2 dt}{t^2+1}}{1 + \frac{1-t^2}{t^2+1}} = \\ = \int \frac{\frac{2 dt}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int dt = t + c = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c, \quad x \in R, \quad x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in Z, \quad c \in R.$$

¹⁵V dnešnej počítačovej dobe, keď existujú programy na symbolické výpočty (Maxima, Maple, Wolfram Mathematica, ...), to už nie je taký problém.

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{2}, \quad x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ dt = \frac{dx}{2}, \quad t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + c = \\ = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{(1-\cos x) dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x) dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x) dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \\ = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t = \sin x \mid x \in (-\pi+2k\pi; 0+2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \langle -1; 0 \rangle \\ dt = \cos x dx \mid x \in (0+2k\pi; \pi+2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in (0; 1) \end{array} \right] = -\operatorname{cotg} x - \int \frac{dt}{t^2} = \\ = -\operatorname{cotg} x - \frac{1}{-t} + c = -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} + c = \frac{1-\cos x}{\sin x} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Príklad 1.1.30.

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \\ dx = \frac{2dt}{t^2+1}, \quad x \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \\ = \int \frac{\left(\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2} \right) \frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \left[\text{úpravy} \right] = \int \frac{(2t^6 - 10t^4 - 10t^2 + 2) dt}{t^8 - 4t^6 + 22t^4 - 4t^2 + 1} = \dots \text{ 😞.}$$

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme pred použitím UGS najprv upraviť.

Iné riešenie.

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 = \\ = \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array} \right] = \int \frac{2 \cos 2x dx}{1+\cos^2 2x} = \\ = \left[\begin{array}{l} u = 2x, \quad x \in \mathbb{R} \\ du = 2 dx, \quad u \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \int \frac{\cos u du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}, \quad \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1}, \quad du = \frac{2dt}{t^2+1} \\ u \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \\ = \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1} \frac{2dt}{t^2+1}}{1 + \frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \left[\text{úpravy} \right] = \int \frac{(1-t^2) dt}{t^4+1} = \left[\text{rozklad na} \right] = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln |t^2+\sqrt{2}t+1| - \ln |t^2-\sqrt{2}t+1| \right) + c = \\ = \left[\begin{array}{l} t^2 \pm \sqrt{2}t + 1 = \\ = (t \pm \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2} > 0 \end{array} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + c = \left[\begin{array}{l} x = \frac{u}{2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \operatorname{tg} x \\ x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Iné riešenie.

Postup je analogický, ale namiesto UGS použijeme inú substitúciu.

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{2 \cos 2x dx}{1+\cos^2 2x} = \left[\begin{array}{l} u = 2x \\ x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \int \frac{\cos u du}{1+\cos^2 u} = \int \frac{\cos u du}{1+1-\sin^2 u} = - \int \frac{\cos u du}{\sin^2 u - 2} = \\ = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t = \sin u, \quad u \in \mathbb{R} \\ dt = \cos u du, \quad t \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = - \int \frac{dt}{t^2-2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + c = \left[\begin{array}{l} t = \sin u = \sin 2x \\ \sqrt{2} \pm \sin 2x > 0 \end{array} \right] = \\ = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

• Integrály typu $\int f(\sinh x, \cosh x) dx$

Integrandy obsahujú $\sinh x$, $\cosh x$ (aj implicitne), konštanty a ich kombinácie, ktoré vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia. Na zracionalizovanie takýchto integrálov,

analogicky ako pri predchádzajúcom type, môžeme použiť tzv. **univerzálnu hyperbolicú substitúciu** (ozn. **UHS**) $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$, $x \in R$, $t \in (-1; 1)$. Platí:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{2 \cosh^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow dx = 2 \cosh^2 \frac{x}{2} dt = \frac{2 \cosh^2 \frac{x}{2} dt}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 dt}{1 - \frac{\sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 dt}{1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 dt}{1 - t^2}, \\ \sinh x &= 2 \sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2} = \frac{2 \sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tgh} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}, \\ \cosh x &= \cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}. \end{aligned}$$

Príklad 1.1.31.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \cosh x} &= \left[\begin{array}{l} \text{UHS: } t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}, \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx = \frac{2 dt}{1-t^2}, x \in R, t \in (-1; 1) \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2 dt}{1-t^2}}{1 + \frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{2 dt}{1-t^2} = \int dt = \\ &= t + c = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} + c, x \in R, c \in R. \end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \cosh x} &= \left[\frac{1}{\cosh x + 1} \cdot \frac{\cosh x - 1}{\cosh x - 1} = \frac{\cosh x - 1}{\cosh^2 x - 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh^2 x} \right] = \int \frac{\cosh x dx}{\sinh^2 x} - \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \sinh x \quad | \quad x \in (-\infty; 0) \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ dt = \cosh x dx \quad | \quad x \in (0; \infty) \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} - \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{-t} - \operatorname{cotgh} x + c = \\ &= -\frac{1}{t} - \operatorname{cotgh} x + c = -\frac{1}{\sinh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} + c = -\frac{1 + \cosh x}{\sinh x} + c, x \in R, x \neq 0, c \in R. \end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{1 + \cosh x} = \int \frac{dx}{2 \cosh^2 \frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{2}, \quad x \in R \\ dt = \frac{dx}{2}, \quad t \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} + c, x \in R, c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \cosh x} &= \int \frac{dx}{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \int \frac{2 dx}{2 + e^x + e^{-x}} = \left[\begin{array}{l} t = e^x, \quad x = \ln t, \quad dx = \frac{dt}{t} \\ e^{-x} = \frac{1}{t}, \quad x \in R, \quad t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{2 dt}{t(2+t+\frac{1}{t})} = \\ &= \int \frac{2 dt}{t^2 + 2t + 1} = \int \frac{2 dt}{(t+1)^2} = \int 2(t+1)^{-2} dt = 2 \frac{(t+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{2}{e^x + 1} + c, x \in R, c \in R. \blacksquare \end{aligned}$$

1.1.5 Riešené príklady

Príklad 1.1.32.

Vypočítajte $J = \int_{x \in (0; \infty)} \min \left\{ 1, \frac{1}{x} \right\} dx$.

Riešenie.

Označme $f(x) = \min_{x \in (0; \infty)} \left\{ 1, \frac{1}{x} \right\}$. Keďže $f(1) = \min \left\{ 1, \frac{1}{1} \right\} = 1$, potom platí:

$$x \in (0; 1) \Rightarrow J = \int dx = x + c_1, c_1 \in R, \quad x \in \langle 1; \infty) \Rightarrow J = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c_2, c_2 \in R.$$

Ak chceme určiť primitívnu funkciu na intervale $(0; \infty)$, musíme zabezpečiť jej spojitosť v bode $x=1$. To znamená, že musí platiť $1 + c_1 = \ln 1 + c_2$, t. j. $c_1 = c_2 - 1$. Potom

$$J = \int f(x) dx = \int_{x \in (0; \infty)} \min \left\{ 1, \frac{1}{x} \right\} dx = \begin{cases} x + c - 1, & x \in (0; 1), \\ \ln x + c, & x \in \langle 1; \infty), \end{cases} c \in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.33.

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int (x+1)^2 \ln(x-1)^5 dx &= 5 \int (x+1)^2 \ln(x-1) dx = \left[\begin{array}{l} t = x-1, x = t+1, x \in (1; \infty) \\ x+1 = t+2, dx = dt, t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \\
&= 5 \int (t+2)^2 \ln t dt = \left[\begin{array}{l} u = \ln t \quad \left| \begin{array}{l} u' = \frac{1}{t} \\ v = \frac{(t+2)^3}{3} \end{array} \right. \\ v' = (t+2)^2 \end{array} \right] = \frac{5(t+2)^3}{3} \ln t - \frac{5}{3} \int \frac{(t+2)^3}{t} dt = \\
&= \frac{5(t+2)^3}{3} \ln t - \frac{5}{3} \int \frac{t^3 + 6t^2 + 12t + 8}{t} dt = \frac{5(t+2)^3}{3} \ln t - \frac{5}{3} \int [t^2 + 6t + 12 + 8t^{-1}] dt = \\
&= \frac{5(t+2)^3}{3} \ln t - \frac{5}{3} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} + 12t + 8 \ln t \right] + c = \frac{5(t+2)^3}{3} \ln t - \frac{5t^3}{9} - 5t^2 - 20t - \frac{40}{3} \ln t + c = \\
&= \frac{5(x+1)^3}{3} \ln(x-1) - \frac{5(x-1)^3}{9} - 5(x-1)^2 - 20(x-1) - \frac{40}{3} \ln(x-1) + c, x > 0, c \in R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int \ln(x-1)^5 dx &= \left[\begin{array}{l} t = x-1, x \in (1; \infty) \\ dx = dt, t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \ln t^5 dt = 5 \int \ln t dt = \left[\begin{array}{l} u = \ln t \quad \left| \begin{array}{l} u' = \frac{1}{t} \\ v = t \end{array} \right. \\ v' = 1 \end{array} \right] = \\
&= 5t \ln t - 5 \int dt = 5t \ln t - 5t + c_1 = 5(x-1) \ln(x-1) - 5(x-1) + c_1 = \\
&= \left[\begin{array}{l} c = 5 + c_1 \\ c_1 \in R, c \in R \end{array} \right] = 5(x-1) \ln(x-1) - 5x + c, x \in (1; \infty), c \in R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \int \frac{(x-2)^4 dx}{(x-1)^2} &= \left[\begin{array}{l} t = x-1, x = t+1 \quad \left| \begin{array}{l} x \in (-\infty; 1) \Rightarrow t \in (-\infty; 0) \\ x \in (1; \infty) \Rightarrow t \in (0; \infty) \end{array} \right. \\ dx = dt, x-2 = t-1 \end{array} \right] = \int \frac{(t-1)^4 dt}{t^2} = \\
&= \int \frac{(t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1) dt}{t^2} = \int (t^2 - 4t + 6 - 4t^{-1} + t^{-2}) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{4t^2}{2} + 6t - 4 \ln |t| - \frac{1}{t} + c = \\
&= \frac{(x-1)^3}{3} - 2(x-1)^2 + 6(x-1) - 4 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + c, x \in R, x \neq 1, c \in R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \int \frac{dx}{2^{x+1}} &= \left[\begin{array}{l} 2^x + 1 = t, 2^x = t-1, x \in R, t \in (1; \infty) \\ x = \log_2(t-1) = \frac{\ln(t-1)}{\ln 2}, dx = \frac{1}{\ln 2} \frac{dt}{t-1} \end{array} \right] = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{\ln 2} \int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right] dt = \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left[\ln(t-1) - \ln t \right] + c = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{t-1}{t} + c = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{2^x}{2^{x+1}} + c, x \in R, c \in R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \int \frac{dx}{\sqrt{2^x+1}} &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{2^x+1} = t, 2^x + 1 = t^2, 2^x = t^2 - 1, x \in (-\infty; \infty) \\ x = \log_2(t^2 - 1) = \frac{\ln(t^2-1)}{\ln 2}, dx = \frac{1}{\ln 2} \frac{2t dt}{t^2-1}, t \in (1; \infty) \end{array} \right] = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{2t dt}{t(t^2-1)} = \\
&= \frac{2}{\ln 2} \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{2}{2 \ln 2} \ln \frac{t-1}{t+1} + c = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\sqrt{2^x+1}-1}{\sqrt{2^x+1}+1} + c, x \in R, c \in R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x-2}} &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x-2}, t^2 = x-2, x = t^2+2, dx = 2t dt \\ x-1 = t^2+2-1 = t^2+1, x \in (2; \infty), t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = \\
&= \int \frac{2 dt}{t^2+1} = 2 \arctg t + c = 2 \arctg \sqrt{x-2} + c, x \in (2; \infty), c \in R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}} &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{1-x}, t^2 = 1-x, x = 1-t^2 \quad \left| \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1) \Rightarrow t \in (\sqrt{2}; \infty) \\ x \in (-1; 1) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2}) \end{array} \right. \\ dx = -2t dt, x+1 = 2-t^2 \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{-2t dt}{(2-t^2)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}} \right| + c, x < 1, x \neq -1, c \in R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{h) } \int \frac{\sqrt{1-x}}{x+1} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{1-x} \\ \text{vid g) } \end{array} \right] = \int \frac{t(-2t) dt}{2-t^2} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-2} = 2 \int \frac{t^2-2+2}{t^2-2} dt = 2 \int dt + 2 \int \frac{2 dt}{t^2-2} = \\
&\stackrel{\text{g)}}{=} 2t + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + c = 2\sqrt{1-x} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}} \right| + c, x < 1, x \neq -1. \blacksquare
\end{aligned}$$

Příklad 1.1.34.

$$\text{a) } \int \frac{\cos x}{4+3 \sin x} dx = \left[\begin{array}{l} 4+3 \sin x = t, \quad x \in R \\ 3 \cos x dx = dt, \quad t \in \langle 1; 7 \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln t + c = \\ = \frac{1}{3} \ln (4+3 \sin x) + c, \quad x \in R, \quad c \in R.$$

$$\text{b) } \int \frac{1+3 \sin x+2 \cos x}{\sin 2x} dx = \int \frac{dx}{\sin 2x} + \int \frac{3 \sin x+2 \cos x}{2 \sin x \cos x} dx = \left[\begin{array}{l} 2x = u, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z \\ 2 dx = du, \quad u \neq k\pi \end{array} \right] = \\ = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sin u} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\cos x} + \frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{array}{l} \text{pr. 1.1.27} \\ \text{pr. 1.1.28} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c = \\ = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c, \quad x \in R, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in Z, \quad c \in R.$$

$$\text{c) } \int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[3]{\sin x + \cos x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x + \cos x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \\ dt = (\cos x - \sin x) dx, \quad t \in (0; \sqrt{2}), \quad k \in Z \end{array} \right] = - \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = - \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \\ = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = c - \frac{4}{3} \sqrt[3]{(\sin x + \cos x)^3}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in Z, \quad c \in R.$$

$$\text{d) } \int \frac{dx}{4 \cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{4 \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2x}{2}} = \int \frac{2 dx}{5+3 \cos 2x} = \left[\begin{array}{l} 2x = t, \quad x \in R \\ 2 dx = dt, \quad t \in R \end{array} \right] = \int \frac{dt}{5+3 \cos t} = \\ = \left[\begin{array}{l} \text{UGS: } u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \quad \cos t = \frac{1-u^2}{u^2+1}, \quad dt = \frac{2 du}{u^2+1} \\ t \in (-\pi+2k\pi; \pi+2k\pi), \quad k \in Z \Rightarrow u \in R \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2 du}{u^2+1}}{5+3 \frac{1-u^2}{u^2+1}} = \int \frac{2 du}{2u^2+8} = \int \frac{du}{u^2+4} = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + c = \left[u = \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} x \right] = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + c, \quad x \in R, \quad x \neq \pi+2k\pi, \quad k \in Z, \quad c \in R.$$

$$\text{e) } \int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} dx = \int \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx = \\ = \ln |\sin x + \cos x| + c, \quad x \in R, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z, \quad c \in R.$$

$$\text{f) } \int x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{x \sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{x dx}{\cos^2 x} - \int x dx = \int \frac{x dx}{\cos^2 x} - \frac{x^2}{2} = \\ = \left[\begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ u' = 1 \\ v = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right] = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx - \frac{x^2}{2} = \\ = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + c, \quad x \in R, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z, \quad c \in R.$$

$$\text{g) } \int \sqrt{1 + \frac{1}{\sin x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1 + \frac{1}{\sin x}, \quad \sin x = \frac{1}{t-1}, \quad 1 + \frac{1}{\sin x} \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \in (0; 1) \vee \sin x = -1 \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}, \quad \sin x \in (0; 1) \Rightarrow t \in (2; \infty) \\ x \in (0+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi), \quad k \in Z \Rightarrow 0 \leq \cos x = \frac{\sqrt{t^2-2t}}{t-1}, \\ dt = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \Rightarrow dx = \frac{-\sin^2 x dt}{\cos x} = \frac{-(t-1) dt}{(t-1)^2 \sqrt{t^2-2t}} = \frac{-dt}{(t-1)\sqrt{t(t-2)}} \\ x \in \langle \frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi \rangle, \quad k \in Z \Rightarrow 0 \geq \cos x = -\frac{\sqrt{t^2-2t}}{t-1}, \quad dx = \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t(t-2)}} \end{array} \right] = \\ = \int \frac{\mp \sqrt{t} dt}{(t-1)\sqrt{t-2}\sqrt{t}} = \mp \int \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t-2}} \stackrel{\text{pr. 1.1.33 f)}}{=} \mp 2 \operatorname{arctg} \sqrt{t-2} + c = \\ = \begin{cases} -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{\sin x} - 1} + c, & x \in (0+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi), \quad k \in Z, \quad c \in R, \\ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{\sin x} - 1} + c, & x \in \langle \frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi \rangle, \quad k \in Z, \quad c \in R. \end{cases}$$

$$\text{h) } \int \operatorname{tg}^3 x dx = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{t^2+1}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right), \quad k \in Z \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx = (t^2+1) dx, \quad t \in R \end{array} \right] = \int \frac{t^3 dt}{t^2+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{t^3+t-t \, dt}{t^2+1} = \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t \, dt}{t^2+1} = \int t \, dt - \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)' \, dt}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \ln(t^2+1) + c = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + c, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Príklad 1.1.35.

Vypočítajte neurčitý integrál $I_n = \int \sinh^n x \, dx$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Riešenie.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sinh x \cdot \sinh^{n-1} x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \sinh^{n-1} x \quad | \quad u' = (n-1) \sinh^{n-2} x \cdot \cosh x \\ v' = \sinh x \quad | \quad v = \cosh x \end{array} \right] = \\
&= \sinh^{n-1} x \cdot \cosh x - (n-1) \int \sinh^{n-2} x \cdot \cosh^2 x \, dx = \\
&= \sinh^{n-1} x \cdot \cosh x - (n-1) \int \sinh^{n-2} x \cdot (1 + \sinh^2 x) \, dx = \\
&= \sinh^{n-1} x \cdot \cosh x - (n-1) \int \sinh^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sinh^n x \, dx = \\
&= \sinh^{n-1} x \cdot \cosh x - (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots \\
\stackrel{\text{rovnica}}{\implies} n I_n &= I_n + (n-1) I_{n-2} = \sinh^{n-1} x \cdot \cosh x - (n-1) I_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \implies \\
I_0 &= \int dx = x + c, \quad I_1 = \int \sinh x \, dx = \cosh x + c, \quad I_n = \frac{\sinh^{n-1} x \cdot \cosh x}{n} - \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \\
& \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned}
\int \sinh^n x \, dx &= \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^n dx = \frac{1}{2^n} \int \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^x)^{n-k} (-e^{-x})^k \right] dx = \\
&= \frac{1}{2^n} \int \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{nx-kx} (-1)^k e^{-kx} \right] dx = \frac{1}{2^n} \int \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{(n-2k)x} \right] dx = \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \binom{n}{k} \int e^{(n-2k)x} dx \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \binom{n}{k} J_{n-2k} \right] + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

pričom $J_0 = \int dx = x$, $J_m = \int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m}$ pre $m = -n, -n+2, \dots, n-2, n, m \neq 0$.

Iné riešenie.

Pre nepárne $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, môžeme použiť substitúciu $t = \cosh x$.

$$\begin{aligned}
\int \sinh^{2m+1} x \, dx &= \int (\sinh^2 x)^m \sinh x \, dx = \int (\cosh^2 x - 1)^m \sinh x \, dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R} \\ dt = \sinh x \, dx, \quad t \in (1; \infty) \end{array} \right] = \int (t^2 - 1)^m dt = \int \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (t^2)^k (-1)^{m-k} \right] dt = \\
&= \int \left[\sum_{m=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} t^{2k} \right] dt = \sum_{k=0}^m \left[\binom{m}{k} (-1)^{m-k} \int t^{2k} dt \right] = \\
&= \sum_{k=0}^m \left[\binom{m}{k} (-1)^{m-k} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right] + c = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k} \binom{m}{k} \cosh^{2k+1} x}{2k+1} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Pre neurčité integrály funkcií $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\cosh^n x$, $n \in \mathbb{N}$ platia analogické vzorce:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad I_0 = x + c, \quad I_1 = -\cos x + c, \\
&\text{resp. } \int \sin^{2m+1} x \, dx = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1} \binom{m}{k} \cos^{2k+1} x}{2k+1} + c, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n=2, 3, \dots, \quad I_0 = x + c, \quad I_1 = \sin x + c,$$

$$\text{resp. } \int \cos^{2m+1} x \, dx = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \binom{m}{k} \sin^{2k+1} x}{2k+1} + c, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$I_n = \int \cosh^n x \, dx = \frac{\cosh^{n-1} x \cdot \sinh x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n=2, 3, \dots, \quad I_0 = x + c, \quad I_1 = \sinh x + c,$$

$$\text{resp. } \int \cosh^{2m+1} x \, dx = \sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{k} \sinh^{2k+1} x}{2k+1} + c, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ak označíme $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$, potom platí $u+v = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha$,
 $u-v = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$. Zo súčtových vzorcov (mal: veta 3.1.9) vyplýva:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \implies \sin u \cos v = \frac{\sin(u+v) + \sin(u-v)}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \implies \cos u \cos v = \frac{\cos(u+v) + \cos(u-v)}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \implies \sin u \sin v = \frac{\cos(u+v) - \cos(u-v)}{-2}. \end{aligned}$$

Pre hyperbolické funkcie (mal: veta 3.1.14) platia analogické vzorce:

$$\begin{aligned} \sinh u \cosh v &= \frac{\sinh(u+v) + \sinh(u-v)}{2}, & \cosh u \cosh v &= \frac{\cosh(u+v) + \cosh(u-v)}{2}, \\ \sinh u \sinh v &= \frac{\cosh(u+v) - \cosh(u-v)}{2} \end{aligned}$$

Príklad 1.1.36.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \cos^n(ax) \sin(ax) \, dx &= \left[\begin{array}{l} \text{1. ms:} \quad t = \cos(ax), \quad x \in \mathbb{R} \\ dt = -a \sin(ax) \, dx, \quad t \in (-1; 1) \end{array} \right] = - \int \frac{t^n \, dt}{a} = - \frac{t^{n+1}}{a(n+1)} + c = \\ &= - \frac{\cos^{n+1}(ax)}{a(n+1)} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \sin^2(ax) \, dx &= \int \frac{1 - \cos(2ax)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{2 \cdot 2a} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c, \\ \int \sin(ax) \sin(bx) \, dx &= \int \frac{\cos(ax+bx) - \cos(ax-bx)}{-2} \, dx = \int \left(\frac{\cos(a-b)x}{2} - \frac{\cos(a+b)x}{2} \right) \, dx = \\ &= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad a \neq b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \cos^2(ax) \, dx &= \int \frac{1 + \cos(2ax)}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{2 \cdot 2a} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c, \\ \int \cos(ax) \cos(bx) \, dx &= \int \frac{\cos(ax+bx) + \cos(ax-bx)}{2} \, dx = \int \left(\frac{\cos(a-b)x}{2} + \frac{\cos(a+b)x}{2} \right) \, dx = \\ &= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad a \neq b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \sin(ax) \cos(ax) \, dx &= \int \frac{\sin(2ax)}{2} \, dx = \frac{-\cos(2ax)}{2 \cdot 2a} + c = - \frac{\cos(2ax)}{4a} + c, \\ \int \sin(ax) \cos(bx) \, dx &= \int \frac{\sin(ax+bx) + \sin(ax-bx)}{2} \, dx = \int \left(\frac{\sin(a-b)x}{2} + \frac{\sin(a+b)x}{2} \right) \, dx = \\ &= - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad a \neq b. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Príklad 1.1.37.

Vypočítajte neurčité integrály $\int x^n \sin(ax) dx$, $\int x^n \cos(ax) dx$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Riešenie.

Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ platí:

$$\int x^n \sin(ax) dx = \left[\begin{array}{l} u = x^n \\ v' = \sin(ax) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = nx^{n-1} \\ v = -\frac{\cos(ax)}{a} \end{array} \right] = -\frac{x^n \cos(ax)}{a} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos(ax) dx,$$

$$\int x^n \cos(ax) dx = \left[\begin{array}{l} u = x^n \\ v' = \cos(ax) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = nx^{n-1} \\ v = \frac{\sin(ax)}{a} \end{array} \right] = \frac{x^n \sin(ax)}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin(ax) dx.$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(ax) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ v' = \sin(ax) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = -\frac{\cos(ax)}{a} \end{array} \right] = -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{1}{a} \int \cos(ax) dx = \\ &= -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos(ax) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ v' = \cos(ax) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \frac{\sin(ax)}{a} \end{array} \right] = \frac{x \sin(ax)}{a} - \frac{1}{a} \int \sin(ax) dx = \\ &= \frac{x \sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(ax) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ v' = \sin(ax) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 2x \\ v = -\frac{\cos(ax)}{a} \end{array} \right] = -\frac{x^2 \cos(ax)}{a} + \frac{2}{a} \int x \cos(ax) dx = \\ &= -\frac{x^2 \cos(ax)}{a} + \frac{2}{a} \left(\frac{x \sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} \right) + c = -\frac{x^2 \cos(ax)}{a} + \frac{2x \sin(ax)}{a^2} + \frac{2 \cos(ax)}{a^3} + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(ax) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ v' = \cos(ax) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 2x \\ v = \frac{\sin(ax)}{a} \end{array} \right] = \frac{x^2 \sin(ax)}{a} - \frac{2}{a} \int x \sin(ax) dx = \\ &= \frac{x^2 \sin(ax)}{a} - \frac{2}{a} \left(-\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} \right) + c = \frac{x^2 \sin(ax)}{a} + \frac{2x \cos(ax)}{a^2} - \frac{2 \sin(ax)}{a^3} + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin(ax) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ v' = \sin(ax) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 3x^2 \\ v = -\frac{\cos(ax)}{a} \end{array} \right] = -\frac{x^3 \cos(ax)}{a} + \frac{3}{a} \int x^2 \cos(ax) dx = \\ &= -\frac{x^3 \cos(ax)}{a} + \frac{3}{a} \left(\frac{x^2 \sin(ax)}{a} + \frac{2x \cos(ax)}{a^2} - \frac{2 \sin(ax)}{a^3} \right) + c = \\ &= -\frac{x^3 \cos(ax)}{a} + \frac{3x^2 \sin(ax)}{a^2} + \frac{6x \cos(ax)}{a^3} - \frac{6 \sin(ax)}{a^4} + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos(ax) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ v' = \cos(ax) \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 3x^2 \\ v = \frac{\sin(ax)}{a} \end{array} \right] = \frac{x^3 \sin(ax)}{a} - \frac{3}{a} \int x^2 \sin(ax) dx = \\ &= \frac{x^3 \sin(ax)}{a} - \frac{3}{a} \left(-\frac{x^2 \cos(ax)}{a} + \frac{2x \sin(ax)}{a^2} + \frac{2 \cos(ax)}{a^3} \right) + c = \\ &= \frac{x^3 \sin(ax)}{a} + \frac{3x^2 \cos(ax)}{a^2} - \frac{6x \sin(ax)}{a^3} - \frac{6 \cos(ax)}{a^4} + c. \blacksquare \end{aligned}$$

Príklad 1.1.38.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{dx}{x^3 - 7x - 6} &= \int \frac{dx}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{5(x-2)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{20(x+3)} \right) dx = \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{20} \ln|x+3| + c, \quad x \in \mathbb{R} - \{1, 2, -3\}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} &= \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{3(x-2)} \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + c, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 1, 2\}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{dx}{x^3 - 3x - 2} &= \int \frac{dx}{(x-2)(x+1)^2} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{9(x-2)} - \frac{1}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{9} \ln|x-2| - \frac{1}{9} \ln|x+1| + \frac{1}{3(x+1)} + c, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \frac{dx}{x^3+x^2-x-1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} + c, \quad x \in R - \{\pm 1\}, \quad c \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int \frac{dx}{x^3-2x-4} &= \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x-2)} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{10(x-2)} - \frac{x+4}{10(x^2+2x+2)} \right) dx = \\ &= \left[x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 > 0 \right] = \int \left(\frac{1}{10(x-2)} - \frac{2x+2}{20(x^2+2x+2)} - \frac{6}{20[(x+1)^2+1]} \right) dx = \\ &= \frac{1}{20} \ln|x-2| - \frac{1}{20} \ln(x^2+2x+2) - \frac{6}{20} \arctg(x+1) + c, \quad x \in R - \{2\}, \quad c \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \frac{dx}{x^3-3x^2+4x-2} &= \int \frac{dx}{(x^2-2x+2)(x-1)} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2-2x+2} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x-2}{2[(x-1)^2+1]} \right) dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+2) + c, \quad x \in R - \{1\}, \quad c \in R. \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 1.1.39.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}} = \left[\begin{array}{l} (x+1)^2-2^2=(x-1)(x+3) < 0 \\ \Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty) \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = x+1 \quad x \in (-\infty; -3) \Rightarrow t \in (-\infty; -2) \\ dt = dx \quad x \in (1; \infty) \Rightarrow t \in (2; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}} = \ln|t + \sqrt{t^2-4}| + c \\ &= \ln|x+1 + \sqrt{x^2+2x-3}| + c, \quad x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty), \quad c \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \sqrt{x^2+2x-3} \, dx &= \int \sqrt{(x+1)^2-4} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = x+1, \quad dt = dx \\ x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty) \end{array} \right] = \int \sqrt{t^2-4} \, dt = \\ &= \frac{t\sqrt{t^2-4}}{2} - \frac{5}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = \frac{t\sqrt{t^2-4}}{2} - \frac{5}{2} \ln|t + \sqrt{t^2-4}| + c = \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}{2} - \frac{5}{2} \ln|x+1 + \sqrt{x^2+2x-3}| + c, \quad x \in R - (-3; 1), \quad c \in R. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+4}) + c, \quad x \in R, \quad c \in R.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \sqrt{x^2+2x+4} \, dx &= \int \sqrt{(x+1)^2+3} \, dx = \frac{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+3}}{2} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x+4}}{2} + \frac{3}{2} \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+4}) + c, \quad x \in R, \quad c \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}} = \left[\begin{array}{l} 2^2-(x-1)^2=(3-x)(1+x) < 0 \\ \Rightarrow x \in (-1; 3) \end{array} \right] = \\ &= \arcsin \frac{x-1}{2} + c_1 = -\arccos \frac{x-1}{2} + c_2, \quad x \in (-1; 3), \quad c_{1,2} \in R, \text{ resp.} \\ &= 2 \arctg \frac{1-\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1} + c_3 = -\arctg \frac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1} + c_4, \quad x \in (-1; 3), \quad x \neq 1, \quad c_{3,4} \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \sqrt{-x^2+2x+3} \, dx &= \int \sqrt{4-(x-1)^2} \, dx = \int \frac{4-(x-1)^2}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \, dx = \\ &= \int \frac{4 \, dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} + \int \frac{-(x-1)^2 \, dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \left[\begin{array}{l} u = x-1 \\ v' = \frac{-(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \sqrt{4-(x-1)^2} \end{array} \right] = \\ &= 4 \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} - \int \sqrt{4-(x-1)^2} \, dx. \\ \xrightarrow{\text{rovnic}} & \int \sqrt{-x^2+2x+3} \, dx = \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}{2} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}, \quad x \in (-1; 3). \blacksquare \end{aligned}$$

Príklad 1.1.40.

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \left[0 \leq \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 1 \mid x \neq 1, x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \right] = \\
&= \left[t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow x+1 = (x-1)t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \mid x \in (-\infty; -1) \Rightarrow t \in (0; 1) \right] = \\
&\quad \left[dx = \frac{2t(t^2-1) - (t^2+1)2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-4t dt}{(t^2-1)^2} \mid x \in (1; \infty) \Rightarrow t \in (1; \infty) \right] = \\
&= \int \frac{-2t \cdot 2t dt}{(t^2-1)^2} = \left[u = 2t \mid u' = 2 \right] = \frac{2t}{t^2-1} - \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{2t}{t^2-1} - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = \\
&= \frac{2t}{t^2-1} + \ln(t+1) - \ln|t-1| + c = \left[\frac{t}{t^2-1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right] = \\
&= (x-1) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \ln \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right) - \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right| + c, x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty), c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \left[0 \leq \frac{x+1}{x-1} < 1 \mid x > 1: 0 \leq x+1 < x-1 \Rightarrow -1 \leq x, 1 < -1 \Rightarrow \text{spor} \right. \\
&\quad \left. x < 1: 0 \geq x+1 > x-1 \Rightarrow -1 \geq x, 1 > -1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \right] = \\
&= \left[v' = 1 \mid v = x \right. \\
&\quad \left. u = \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \mid u' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{-2}{x-1} \frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{(x-1)^4}} = \right. \\
&\quad \left. = \frac{-1}{|x-1|\sqrt{-2(x+1)}} = \frac{-1}{\sqrt{2}(1-x)\sqrt{-(x+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2(x-1)\sqrt{-x-1}} \right] = \\
&= x \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{x dx}{(x-1)\sqrt{-x-1}} = \left[t = \sqrt{-x-1}, t^2 = -x-1, x = -(t^2+1) \right] = \\
&= x \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{(t^2+1)2t dt}{(-t^2-2)t} = x \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{2} \int \frac{(t^2+2-1) dt}{t^2+2} = \\
&= x \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{2} \int dt - \sqrt{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = x \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \\
&= x \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{2}\sqrt{-x-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-x-1}{2}} + c, x \in (-\infty; -1), c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \left[t = x-1, dx = dt \mid x \in (-\infty; -1) \right] = \int \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} dt = \\
&= \left[v' = 1 \mid v = t \right. \\
&\quad \left. u = \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} \mid u' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t+2}{t}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{t+2}{t}}} \cdot \frac{-2}{t^2} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{-2}{t} \frac{t+2}{t}}} \cdot \frac{-2}{t^4} = \frac{-1}{|t|\sqrt{-2(t+2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2t\sqrt{-t-2}} \right] = \\
&= t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{t dt}{t\sqrt{-t-2}} = t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{-dt}{\sqrt{-t-2}} = \left[z = -t-2, t < -2 \right] = \\
&= t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{z}}{\frac{1}{2}} + c = \left[z > 0 \Rightarrow t < -2 \Rightarrow x < -1 \right] = \\
&= (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{2}\sqrt{-x-1} + c, x \in (-\infty; -1), c \in \mathbb{R}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Príklad 1.1.41.

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int \frac{dx}{x^6+1} &= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{-\frac{x\sqrt{3}+2}{6}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{\frac{x\sqrt{3}+2}{6}}{x^2+\sqrt{3}x+1} \right) dx = \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left[\int \frac{(2x+\sqrt{3}) dx}{x^2+\sqrt{3}x+1} - \int \frac{(2x-\sqrt{3}) dx}{x^2-\sqrt{3}x+1} \right] + \frac{1}{12} \left[\int \frac{dx}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}} + \int \frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}} \right] = \\
&= \frac{\operatorname{arctg} x}{3} + \frac{\sqrt{3} \ln(x^2+\sqrt{3}x+1)}{12} - \frac{\sqrt{3} \ln(x^2-\sqrt{3}x+1)}{12} + \frac{\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{6} + \frac{\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + c =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{\operatorname{arctg} x}{3} + \frac{\operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})}{6} + \frac{\operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})}{6} + c, \quad x \in R, c \in R.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{x \, dx}{x^6 + 1} &= \int \left(\frac{\frac{x}{3}}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{-\frac{x}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{2x \, dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{12} \left[\int \frac{(2x + \sqrt{3}) \, dx}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} + \int \frac{(2x - \sqrt{3}) \, dx}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right] + \frac{\sqrt{3}}{12} \left[\int \frac{dx}{(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2}} - \int \frac{dx}{(x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{\ln(x^2 + 1)}{6} - \frac{\ln(x^2 + \sqrt{3}x + 1)}{12} - \frac{\ln(x^2 - \sqrt{3}x + 1)}{12} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})}{6} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})}{6} + c = \\ &= \frac{1}{12} \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 - x^2 + 1} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})}{6} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})}{6} + c, \quad x \in R, c \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{x^2 \, dx}{x^6 + 1} &= \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{6}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{\frac{1}{6}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right) dx = \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{3} + \frac{\operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})}{3} + \frac{\operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})}{3} + c, \quad x \in R, c \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \frac{x^3 \, dx}{x^6 + 1} &= \int \left(\frac{-\frac{x}{3}}{x^2 + 1} + \frac{\frac{x}{6}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{\frac{x}{6}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{6} \int \frac{2x \, dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{12} \left[\int \frac{(2x + \sqrt{3}) \, dx}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} + \int \frac{(2x - \sqrt{3}) \, dx}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right] + \frac{\sqrt{3}}{12} \left[\int \frac{dx}{(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2}} - \int \frac{dx}{(x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \right] = \\ &= -\frac{\ln(x^2 + 1)}{6} + \frac{\ln(x^2 + \sqrt{3}x + 1)}{12} + \frac{\ln(x^2 - \sqrt{3}x + 1)}{12} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})}{6} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})}{6} + c = \\ &= \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})}{6} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})}{6} + c, \quad x \in R, c \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int \frac{x^4 \, dx}{x^6 + 1} &= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x^2 + 1} + \frac{\frac{x\sqrt{3} - 1}{6}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{-\frac{x\sqrt{3} - 1}{6}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left[\int \frac{(2x - \sqrt{3}) \, dx}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} - \int \frac{(2x + \sqrt{3}) \, dx}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right] + \frac{1}{12} \left[\int \frac{dx}{(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2}} + \int \frac{dx}{(x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{\operatorname{arctg} x}{3} + \frac{\sqrt{3} \ln(x^2 - \sqrt{3}x + 1)}{12} - \frac{\sqrt{3} \ln(x^2 + \sqrt{3}x + 1)}{12} + \frac{\operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})}{6} + \frac{\operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})}{6} + c = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{x^2 - \sqrt{3}x + 1}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} + \frac{\operatorname{arctg} x}{3} + \frac{\operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})}{6} + \frac{\operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})}{6} + c, \quad x \in R, c \in R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \frac{x^5 \, dx}{x^6 + 1} &= \int \left(\frac{\frac{2x}{6}}{x^2 + 1} + \frac{\frac{2x - \sqrt{3}}{6}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{\frac{2x + \sqrt{3}}{6}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right) dx = \\ &= \frac{\ln(x^2 + 1)}{6} + \frac{\ln(x^2 + \sqrt{3}x + 1)}{6} + \frac{\ln(x^2 - \sqrt{3}x + 1)}{6} + c = \frac{\ln(x^6 + 1)}{6} + c, \quad x \in R, c \in R. \end{aligned}$$

Všetky integrály sú riešené rozkladom na parciálne zlomky a následnou úpravou na tabuľkové integrály. Platí $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$ a tiež $x^2 \pm \sqrt{3}x + 1 = (x \pm \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2} > 0$, $x^4 - x^2 + 1 > 0$.

Iné riešenie.

Niekedy je rozumnejšie najprv použiť nejakú vhodnú substitúciu a až potom integrand rozkladať na parciálne zlomky.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{x \, dx}{x^6 + 1} &= \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t = x^2, \quad x \in R \\ dt = 2x \, dx, \quad t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^3 + 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t + 1} + \frac{-\frac{t}{3} + \frac{2}{3}}{t^2 - t + 1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t + 1} - \frac{1}{12} \int \frac{(2t - 1) \, dt}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\ln(t + 1)}{6} - \frac{\ln(t^2 - t + 1)}{12} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + c = \\ &= \frac{1}{12} \ln \frac{(t + 1)^2}{t^2 - t + 1} + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{12} \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 - x^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{3}} + c, \quad x \in R, c \in R. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \frac{x^2 \, dx}{x^6 + 1} = \left[\begin{array}{l} t = x^3, \quad x \in R \\ dt = 3x^2 \, dx, \quad t \in R \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t + c = \frac{\operatorname{arctg} x^3}{3} + c, \quad x \in R, c \in R.$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \frac{x^3 dx}{x^6+1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \cdot 2x dx}{x^6+1} = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t = x^2, x \in R \\ dt = 2x dx, t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t^3+1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{t+\frac{1}{3}}{t^2-t+1}} \right) dt = \\
 &= -\frac{1}{6} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{12} \int \frac{(2t-1) dt}{t^2-t+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = -\frac{\ln|t+1|}{6} + \frac{\ln(t^2-t+1)}{12} + \frac{2}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c = \\
 &= \frac{1}{12} \ln \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + c, x \in R, c \in R. \\
 \text{f) } \int \frac{x^5 dx}{x^6+1} &= \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t = x^6+1, x \in R \\ dt = 6x^5 dx, t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6} \ln t + c = \frac{\ln(x^6+1)}{6} + c, x \in R, c \in R. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Príklad 1.1.42.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \frac{dx}{x \ln x} &= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{[\ln x]'}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c, x \in (0; \infty), c \in R. \\
 \text{b) } \int \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x, x \in (0; \infty) \\ dt = \frac{dx}{x^2+1}, t \in (0; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] = \int \ln t dt \stackrel{\text{pr. 1.1.6 b)}}{=} t \ln t - t + c = \\
 &= \operatorname{arctg} x \cdot \ln \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x + c, x \in (0; \infty), c \in R. \\
 \text{c) } \int x^x (1+\ln x) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^x \mid u' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + \frac{x}{x}) = \\ v' = 1 \mid v = x \qquad \qquad \qquad = x^x (1+\ln x) \end{array} \right] = x^x + c, x > 0, c \in R. \\
 \text{d) } \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \mid u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^{-\frac{1}{2}} \mid v = 2x^{\frac{1}{2}} \end{array} \right] = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \\
 &= 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + c, x \in (0; \infty), c \in R. \\
 \text{e) } \int \ln(x^2+1) dx &= \left[\begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \ln(x^2+1) \mid v' = \frac{2x}{x^2+1} \end{array} \right] = x \ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2 dx}{x^2+1} = \\
 &= x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = x \ln(x^2+1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\
 &= x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + c, x \in R, c \in R. \\
 \text{f) } \int x \ln^2 x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x \mid u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = x \mid v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int x \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \mid u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \mid v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x dx}{2} \right] = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + c, x \in (0; \infty), c \in R. \\
 \text{g) } \int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \mid u' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ v' = 1 \mid v = x \end{array} \right] = \\
 &= x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t = x^2+1, x \in R \\ dt = 2x dx, t \in (1; \infty) \end{array} \right] = \\
 &= x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} + c = \\
 &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + c, x \in R, c \in R. \\
 \text{h) } \int \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \mid u' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \dots \\ v' = 1 \mid v = x \qquad \qquad \qquad \dots = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right] = \\
 &= x \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \\
 &= x \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - \frac{x}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + c, x \in (-1; 1), c \in R. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Příklad 1.1.43.

- a)
$$\int \frac{dx}{(x-\sqrt{x^2-1})^2} = \int \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2 dx}{(x-\sqrt{x^2-1})^2(x+\sqrt{x^2-1})^2} = \int \frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{(x^2-(x^2-1))^2} dx =$$

$$= \int \frac{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}{1} dx = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } x^2-1=t, \quad 2x dx=dt \\ x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle, \quad t \in \langle 0; \infty \rangle \end{array} \right] = \frac{2x^3}{3} - x + \int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2x^3}{3} - x + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + c, \quad x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty \rangle, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- b)
$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } t=1-x^2, \quad x \in (-1; 1) \\ dt = -2x dx, \quad t \in \langle 0; 1 \rangle \end{array} \right] =$$

$$= \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \arcsin x - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} + c = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c, \quad x \in (-1; 1), \quad c \in \mathbb{R}.$$
- c)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}} = \int \frac{(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}) dx}{(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4})(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4})} = \int \frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}{x-3-(x-4)} dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}{1} dx = \int (\sqrt{x-3} - \sqrt{x-4}) dx = \int ((x-3)^{\frac{1}{2}} - (x-4)^{\frac{1}{2}}) dx =$$

$$= \frac{(x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{(x-3)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{(x-4)^3}}{3} + c, \quad x \in \langle 4; \infty \rangle, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- d)
$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{1-x^2} \quad | \quad u' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{1}{x^2} \quad | \quad v = -\frac{1}{x} \end{array} \right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c, \quad x \in \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- e)
$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2 dx}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})} = \int \frac{1+2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{1-(1-x^2)} dx = \int \frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x^2} - 1 + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2} \right) dx \stackrel{\text{d)}}{=} -\frac{2}{x} - x - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x} - 2 \arcsin x + c, \quad x \in \langle -1; 1 \rangle, \quad x \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- f)
$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} x \geq 0, \quad x\sqrt{x} = \sqrt{x^3}, \quad x \in \langle 0; 1 \rangle \\ 1-\sqrt{x^3} > 0 \Rightarrow 1 > \sqrt{x^3} \Rightarrow 1 > x \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{x} dx}{1-x\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x}, \quad x = t^2 \\ dx = 2t dt, \quad t \in \langle 0; 1 \rangle \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{2t^2 dt}{\sqrt{1-t^3}} = \left[\begin{array}{l} u = 1-t^3, \quad u \in \langle 0; 1 \rangle \\ du = -3t^2 dt \end{array} \right] = -\frac{2}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} + c = -\frac{4}{3} \sqrt{u} + c =$$

$$= -\frac{4}{3} \sqrt{1-t^3} + c = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x\sqrt{x}} + c, \quad x \in \langle 0; 1 \rangle, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- g)
$$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} \text{3. ES: } t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \Rightarrow t^2 = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-2t dt}{(t^2+1)^2} \\ x(1-x) > 0 \Rightarrow x \in \langle 0; 1 \rangle \Rightarrow t \in \langle 0; \infty \rangle, \quad \frac{1-x}{\sqrt{x(1-x)}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}} = t \end{array} \right] = \int \frac{t \frac{-2t dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{1}{t^2+1}} =$$

$$= \int \frac{-2t^2 dt}{t^2+1} = \int \frac{(2-t^2-2) dt}{t^2+1} = \int \left(\frac{2}{t^2+1} - 2 \right) dt = 2 \arctg t - 2t + c =$$

$$= 2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{x}} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c, \quad x \in \langle 0; 1 \rangle, \quad c \in \mathbb{R}.$$
- h)
$$\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x} dx = \left[\begin{array}{l} x \neq 0, \quad x(1-x) \geq 0 \\ x \in \langle 0; 1 \rangle, \quad \sqrt{x^2} = x \end{array} \right] = \int \sqrt{\frac{x-x^2}{x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{g): } t = \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \quad t \in \langle 0; \infty \rangle \\ x = \frac{1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-2t dt}{(t^2+1)^2} \end{array} \right] = \int \frac{-2t^2 dt}{(t^2+1)^2} \stackrel{\text{pr. 1.1.17 a)}}{=} -\arctg t + \frac{t}{t^2+1} + c =$$

$$= -\arctg \sqrt{\frac{1-x}{x}} + x \sqrt{\frac{1-x}{x}} + c = -\arctg \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{x-x^2} + c, \quad x \in \langle 0; 1 \rangle, \quad c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Príklad 1.1.44.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}} &= \left[\begin{array}{l} \text{1. ms} \quad t = \frac{1}{x^2+1}, \quad x = \sqrt{\frac{1-t}{t}}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad t \in (0; 1) \\ x^2 = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}, \quad dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{-t-(1-t)}{t^2} dt = \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{-dt}{2t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{-dt}{2t^2}}{\frac{1-t}{t} \sqrt{\frac{1}{t}}} = \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1-t)\sqrt{1-t}} = -\frac{1}{2} \int (1-t)^{-\frac{3}{2}} dt = -\frac{1}{2} \frac{-(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{\sqrt{1-t}} + c = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}} + c = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}} + c = -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} + c, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty), \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} = \frac{\sqrt{1-e^x}}{\sqrt{1+e^x}}, \quad t^2 = \frac{1-e^x}{1+e^x} \Rightarrow t^2 + t^2 e^x = 1 - e^x \Rightarrow e^x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = \ln \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{1-e^x}{1+e^x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow t \in (0; 1) \\ dx = [\ln(1-t^2) - \ln(1+t^2)]' = \left(\frac{-2t}{1-t^2} - \frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \left(\frac{2t}{t^2-1} - \frac{2t}{t^2+1}\right) dt \end{array} \right] = \\
 &= \int \left(\frac{2t^2}{t^2-1} - \frac{2t^2}{t^2+1}\right) dt = \int \left(\frac{2t^2-2+2}{t^2-1} - \frac{2t^2+2-2}{t^2+1}\right) dt = \int \left(2 + \frac{2}{t^2-1} - 2 + \frac{2}{t^2+1}\right) dt = \\
 &= \int \frac{2 dt}{t^2-1} + \int \frac{2 dt}{t^2+1} = \ln \frac{t-1}{t+1} + 2 \operatorname{arctg} t + c = \left[\begin{array}{l} \frac{t-1}{t+1} = \frac{\frac{\sqrt{1-e^x}}{\sqrt{1+e^x}} - 1}{\frac{\sqrt{1-e^x}}{\sqrt{1+e^x}} + 1} = \frac{\sqrt{1-e^x} - \sqrt{1+e^x}}{\sqrt{1-e^x} + \sqrt{1+e^x}} \\ \frac{t-1}{t+1} = \frac{\sqrt{1-e^x} - \sqrt{1+e^x}}{\sqrt{1-e^x} + \sqrt{1+e^x}} \end{array} \right] = \\
 &= \ln \frac{\sqrt{1-e^x} - \sqrt{1+e^x}}{\sqrt{1-e^x} + \sqrt{1+e^x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} + c, \quad x \in (-\infty; 0), \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \quad \left| \begin{array}{l} x \in (1; \infty) \Rightarrow t \in (0; 1), \quad |t| = t \\ x \in (-\infty; -1) \Rightarrow t \in (-1; 0), \quad |t| = -t \end{array} \right. \\ \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} \end{array} \right] = \\
 &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pm t}} = \mp \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mp \arcsin t + c = \mp \arcsin \frac{1}{x} + c = -\left(\pm \arcsin \frac{1}{x}\right) + c = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \text{nepárnosť} \\ \text{funkcie arcsin} \end{array} \right] = -\arcsin \frac{1}{\pm x} + c = -\arcsin \frac{1}{|x|} + c, \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty), \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}, \quad \sqrt{t^2+1} = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \\ dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad x \in (0; \infty) \Leftrightarrow t \in (0; \infty), \quad x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow t \in (-\infty; 0) \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \frac{\sqrt{t^2+1}}{\pm t}} = \\
 &= \int \frac{\mp dt}{\sqrt{t^2+1}} = \mp \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + c = \mp \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{\pm x}\right) = \mp \ln \frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x} = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-(1+x^2)}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}}, \quad x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \\ x \geq 0 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|}, \quad x \leq 0 \Rightarrow \ln \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} = \ln \frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} = -\ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|} \end{array} \right] = \\
 &= -\ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|} + c = -\ln \left| \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right| + c, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty), \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{|t|}, \quad \sqrt{t^2-1} = \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} \\ dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad x \in (0; 1) \Leftrightarrow t \in (1; \infty), \quad x \in (-1; 0) \Leftrightarrow t \in (-\infty; -1) \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \frac{\sqrt{t^2-1}}{\pm t}} = \\
 &= \int \frac{\mp dt}{\sqrt{t^2-1}} = \mp \ln|t + \sqrt{t^2-1}| + c = \mp \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pm x} \right| = \mp \ln \left| \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x} \right| = \\
 &= \left[\begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| = \ln \left| \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x(1+\sqrt{1-x^2})} \right| = \ln \left| \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} \right| = \ln \left| \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| \\ \phantom{x < 0} = -\ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + c, \quad x \in (-1; 0) \cup (0; 1), \quad c \in \mathbb{R}. \end{array} \right] = \\
 &= -\ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + c, \quad x \in (-1; 0) \cup (0; 1), \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$\text{f) } \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x \cdot x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \text{1. ms:} \quad t = 1-x^2, \quad dt = -2x dx \\ x^2 = 1-t, \quad x \in (-1; 1), \quad t \in (0; 1) \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-t)^2 dt}{\sqrt{t}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int \frac{1-2t+t^2}{\sqrt{t}} dt = \int \left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}} \right) dt = -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \\
&= -\sqrt{t} + \frac{2\sqrt{t^3}}{3} - \frac{\sqrt{t^5}}{5} + c = -\sqrt{1-x^2} + \frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5} + c, x \in (-1; 1), c \in \mathbb{R}. \\
\text{g) } \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} &= \left[\begin{array}{l} x = t^3, t = \sqrt[3]{x}, x \in (0; \infty) \\ dx = 3t^2 dt \quad t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{3t^2 dt}{1+t} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(3t - 3 + \frac{3}{t+1} \right) dt = \\
&= \frac{3t^2}{2} - 3t + 3 \ln(t+1) + c = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} - 3\sqrt[3]{x} + 3 \ln(1+\sqrt[3]{x}) + c, x \in (0; \infty), c \in \mathbb{R}. \\
\text{h) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} &= \left[\begin{array}{l} x = t^{12}, t = \sqrt[12]{x}, x \in (0; \infty) \\ dx = 12t^{11} dt \quad t \in (0; \infty) \end{array} \right] = \int \frac{12t^{11} dt}{t^2+t^3} = \int \frac{12t^9 dt}{1+t} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \\
&= \int \left(12t^8 - 12t^7 + 12t^6 - 12t^5 + 12t^4 - 12t^3 + 12t^2 - 12t + 12 - \frac{12}{1+t} \right) dt = \\
&= \frac{4t^9}{3} - \frac{3t^8}{2} + \frac{12t^7}{7} - 2t^6 + \frac{12t^5}{5} - 3t^4 + 4t^3 - 6t^2 + 12t - 12 \ln(1+t) + c = \\
&= \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{12\sqrt[12]{x^7}}{7} - 2\sqrt{x} + \frac{12\sqrt[5]{x^5}}{5} - 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} - \\
&\quad - 12 \ln(1 + \sqrt[12]{x}) + c, x \in (0; \infty), c \in \mathbb{R}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Príklad 1.1.45.

Vypočítajte:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}, \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}, \quad \text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

*Riešenie.*a) Výpočet rozdelíme na dve časti (pre $x > 0$ a pre $x < 0$).

$$\begin{aligned}
x \in (0; 1) \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{|x|} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}, t^3 = \frac{1-x^3}{x^3}, t \in (0; \infty) \\ x^3 = \frac{1}{t^3+1}, x = \frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}}, dx = \frac{-\frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt}{\sqrt[3]{(t^3+1)^4}}, \sqrt[3]{1-x^3} = tx = \frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}} \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{-\frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{(t^3+1)^4}}}{\frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}}} = \int \frac{-t dt}{t^3+1} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{-\frac{t}{3}-\frac{1}{3}}{t^2-t+1} \right) dt = \left[\begin{array}{l} \text{úpravy} \end{array} \right] = \\
&= \frac{2}{6} \int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{6} \int \frac{(2t-1) dt}{t^2-t+1} - \frac{3}{6} \int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2 \ln(t+1)}{6} - \frac{\ln(t^2-t+1)}{6} - \frac{3}{6\sqrt{3}} \arctg \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^3}{t^3+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c = \\
&= \left[\ln \frac{(t+1)^3}{t^3+1} = \ln \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} + 1\right)^3}{\frac{1}{x^3}} = \ln \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right)^3 = 3 \ln \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) \right] = \\
&\quad = \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}} + c, c \in \mathbb{R}. \\
x \in (-\infty; 0) \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{-\left(\frac{1}{x^3}-1\right)} = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{-x^3}} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{|x|} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-x}, t \in (1; \infty) \\ x^3 = \frac{-1}{t^3-1}, x = \frac{-1}{\sqrt[3]{t^3-1}}, dx = \frac{-\frac{-1}{3} \cdot 3t^2 dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}, \sqrt[3]{1-x^3} = -tx = \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{\frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}}{\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}} = \int \frac{t dt}{t^3-1} = \left[\begin{array}{l} \text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1} + \frac{-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}}{t^2+t+1} \right) dt = \left[\begin{array}{l} \text{úpravy} \end{array} \right] = \\
&= \frac{2}{6} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{6} \int \frac{(2t+1) dt}{t^2+t+1} + \frac{3}{6} \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2 \ln(t-1)}{6} - \frac{\ln(t^2+t+1)}{6} + \frac{3}{6\sqrt{3}} \arctg \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c = \left[\begin{array}{l} \text{nepárnosť} \\ \text{funkcie arctg} \end{array} \right] = \frac{1}{6} \ln \frac{(t-1)^3}{t^3-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{-2t-1}{\sqrt{3}} + c = \\
&= \left[\ln \frac{(t-1)^3}{t^3-1} = \ln \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-x} - 1\right)^3}{\frac{-1}{x^3}} = \ln \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right)^3 = 3 \ln \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) \right] = \\
&\quad = \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}} + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1-x^3} + x) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}} + c, x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1), c \in \mathbb{R}.$$

b) Postup je analogický ako v časti a). Stručne ho načrtneme.

$$x \in (0; \infty) \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1} = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}, t^3 = \frac{1+x^3}{x^3}, t \in (1; \infty) \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}, dx = \frac{-t^2 dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}, \sqrt[3]{1+x^3} = \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} \end{array} \right] = \int \frac{-t dt}{t^3-1} =$$

$$\stackrel{\text{a)}}{=} -\frac{1}{6} \ln \frac{(t-1)^3}{t^3-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c = \left[\ln \frac{(t-1)^3}{t^3-1} = \ln \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}-1\right)^3}{\frac{1}{x^3}} = 3 \ln(\sqrt[3]{1+x^3}-x) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1+x^3}-x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$x \in (-1; 0) \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{-\left(\frac{1}{x^3}+1\right)} = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{-x}, t^3 = \frac{1+x^3}{-x^3}, t \in (0; \infty) \\ x = \frac{-1}{\sqrt[3]{t^3+1}}, dx = \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{(t^3+1)^4}}, \sqrt[3]{1+x^3} = \frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}} \end{array} \right] = \int \frac{t dt}{t^3+1} =$$

$$\stackrel{\text{a)}}{=} -\frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^3}{t^3+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c = \left[\ln \frac{(t+1)^3}{t^3+1} = \ln \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{-x}+1\right)^3}{\frac{-1}{x^3}} = 3 \ln(\sqrt[3]{1+x^3}-x) \right] =$$

$$= \left[\operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} = -\operatorname{arctg} \frac{-2t+1}{\sqrt{3}} \right] = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1+x^3}-x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1+x^3}-x) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} + c, x \in (-1; 0) \cup (0; \infty), c \in \mathbb{R}.$$

c) Až na definičný obor integrálu $(1; \infty)$ je postup je analogický ako v a), resp. b).

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}, t^3 = \frac{x^3-1}{x^3}, x \in (1; \infty), t \in (0; 1) \\ x^3 = \frac{1}{1-t^3}, x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-t^3}}, dx = \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{(1-t^3)^4}}, \sqrt[3]{x^3-1} = \frac{t}{\sqrt[3]{1-t^3}} \end{array} \right] = \int \frac{t dt}{1-t^3} = \int \frac{-t dt}{t^3-1} =$$

$$\stackrel{\text{a)}}{=} -\frac{1}{6} \ln \frac{(t-1)^3}{t^3-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c = -\frac{1}{6} \ln \frac{(1-t)^3}{1-t^3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \left[\ln \frac{(t-1)^3}{t^3-1} = \ln \frac{\left(1-\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}\right)^3}{\frac{1}{x^3}} = 3 \ln(x - \sqrt[3]{x^3-1}) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(x - \sqrt[3]{x^3-1}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x^3-1}+x}{x\sqrt{3}} + c, x \in (1; \infty), c \in \mathbb{R}.$$

Iné riešenie.

Pre $x > 0$ použijeme rovnaké substitúcie, pre $x < 0$ substitúcie zmeníme.

$$\text{a) } x \in (0; 1) \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \left[t = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} \right] = \frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1-x^3} + x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}} + c.$$

$$x \in (-\infty; 0) \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \left[\begin{array}{l} x = -t, dx = -dt, t \in (0; \infty) \\ 1-x^3 = 1-(-t)^3 = 1+t^3 \end{array} \right] = \int \frac{-dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} =$$

$$\stackrel{\text{b)}}{=} \frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1+t^3}-t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+t^3}+t}{t\sqrt{3}} + c = \left[\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+t^3}+t}{t\sqrt{3}} = -\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+t^3}+t}{-t\sqrt{3}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1-x^3} + x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } x \in (0; \infty) \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left[t = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1} \right] = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1+x^3}-x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} + c.$$

$$x \in (-1; 0) \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left[\begin{array}{l} x = -t, dx = -dt, t \in (0; 1) \\ 1+x^3 = 1+(-t)^3 = 1-t^3 \end{array} \right] = \int \frac{-dt}{\sqrt[3]{1-t^3}} =$$

$$\stackrel{\text{a)}}{=} -\frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1-t^3}+t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-t^3}-t}{t\sqrt{3}} + c = \left[\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-t^3}-t}{t\sqrt{3}} = -\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-t^3}-t}{-t\sqrt{3}} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(\sqrt[3]{1+x^3}-x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} + c, c \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Poznámka 1.1.7.

$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x^n \pm 1}}$, $\int \sqrt[n]{x^n \pm 1} dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, $\int \sqrt[n]{1-x^n} dx$, $n=2, 3, 4, \dots$ sa zaraďujú medzi tzv. **binomické integrály** a racionalizujú sa pomocou substitúcií $t = \sqrt[n]{1 \pm \frac{1}{x^n}}$, resp. $t = \sqrt[n]{\frac{1}{x^n} \pm 1}$. Pre $n=2$ sú tieto integrály riešené v príkladoch 1.1.21, 1.1.22, 1.1.23, 1.1.24, 1.1.39.

Cvičenia

1.1.1. Dokážte, že ak je funkcia $f(x)$, $x \in R$ periodická s periódou p , potom aj k nej primitívna funkcia $F(x)$, $x \in R$ je periodická s periódou p .

1.1.2. Vypočítajte:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$,	b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$,	c) $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$,	d) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$,
e) $\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$,	f) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$,	g) $\int \frac{dx}{x^3-3x^2-x+3}$,	h) $\int \frac{dx}{x^3-7x+6}$,
i) $\int \frac{dx}{x^3+2x^2-x-2}$,	j) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-4x+4}$,	k) $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$,	l) $\int \frac{dx}{x^3+4x^2+5x+2}$,
m) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2-4}$,	n) $\int \frac{dx}{x^3-3x+2}$,	o) $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x+1}$,	p) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+3x-2}$,
q) $\int \frac{dx}{x^3-3x^2+3x-2}$,	r) $\int \frac{dx}{x^3+1}$,	s) $\int \frac{dx}{(1-x)x^2}$,	t) $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+2x+3)^3}$,
u) $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+4x+6)^3}$,	v) $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+4x+5)^3}$,	w) $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+4x+3)^3}$,	x) $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+4x+2)^3}$.

1.1.3. Vypočítajte:

a) $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$,	b) $\int \frac{(x-1)^2 dx}{(2-x)^5}$,	c) $\int \frac{(x-2)^3 dx}{(1-x)^5}$,	d) $\int \frac{(x+1)^6 dx}{(-2-x)^3}$,
e) $\int \frac{(x+1)^4 dx}{(2-x)^3}$,	f) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$,	g) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^3}$,	h) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^4}$,
i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$,	j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$,	k) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-3}}$,	l) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$,
m) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+6}}$,	n) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-2}}$,	o) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-5}}$,	p) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$,
q) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-2}}$,	r) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$,	s) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2+3x}}$,	t) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-2+3x}}$,
u) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{-1-3x}}$,	v) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2+3x}}$,	w) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-2x}}$,	x) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-1-2x}}$.

1.1.4. Vypočítajte:

a) $\int x-1 (x-1)^6 dx$,	b) $\int x-1 (x-1)^7 dx$,	c) $\int \sqrt{x^2+4x+6} dx$,
d) $\int \sqrt{x^2+4x+3} dx$,	e) $\int \sqrt{x^2+4x-3} dx$,	f) $\int \sqrt{x^2+2x+3} dx$,
g) $\int \sqrt{-x^2+4x+6} dx$,	h) $\int \sqrt{-x^2+4x-2} dx$,	i) $\int \sqrt{-x^2+4x-5} dx$,
j) $\int \sqrt{-x^2+4x+5} dx$,	k) $\int \sqrt{-x^2-4x-2} dx$,	l) $\int \sqrt{-x^2-4x-3} dx$,
m) $\int \frac{\sqrt{x-1} dx}{2\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}$,	n) $\int \frac{\sqrt{x-1} dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}$,	o) $\int \frac{\sqrt{x-1} dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

1.1.5. Vypočítajte:

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, & \text{b) } \int \frac{\sqrt{2+3x} dx}{x-2}, & \text{c) } \int \frac{\sqrt{2+3x} dx}{x+2}, & \text{d) } \int \frac{\sqrt{-1-2x} dx}{x-1}, \quad \text{e) } \int \frac{\sqrt{1-2x} dx}{x-1}, \\
\text{f) } \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx, & \text{g) } \int \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx, & \text{h) } \int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx, & \text{i) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{j) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\
\text{k) } \int \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} dx, & \text{l) } \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx, & \text{m) } \int \frac{(x-1) dx}{\sqrt[3]{x+1}}, & \text{n) } \int \frac{x dx}{\sqrt{x+x}}, \quad \text{o) } \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx, \\
\text{p) } \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx, & \text{q) } \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}, & \text{r) } \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x+\sqrt{x^3}}, & \text{s) } \int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{x^2+x}}, \quad \text{t) } \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^3}}, \\
\text{u) } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, & \text{v) } \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^3+1}}, & \text{w) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}, & \text{x) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4-1}}, \quad \text{y) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.
\end{array}$$

1.1.6. Vypočítajte:

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } \int \arcsin x dx, & \text{b) } \int x \arcsin x dx, & \text{c) } \int x^2 \arcsin x dx, \\
\text{d) } \int \arccos x dx, & \text{e) } \int x \arccos x dx, & \text{f) } \int x^2 \arccos x dx, \\
\text{g) } \int x \operatorname{arctg} x dx, & \text{h) } \int x^2 \operatorname{arctg} x dx, & \text{i) } \int x^3 \operatorname{arctg} x dx, \\
\text{j) } \int x \operatorname{arctg}^2 x dx, & \text{k) } \int \operatorname{arccotg} x dx, & \text{l) } \int x \operatorname{arccotg} x dx, \\
\text{m) } \int x^2 \operatorname{arccotg} x dx, & \text{n) } \int x^3 \operatorname{arccotg} x dx, & \text{o) } \int x \operatorname{arccotg}^2 x dx, \\
\text{p) } \int \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx, & \text{q) } \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx, & \text{r) } \int \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx, \\
\text{s) } \int \arcsin \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} dx, & \text{t) } \int \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx, & \text{u) } \int \arccos \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx, \\
\text{v) } \int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx, & \text{w) } \int \arccos \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} dx, & \text{x) } \int \arccos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.
\end{array}$$

1.1.7. Vypočítajte:

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } \int \sin^3 2x dx, & \text{b) } \int \sin^4 3x dx, & \text{c) } \int \cos^3 3x dx, & \text{d) } \int \cos^4 2x dx, \\
\text{e) } \int \sinh^2 4x dx, & \text{f) } \int \sinh^3 2x dx, & \text{g) } \int \sinh^4 x dx, & \text{h) } \int x \sinh x dx, \\
\text{i) } \int x^2 \sinh x dx, & \text{j) } \int x^3 \sinh x dx, & \text{k) } \int \cosh^2 3x dx, & \text{l) } \int \cosh^3 x dx, \\
\text{m) } \int \cosh^4 2x dx, & \text{n) } \int x \cosh x dx, & \text{o) } \int x^2 \cosh x dx, & \text{p) } \int x^3 \cosh x dx.
\end{array}$$

1.1.8. Vypočítajte:

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } \int \frac{dx}{\sin 2x+1}, & \text{b) } \int \frac{dx}{2 \sin 3x-5}, & \text{c) } \int \frac{dx}{2 \sin 2x+1}, & \text{d) } \int \frac{dx}{4 \sin x-3}, \\
\text{e) } \int \frac{dx}{\cos 2x-1}, & \text{f) } \int \frac{dx}{4 \cos 2x+5}, & \text{g) } \int \frac{dx}{2 \cos x+1}, & \text{h) } \int \frac{dx}{\cos 3x+2}, \\
\text{i) } \int \frac{\sin 2x}{1-2 \cos 2x} dx, & \text{j) } \int \frac{\cos x}{4-3 \sin x} dx, & \text{k) } \int \frac{\cos 3x}{2-\sin 3x} dx, & \text{l) } \int \frac{\sin 2x dx}{4-3 \cos 2x}, \\
\text{m) } \int \frac{\arcsin x dx}{x^2}, & \text{n) } \int \frac{\arccos x dx}{x^2}, & \text{o) } \int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{p) } \int \frac{\arcsin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}},
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{q)} \int \frac{x \arccos x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{r)} \int \frac{\arccos \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}}, & \text{s)} \int \frac{x \operatorname{arctg} x \, dx}{(x^2+1)^2}, & \text{t)} \int \frac{x \operatorname{arctg} x \, dx}{(x^2-1)^2}, \\ \text{u)} \int \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{x^2}, & \text{v)} \int \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{1+x^2}, & \text{w)} \int \frac{\operatorname{arccotg} x \, dx}{1+x^2}, & \text{x)} \int \frac{\operatorname{arccotg} x \, dx}{x^2}. \end{array}$$

1.1.9. Vypočítajte:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \int \frac{\ln^4 x \, dx}{x}, & \text{b)} \int \frac{\ln x^4 \, dx}{x}, & \text{c)} \int \frac{e^{\sqrt{x}} \, dx}{\sqrt{x}}, & \text{d)} \int \frac{e^x \, dx}{1+e^x}, & \text{e)} \int \frac{x^7 \, dx}{e^{x^2}}, & \text{f)} \int \frac{x^3 \, dx}{e^{x^2}}, \\ \text{m)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x+4}}, & \text{n)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}, & \text{o)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x+2}}, & \text{g)} \int \frac{dx}{2x+4}, & \text{h)} \int \frac{dx}{2x+3}, & \text{i)} \int \frac{dx}{2x+2}, \\ \text{p)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}, & \text{q)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-4}}, & \text{r)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}, & \text{j)} \int \frac{dx}{2x-1}, & \text{k)} \int \frac{dx}{2x-4}, & \text{l)} \int \frac{dx}{2x-3}. \end{array}$$

1.1.10. Vypočítajte:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}, & \text{b)} \int \frac{dx}{\arccos x \sqrt{1-x^2}}, & \text{c)} \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}}, & \text{d)} \int \frac{\operatorname{arccotg} \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}}, \\ \text{e)} \int \frac{dx}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}, & \text{f)} \int \frac{dx}{4 \cos^2 x + \sin^2 x}, & \text{g)} \int \frac{\sqrt{-2+3x}}{x-2} \, dx, & \text{h)} \int \frac{\sqrt{-1-3x}}{x+1} \, dx, \\ \text{i)} \int \frac{\ln \operatorname{arctg} x \, dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}, & \text{j)} \int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{1+\cos x^4}}, & \text{k)} \int \frac{\sqrt{2+\ln x} \, dx}{x}, & \text{l)} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}, \\ \text{m)} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^3+x^6}}, & \text{n)} \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^3+x^6}}, & \text{o)} \int \frac{1-x}{x-\sqrt{x-x^2}} \, dx, & \text{p)} \int \frac{1-x}{x-\sqrt{x^2-x}} \, dx, \\ \text{q)} \int \frac{\sqrt[3]{3x+4} \, dx}{1+\sqrt[3]{3x+4}}, & \text{r)} \int \frac{2x^2-x+1}{x \sqrt{1+x-x^2}} \, dx, & \text{s)} \int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3} \, dx, & \text{t)} \int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3} \, dx. \end{array}$$

1.1.11. Vypočítajte:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int |x-1|^7 \, dx, & \text{b)} \int |x-1|^8 \, dx, & \text{c)} \int e^{-|x|} \, dx, & \text{d)} \int e^{|x|} \, dx, \\ \text{e)} \int x \ln x \, dx, & \text{f)} \int x^2 \ln x \, dx, & \text{g)} \int x^3 \ln x \, dx, & \text{h)} \int x^4 \ln x \, dx, \\ \text{i)} \int \ln(x+1)^7 \, dx, & \text{j)} \int x^2 \ln^2 x \, dx, & \text{k)} \int x^3 \ln^2 x \, dx, & \text{l)} \int x^4 \ln^2 x \, dx, \\ \text{m)} \int \ln(2x-3)^4 \, dx, & \text{n)} \int \ln(x^2+1) \, dx, & \text{o)} \int x^2 e^{\sqrt{x}} \, dx, & \text{p)} \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx, \\ \text{q)} \int \sqrt[9]{2x-3} \, dx, & \text{r)} \int \sqrt[7]{3-2x} \, dx, & \text{s)} \int \frac{(x^3-1) \, dx}{e^x}, & \text{t)} \int \frac{\arcsin e^x \, dx}{e^x}, \\ \text{u)} \int \frac{e^x(1+\sin x) \, dx}{1+\cos x}, & \text{v)} \int \frac{e^x(1+\cos x) \, dx}{1-\sin x}, & \text{w)} \int \frac{e^x(1-\cos x) \, dx}{1+\sin x}, & \text{x)} \int \frac{\operatorname{arctg} e^x \, dx}{e^x}. \end{array}$$

1.1.12. Vypočítajte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (x^2-1) \sin 2x \, dx, & \text{b)} \int (x^3-1) \sin x \, dx, & \text{c)} \int (x^3-1) \cos x \, dx, \\ \text{d)} \int (x^2-1) \cos 2x \, dx, & \text{e)} \int (x^2+x+1) \sin 3x \, dx, & \text{f)} \int (x^2+x+1) \cos 3x \, dx, \\ \text{g)} \int (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x) \, dx, & \text{h)} \int (x+2)^3 \ln(x+1)^6 \, dx, & \text{i)} \int (x^2-1) e^{2x} \, dx, \\ \text{j)} \int (x-1)^4 \ln(x+1)^5 \, dx, & \text{k)} \int e^x \sqrt{1-2e^x} \, dx, & \text{l)} \int x^2 \ln \sqrt{1-x} \, dx, \\ \text{m)} \int (x+1)^5 \ln(x-2)^4 \, dx, & \text{n)} \int (x^2+x+1) e^{3x} \, dx, & \text{o)} \int e^x \sqrt{1+e^x} \, dx. \end{array}$$

1.2 Riemannov určitý integrál

V tejto časti sa budeme zaoberať určitým integrálom funkcie, ktorý na rozdiel od neurčitého integrálu nie je funkcia, ale konkrétna hodnota (číslo alebo $\pm\infty$).

Určitý integrál môžeme definovať viacerými spôsobmi. My ho budeme definovať pomocou tzv. integrálnych súčtov a nazývať **Riemannov (určitý) integrál**. Niekedy sa definuje pomocou primitívnej funkcie (**Newtonov integrál**) alebo všeobecnejšie pomocou miery (**Lebesguov**, resp. **Lebesgue-Stieltjesov integrál**).

Príklad 1.2.1.

Nech $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je kladná spojitá funkcia, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle a; b \rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Množinu P nazývame **krivočiarly lichobežník** určený funkciou f a intervalom $\langle a; b \rangle$.

Riešenie.

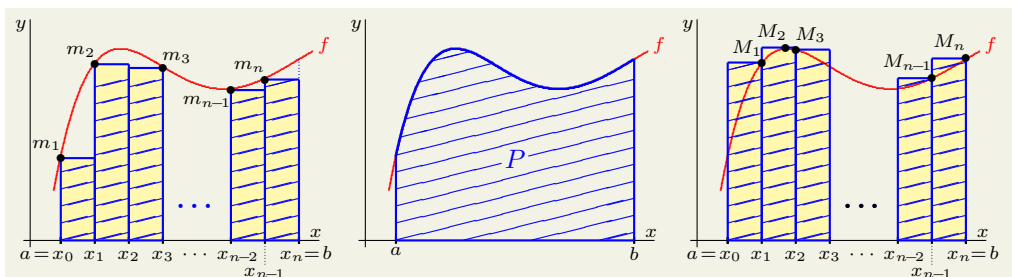
Pokiaľ funkcia f nie je lineárna lomená, čiast kružnice, ap., sú s našimi doterajšími vedomosťami pri určovaní obsahu P problémy. Plochu P pokryjeme neprekrývajúcimi sa obdĺžnikmi a jej obsah odhadneme pomocou súčtu obsahov týchto obdĺžnikov (obr. 1.2.1). Rozdeľme interval $\langle a; b \rangle$ pomocou bodov $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$ na n podintervalov $\langle x_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; x_2 \rangle$, \dots , $\langle x_{n-2}; x_{n-1} \rangle$, $\langle x_{n-1}; x_n \rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$. Pre $i = 1, 2, \dots, n$ označme

$$m_i = \min \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}, \quad M_i = \max \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}.$$

Plochu P môžeme potom odhadnúť zhora a zdola hodnotami:

$$D_P = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x \leq P \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x = H_P.$$

Je zřejmé, že keď zmenšíme Δx , odhady D_P , H_P sa zlepšia (v horšom prípade ostanú rovnaké). Pre $\Delta x \rightarrow 0$ bude platiť $D_P \rightarrow P$, $H_P \rightarrow P$. ■



Obr. 1.2.1: Krivočiarly lichobežník P určený funkciou f na intervale $\langle a; b \rangle$ a jeho aproximácia pomocou dolných (vľavo) a horných (vpravo) integrálnych súčtov

Nech $\langle a; b \rangle$ je nedegenerovaný interval (t. j. $a < b$). **Delením intervalu $\langle a; b \rangle$** nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

takú, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Body x_0, x_1, \dots, x_n sa nazývajú **deliace body** a **jednoznačne určujú** delenie D . Ak chceme zdôrazniť delený interval, potom delenie označujeme $D_{\langle a; b \rangle}$. Dĺžky intervalov $d_i = \langle x_{i-1}; x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ označujeme Δx_i , pričom dĺžku najdlhšieho z nich nazývame **norma delenia D** a značíme $\mu(D)$, t. j. $\mu(D) = \max \{\Delta x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$. Pre súčet dĺžok intervalov d_1, d_2, \dots, d_n platí:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Množinu všetkých delení intervalu $\langle a; b \rangle$ značíme $\mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} = \{D; D \text{ je delenie } \langle a; b \rangle\}$.

Ak platí $D^* \subset D$, potom delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ nazývame **zjemnenie delenia $D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$** . Delenie $D = D^* \cup D^{**}$ nazývame **spoločné zjemnenie delení $D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$** .

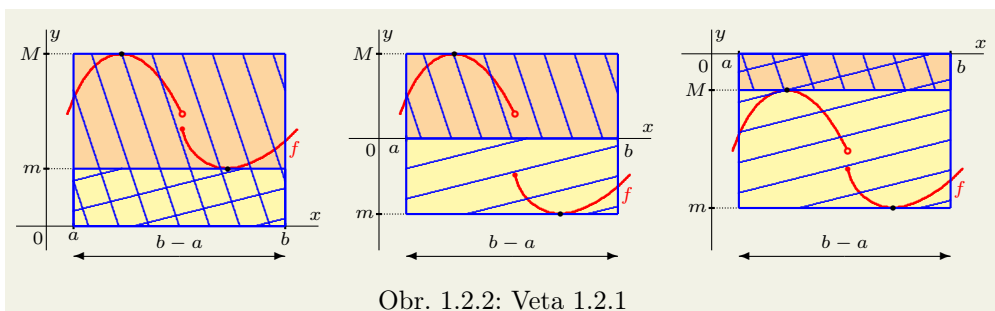
Je zrejmé, že každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení. Ak zvolíme ľubovoľný bod $\bar{x} \in \langle a; b \rangle - D$, potom delenie $D^* = D \cup \{\bar{x}\}$ je zjemnením delenia D .

Nech $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$. Označme:

$$m_i = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}, \quad M_i = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dolným $S_D(f, D)$ a horným Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_H(f, D)$ funkcie f pri delení D nazývame čísla:

$$S_D(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i, \quad S_H(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i.$$



Obr. 1.2.2: Veta 1.2.1

Veta 1.2.1.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená

\implies množiny $\{S_D(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\}$, $\{S_H(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\}$ sú ohraničené.

Dôkaz.

Označme $m = \inf \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$, $M = \sup \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$. Potom pre každé delenie

$D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $m \leq m_i \leq M_i \leq M$, $i=1, 2, \dots, n$. Potom (obr. 1.2.2):

$$\begin{aligned} m(b-a) &= m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \sum_{i=1}^n m \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = S_D(f, D) \leq \\ &\leq S_H(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i = M \sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b-a). \blacksquare \end{aligned}$$

Veta 1.2.2.

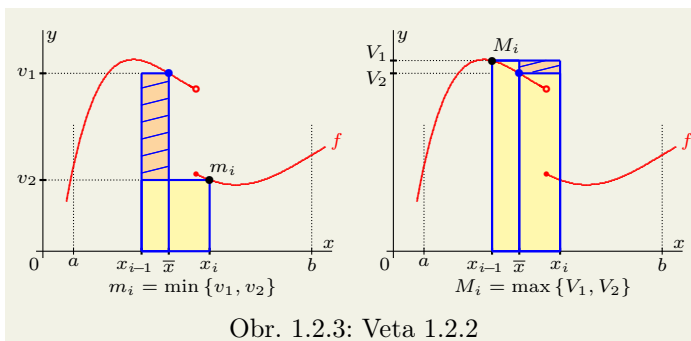
$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $D \subset D^*$ (D^* je zjemnením D)
 $\implies S_D(f, D) \leq S_D(f, D^*) \leq S_H(f, D^*) \leq S_H(f, D)$.

Dôkaz.

Delenie D^* vznikne z D pridaním konečného počtu bodov. To znamená, že vetu stačí dokázať pre prípad $D^* = D \cup \{\bar{x}\}$ a induktívne rozšíriť na počet pridaných bodov.

Nech $\bar{x} \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$, pričom $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Integrálne súčty pre D a D^* sa líšia iba na intervale $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$. Ak označíme $v_1 = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; \bar{x} \rangle\}$, $v_2 = \inf \{f(x); x \in \langle \bar{x}; x_i \rangle\}$, $V_1 = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; \bar{x} \rangle\}$, $V_2 = \sup \{f(x); x \in \langle \bar{x}; x_i \rangle\}$, potom platí (obr. 1.2.3):

$$\begin{aligned} S_H(f, D) - S_H(f, D^*) &= M_i(x_i - x_{i-1}) - [V_1(x_i - \bar{x}) + V_2(\bar{x} - x_{i-1})] = \\ &= \left[\begin{array}{l} M_i = \max \{V_1, V_2\} \\ V_1 \leq M_i, V_2 \leq M_i \end{array} \right] \geq M_i(x_i - x_{i-1}) - [M_i(x_i - \bar{x}) + M_i(\bar{x} - x_{i-1})] = 0, \\ S_D(f, D^*) - S_D(f, D) &= v_1(x_i - \bar{x}) + v_2(\bar{x} - x_{i-1}) - m_i(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \left[\begin{array}{l} m_i = \min \{v_1, v_2\} \\ v_1 \geq m_i, v_2 \geq m_i \end{array} \right] \geq m_i(x_i - \bar{x}) + m_i(\bar{x} - x_{i-1}) - m_i(x_i - x_{i-1}) = 0. \blacksquare \end{aligned}$$



Obr. 1.2.3: Veta 1.2.2

Dôsledok 1.2.2.a.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená, $D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \implies S_D(f, D^*) \leq S_H(f, D^{**})$.

Dôkaz.

$D = D^* \cup D^{**} \xrightarrow{\text{veta 1.2.2}} S_D(f, D^*) \leq S_D(f, D) \leq S_H(f, D) \leq S_H(f, D^{**})$. \blacksquare

Nech $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená. Potom čísla

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{S_D(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\}, \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf \{S_H(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\}$$

nazývame **dolný** a **horný Riemannov (určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$** (resp. **od a po b**). Z vety 1.2.1 vyplýva, že tieto čísla **vždy existujú** a platí:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq M(b-a), \quad (1.2)$$

pričom $m = \inf \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$, $M = \sup \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$.

Ak platí rovnosť medzi dolným a horným Riemannovým integrálom, potom číslo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

nazývame **Riemannov (určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$** . Funkciu f nazývame **riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a; b \rangle$** a označujeme $f \in R_{\langle a; b \rangle}$.

Príklad 1.2.2.

a) $f(x) = c$, $x \in \langle a; b \rangle$, $c \in R$ je konštanta. Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ platí $c = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}$. Potom platí:

$$\left. \begin{aligned} S_D(f, D) &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i \\ S_H(f, D) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^n c \cdot \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b c dx = \overline{\int_a^b c dx} = \int_a^b c dx = c(b-a).$$

b) $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0; 1 \rangle, & x \in Q, \\ 0, & x \in \langle 0; 1 \rangle, & x \notin Q. \end{cases}$ Pre každé $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0; 1 \rangle}$, $n \in N$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí:

$$1 = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} \Rightarrow S_H(f, D) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

$$0 = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} \Rightarrow S_D(f, D) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 = 0.$$

Z toho vyplýva $\int_0^1 \chi(x) dx = 0$, $\overline{\int_0^1 \chi(x) dx} = 1$, $\int_0^1 \chi(x) dx$ neexistuje. ■

Veta 1.2.3 (Nutná a postačujúca podmienka existencie integrálu).

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená \implies

$$f(x) \in R_{\langle a; b \rangle} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \text{ tak, že } S_H(f, D) - S_D(f, D) < \varepsilon.$$

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: f(x) \in R_{\langle a; b \rangle}, \text{ označme } \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}, I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

¹⁶Dirichletova funkcia (mal: str. 72).

$$I = \sup \{S_D(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\} \Rightarrow \forall \varepsilon_0 > 0 \exists D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}: I - S_D(f, D^*) < \varepsilon_0.$$

$$I = \inf \{S_H(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\} \Rightarrow \forall \varepsilon_0 > 0 \exists D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}: S_H(f, D^{**}) - I < \varepsilon_0.$$

Ak položíme $D = D^* \cup D^{**}$, potom na základe predchádzajúceho a vety 1.2.2 platí:

$$S_D(f, D^*) \leq S_D(f, D) \Rightarrow I - S_D(f, D) \leq I - S_D(f, D^*) < \varepsilon_0,$$

$$S_H(f, D) \leq S_H(f, D^{**}) \Rightarrow S_H(f, D) - I \leq S_H(f, D^{**}) - I < \varepsilon_0.$$

Z toho vyplýva $S_H(f, D) - S_D(f, D) = S_H(f, D) - I + I - S_D(f, D) < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon$.

PP \Leftarrow : $\forall \varepsilon > 0 \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}: S_H(f, D) - S_D(f, D) < \varepsilon$. Pre dolné a horné integrály platí:

$$\begin{aligned} S_D(f, D) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_H(f, D) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq S_H(f, D) - S_D(f, D) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva $0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq \inf \{\varepsilon; \varepsilon > 0\} = 0$.

To znamená, že platí $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ a teda $f(x) \in R_{\langle a; b \rangle}$. ■

Poznámka 1.2.1.

Podmienku: $\forall \varepsilon > 0 \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}: S_H(f, D) - S_D(f, D) < \varepsilon$, môžeme písať v tvare:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}: \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i < \varepsilon.$$

Dôsledok 1.2.3.a.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená \implies

$$I = \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \text{ tak, že } S_H(f, D) - I < \varepsilon, I - S_D(f, D) < \varepsilon.$$

Veta 1.2.4.

$f \in R_{\langle a; b \rangle}$, $\langle c; d \rangle \subset \langle a; b \rangle \implies f \in R_{\langle c; d \rangle}$.

Dôkaz.

$f \in R_{\langle a; b \rangle} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}: S_H(f, D^*) - S_D(f, D^*) < \varepsilon$.

Označme $D_{\langle a; b \rangle} = D^* \cup \{c, d\} = \{x_i\}_{i=0}^n$, pričom $c = x_r$, $d = x_s$, $r, s \in \{0, 1, \dots, n\}$, $r < s$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon > S_H(f, D^*) - S_D(f, D^*) &\geq S_H(f, D_{\langle a; b \rangle}) - S_D(f, D_{\langle a; b \rangle}) = \sum_{i=0}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=0}^r (M_i - m_i) \Delta x_i + \sum_{i=r}^s (M_i - m_i) \Delta x_i + \sum_{i=s}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \geq \sum_{i=r}^s (M_i - m_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Posledný súčet zodpovedá deleniu $D_{\langle c; d \rangle} = \{x_i\}_{i=r}^s \in \mathfrak{D}_{\langle c; d \rangle}$. Tým je veta dokázaná. ■

Z vety 1.2.3 vyplýva, že pri vyšetovaní riemannovskej integrovateľnosti funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$ sa nemusíme zaoberať všetkými deleniami $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$. Stačí sa obmedziť na „niektoré špeciálne“ množiny delení, napr. na normálne postupnosti delení. **Postupnosť delení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ sa nazýva **normálna** práve vtedy, ak platí $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(D_k) = 0$.

Normálna postupnosť delení intervalu $\langle a; b \rangle$ je napríklad postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $D_k = \{x_i = a + \frac{i(b-a)}{k}; i=0, 1, 2, \dots, k\}$, t. j. $\mu(D_k) = \frac{b-a}{k}$ pre $k \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1.2.2.

V normálnej postupnosti $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ jednotlivé delenia D_k , $k \in \mathbb{N}$ nemusia mať k deliacich intervalov (príklad 1.2.4). Taktiež deliace body nemusia byť rovnako vzdialené (príklad 1.2.3). Jediná podmienka je, aby pre $k \rightarrow \infty$ platilo $\mu(D_k) \rightarrow 0$.

Veta 1.2.5.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená $\implies \forall$ normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k), \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_H(f, D_k).$$

Dôkaz.

Dokážeme $I_D = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k)$. Druhá časť sa dokáže analogicky.

Nech $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ je normálna. Musíme dokázať (ma1: veta 2.3.2):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0: I_D - S_D(f, D_k) < \varepsilon.$$

f je ohraničená, t. j. pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ platí $m \leq f(x) \leq M$, kde $m, M \in \mathbb{R}$, $m \neq M$.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, t. j. aj $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ je ľubovoľné.

Zo vzťahu $I_D = \sup \{S_D(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\}$ vyplýva:

$$\exists D^* = \{x_i^*\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}, n \in \mathbb{N}: I_D - S_D(f, D^*) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ t. j. } S_D(f, D^*) > I_D - \frac{\varepsilon}{2}.$$

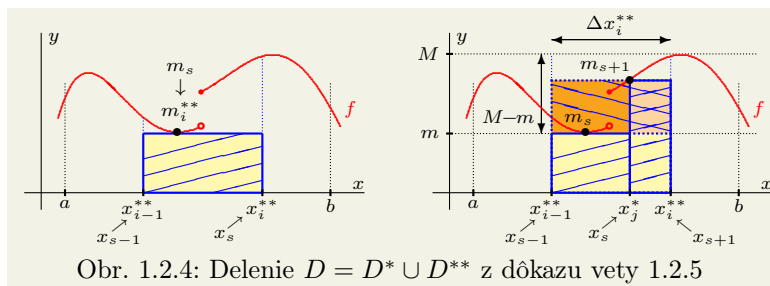
Označme $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n(M-m)}$, t. j. $(M-m)\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n}$. To znamená, že aj ε_0 je ľubovoľné.

Nech delenie $D^{**} = \{x_i^{**}\}_{i=0}^p \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $p \in \mathbb{N}$ je také, že $\mu(D^{**}) < \varepsilon_0$. Ukážeme, že platí:

$$I_D - S_D(f, D^{**}) < \varepsilon.$$

Nech $D = \{x_s\}_{s=0}^l = D^* \cup D^{**}$, $l \leq p+n$ je zjemnenie delení D^* , D^{**} . Delenie D obsahuje body a , x_1^* , x_2^* , \dots , x_{p-1}^* , b a body x_1^{**} , x_2^{**} , \dots , x_{n-1}^{**} .

Odhadneme rozdiel $S_D(f, D) - S_D(f, D^{**})$. Pre každý interval $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**} \rangle$, $i=1, 2, \dots, p$ vo vzťahu k bodom x_j^* , $j=1, 2, \dots, n-1$ môžu nastať dve možnosti (obr. 1.2.4):



Obr. 1.2.4: Delenie $D = D^* \cup D^{**}$ z dôkazu vety 1.2.5

1. Neexistuje $x_j^* \in (x_{i-1}^{**}; x_i^{**})$. To znamená, že $S_D(f, D)$, $S_D(f, D^{**})$ sú na $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**} \rangle$ rovnaké a ich rozdiel $S_D(f, D) - S_D(f, D^{**})$ sa na každom z takýchto intervalov rovná 0.

2. Existuje aspoň jedno $x_j^* \in (x_{i-1}^{**}; x_i^{**})$. Rozdiel $S_D(f, D) - S_D(f, D^{**})$ je na intervale $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**} \rangle$ menší alebo rovný ako $(M-m)\Delta x_i^{**} < (M-m)\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n}$. Takýchto intervalov je najviac $n-1$, t. j. menej ako n .

$$\stackrel{1., 2.}{\implies} S_D(f, D) - S_D(f, D^{**}) < 0 + n \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} \implies S_D(f, D^{**}) > S_D(f, D) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zo vzťahov $S_D(f, D) \geq S_D(f, D^*)$, $S_D(f, D^*) > I_D - \frac{\varepsilon}{2}$ (D je zjemnenie D^*) vyplýva:

$$S_D(f, D^{**}) > S_D(f, D) - \frac{\varepsilon}{2} > I_D - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = I_D - \varepsilon, \quad \text{t. j. } I_D - S_D(f, D^{**}) < \varepsilon.$$

Ukázali sme, že ak pre delenie D platí $\mu(D) < \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n(M-m)}$, potom $I_D - S_D(f, D^{**}) < \varepsilon$.

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ je normálna, t. j. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(D_k) = 0$, resp. (ma1: veta 2.3.2):

$$\forall \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n(M-m)} > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0: \mu(D_k) < \varepsilon_0 \implies I_D - S_D(f, D_k) < \varepsilon. \blacksquare$$

Veta 1.2.6.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená \implies

$$f(x) \in R_{\langle a; b \rangle} \Leftrightarrow \forall \text{ normálnu } \{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \text{ platí } \lim_{k \rightarrow \infty} [S_H(f, D_k) - S_D(f, D_k)] = 0.$$

Dôkaz.

Veta je priamym dôsledkom viet 1.2.3 a 1.2.5. \blacksquare

Dôsledok 1.2.6.a.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená \implies

$$I = \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \forall \text{ normálnu } \{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}: \lim_{k \rightarrow \infty} S_H(f, D_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k) = I.$$

Nech $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$ a nech $t_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$. **Riemannovým (integrálnym) súčtom** funkcie f pri delení D a voľbe bodov $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \{t_i; t_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}_{i=1}^n$ nazývame číslo:

$$S_T(f, D) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i.$$

Funkcia f má pri danom delení D nekonečne veľa integrálnych súčtov (dolných a aj horných). Ak označíme $m = \inf \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$, $M = \sup \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$, potom pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí:

$$m(b-a) \leq S_D(f, D) \leq S_T(f, D) \leq S_H(f, D) \leq M(b-a),$$

Ak je $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ spojitá, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, potom funkcia f nadobúda svoje extrémny (ma1: veta 3.3.10) na každom intervale $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$. To znamená, že $S_D(f, D)$ a $S_H(f, D)$ sú Riemannovými integrálnymi súčtami pre nejaké konkrétne voľby bodov T .

Dôsledok 1.2.6.b.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená \implies

$$I = \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \forall \text{ normálnu } \{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \text{ a } \forall \text{ voľbu } T: \lim_{k \rightarrow \infty} S_T(f, D_k) = I.$$

Veta 1.2.7.

$f(x), x \in \langle a; b \rangle$ je monotónna $\implies f \in R_{\langle a; b \rangle}$.

Dôkaz.

Je zrejmé, že $f(x), x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená. Použijeme vetu 1.2.3.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ zvolíme tak, aby platilo:

$$\frac{|f(b)-f(a)|(b-a)}{n} < \varepsilon, \text{ t. j. aby } \frac{|f(b)-f(a)|(b-a)}{\varepsilon} < n \text{ a aby } \Delta x_i = \frac{b-a}{n}, i=1, 2, \dots, n.$$

$f(x)$ je monotónna (nemusí byť spojitá) na každom intervale $\langle x_{i-1}; x_i \rangle, i=1, 2, \dots, n$, pričom extrémny nadobúda v bodoch¹⁷ x_{i-1} a x_i . Potom platí:

$$\begin{aligned} S_H(f, D) - S_D(f, D) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{(M_i - m_i)(b-a)}{n} = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) = \frac{(b-a)}{n} \left| \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) - f(x_i)) \right| = \frac{(b-a)}{n} |f(a) - f(b)| < \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

Predtým ako dokážeme integrovateľnosť spojitých funkcií, sformulujeme a dokážeme jednu ich dôležitú vlastnosť na uzavretých množinách. Ak $A \subset \mathbb{R}$ je uzavretá množina, potom funkcia f sa nazýva **rovnomerne spojitá na množine A** , ak platí:¹⁸

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x^* \in A: |x - x^*| < \delta \implies |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Z definície je zrejmé, že ak je f rovnomerne spojitá na množine A , potom je tiež spojitá na A . Pre f spojitú na A totiž platí (ma1: veta 3.3.2):

$$\forall x^* \in A \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A: |x - x^*| < \delta \implies |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon.$$

Lema 1.2.8 (Cantorova veta o rovnomernej spojitosti).

$f(x), x \in \langle a; b \rangle$ je spojitá $\implies f$ je rovnomerne spojitá na $\langle a; b \rangle$.

Dôkaz.

Sporom. f je spojitá, ale nie rovnomerne na $\langle a; b \rangle$. Potom platí negácia vzťahu (1.3):

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta = \frac{1}{k} > 0 \exists x_k, x_k^* \in \langle a; b \rangle: |x_k - x_k^*| < \frac{1}{k} \wedge |f(x_k) - f(x_k^*)| \geq \varepsilon > 0, \quad (1.4)$$

pričom sme vybrali iba $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ (negácia zaručuje platnosť pre všetky $\delta > 0$).

f je na $\langle a; b \rangle$ ohraničená (ma1: veta 3.3.10). $\implies \{x_k\}_{k=1}^\infty, \{x_k^*\}_{k=1}^\infty$ sú ohraničené a dajú sa z nich vybrať (ma1: veta 2.3.9) konvergentné podpostupnosti $\{x_{m_k}\}_{k=1}^\infty, \{x_{m_k}^*\}_{k=1}^\infty$.

$$\stackrel{(1.4)}{\implies} 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{m_k} - x_{m_k}^*| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m_k} = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k}^* = \bar{x} \in \langle a; b \rangle.$$

f je spojitá v bode $\bar{x} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{m_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{m_k}^*) = f(\bar{x}) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{m_k}) - f(x_{m_k}^*)| = 0$.

Ale zo vzťahu (1.4) vyplýva spor $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{m_k}) - f(x_{m_k}^*)| \geq \varepsilon > 0$. \blacksquare

¹⁷ $M_i = f(x_{i-1}) = \max \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}, m_i = f(x_i) = \min \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}$ pre f nerastúcu a $m_i = f(x_{i-1}) = \min \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}, M_i = f(x_i) = \max \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}$ pre f neklesajúcu.

¹⁸To znamená, že δ nezávisí od voľby bodov x, x^* , ale iba od ε .

Veta 1.2.9.

$f(x), x \in \langle a; b \rangle$ je spojitá $\implies f(x) \in R_{\langle a; b \rangle}$.

Dôkaz.

$f(x), x \in \langle a; b \rangle$ je spojitá $\xrightarrow{\text{mal: veta 3.3.10}}$ f je na $\langle a; b \rangle$ ohraničená. Použijeme vetu 1.2.3.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Označme $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$, t. j. $\varepsilon = \varepsilon_0(b-a)$.

f je na $\langle a; b \rangle$ rovnomerne spojitá (Cantorova veta 1.2.8), t. j. existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x, x^* \in \langle a; b \rangle$ platí: $|x - x^*| < \delta \implies |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon_0$.

Delenie $D \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}$ zvolíme tak, aby $\mu(D) < \delta$, t. j. $\Delta x_i < \delta, i = 1, 2, \dots, n$.

f je na $\langle x_{i-1}; x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n$ ohraničená a nadobúda svoje extrémny (mal: veta 3.3.10), t. j. existujú $x_i^*, x_i^{**} \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle, |x_i^* - x_i^{**}| < \delta$ také, že $f(x_i^*) = m_i, f(x_i^{**}) = M_i$. Potom (rovnomerná spojitosť): $M_i - m_i = f(x_i^{**}) - f(x_i^*) < \varepsilon_0$. Z toho vyplýva:

$$S_H(f, D) - S_D(f, D) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \varepsilon_0 \Delta x_i = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon_0(b-a) = \varepsilon. \blacksquare$$

Vetu 1.2.9 môžeme zovšeobecniť na po častiach spojitú funkciu, t. j. na funkcie s konečným počtom bodov nespojitosti (odstrániteľných alebo neodstrániteľných 1. druhu). Vetu uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.2.10.

$f(x), x \in \langle a; b \rangle$ je po častiach spojitá $\implies f(x) \in R_{\langle a; b \rangle}$.

Príklad 1.2.3.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b < c < d, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle c; d \rangle, \\ 0, & x \in \langle a; c \rangle \cup \langle d; b \rangle, \end{cases} \int_a^b f(x) dx = d - c.$

Riešenie.

Nech¹⁹ $D_k = \{x_0, x_1, \dots, x_5\} = \{a, c - \frac{1}{k}, c + \frac{1}{k}, d - \frac{1}{k}, d + \frac{1}{k}, b\}, k \in \mathbb{N}$ (obr. 1.2.5).

$$\implies \Delta x_1 = c - a - \frac{1}{k}, \quad \Delta x_2 = \frac{2}{k}, \quad \Delta x_3 = d - c - \frac{2}{k}, \quad \Delta x_4 = \frac{2}{k}, \quad \Delta x_5 = b - d - \frac{1}{k},$$

$$m_1 = M_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad M_2 = 1, \quad m_3 = M_3 = 1, \quad m_4 = 0, \quad M_4 = 1, \quad m_5 = M_5 = 0.$$

Nech $\varepsilon > 0$. Zvolíme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $k > \frac{4}{\varepsilon}$, t. j. $\frac{4}{k} < \varepsilon$. Potom platí:

$$S_H(f, D_k) = 0 \cdot (c - a - \frac{1}{k}) + 1 \cdot \frac{2}{k} + 1 \cdot (d - c - \frac{2}{k}) + 1 \cdot \frac{2}{k} + 0 \cdot (b - d - \frac{1}{k}) = d - c + \frac{2}{k},$$

$$S_D(f, D_k) = 0 \cdot (c - a - \frac{1}{k}) + 0 \cdot \frac{2}{k} + 1 \cdot (d - c - \frac{2}{k}) + 0 \cdot \frac{2}{k} + 0 \cdot (b - d - \frac{1}{k}) = d - c - \frac{2}{k},$$

$$S_H(f, D_k) - S_D(f, D_k) = (d - c + \frac{2}{k}) - (d - c - \frac{2}{k}) = \frac{4}{k} < \varepsilon \xrightarrow{\text{veta 1.2.3}} f \in R_{\langle a; b \rangle}.^{20}$$

$$\implies \int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \inf \{S_H(f, D_k); k \in \mathbb{N}\} = \inf \{d - c + \frac{2}{k}; k \in \mathbb{N}\} = d - c, \\ \sup \{S_D(f, D_k); k \in \mathbb{N}\} = \sup \{d - c - \frac{2}{k}; k \in \mathbb{N}\} = d - c. \blacksquare \end{cases}$$

Príklad 1.2.4.

Vypočítajte:

a) $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{2},$

b) $\int_{-1}^1 x^2 dx.$

Riešenie.

a) Funkcia $f(x) = \frac{x}{2}, x \in \langle -1; 0 \rangle$ je rastúca (veta 1.2.7), spojitá (veta 1.2.9) $\implies \frac{x}{2} \in R_{\langle -1; 0 \rangle}$.

¹⁹Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}$ nie je normálna!

²⁰Funkcia f je po častiach spojitá, t. j. (veta 1.2.10) $f \in R_{\langle a; b \rangle}$.

Nech $D_k = \left\{ -\frac{i}{k}; i=0, 1, 2, \dots, k \right\} \subset \mathfrak{D}_{\langle -1; 0 \rangle}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \Delta x_i = \frac{1}{k}, m_i = f(x_i) = -\frac{i}{2k}, M_i = f(x_{i-1}) = -\frac{i-1}{2k}, i = 1, 2, \dots, k \text{ (obr. 1.2.6).}^{21}$$

$$S_H(f, D_k) = \sum_{i=1}^k \left(-\frac{i-1}{2k} \cdot \frac{1}{k} \right) = -\frac{0+1+\dots+k}{2k^2} = -\frac{(k-1)k}{2 \cdot 2k^2} = -\frac{k-1}{4k},$$

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^k \left(-\frac{i}{2k} \cdot \frac{1}{k} \right) = -\frac{1+2+\dots+(k-1)}{2k^2} = -\frac{k(k+1)}{2 \cdot 2k^2} = -\frac{k+1}{4k}.$$

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ je normálna. $\Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{x \, dx}{2} = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} S_H(f, D_k) = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{4k} = -\frac{1}{4}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k) = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{4k} = -\frac{1}{4}. \end{cases}$

b) Funkcia $f(x) = x^2$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$ je spojitá (veta 1.2.9) $\Rightarrow x^2 \in R_{\langle -1; 1 \rangle}$.

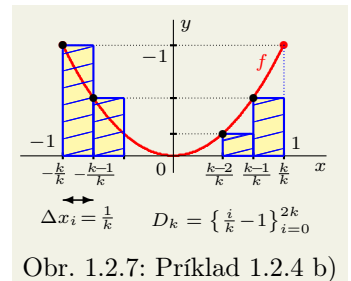
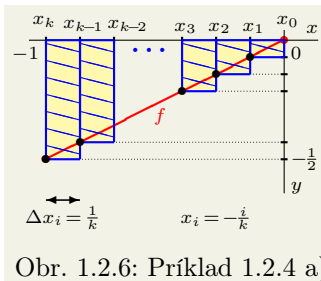
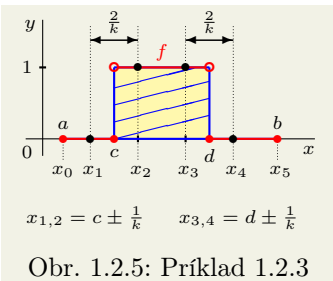
Nech $D_k = \left\{ -\frac{k}{k}, -\frac{k-1}{k}, \dots, -\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, \frac{k}{k} \right\} = \left\{ \frac{i}{k} - 1 \right\}_{i=0}^{2k} \subset \mathfrak{D}_{\langle -1; 1 \rangle}$, $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \Delta x_i = \frac{1}{k}$ (obr. 1.2.7). Zvoľme $T = \left\{ -\frac{k}{k}, -\frac{k-1}{k}, \dots, -\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k} \right\}$, t. j. ľavé hraničné body deliacich intervalov. Potom platí:

$$S_T(f, D_k) = \left[\left(-\frac{k}{k}\right)^2 + \left(-\frac{k-1}{k}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{k}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \right] \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{2[1^2 + 2^2 + \dots + k^2] - k^2}{k^3} = \frac{\frac{2}{6}k(k+1)(2k+1) - k^2}{k^3} = \frac{\frac{1}{3}(k+1)(2k+1) - k}{k^2} = \frac{(k+1)(2k+1) - 3k}{3k^2} = \frac{2k^2 + 1}{3k^2}.$$

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ je normálna. $\Rightarrow \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^2 + 1}{3k^2} = \frac{2}{3}$. ■



Geometricky predstavuje Riemannov určitý integrál na intervale $\langle a; b \rangle$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a; b \rangle$. Pod osou x (t. j. ak je f záporná) je táto plocha záporná (obr. 1.2.6).

1.2.1 Základné vlastnosti Riemannovho integrálu

Hodnota Riemannovho integrálu je závislá od integrovanej funkcie, ale aj od intervalu integrovania $\langle a; b \rangle$. Najprv uvedieme vlastnosti, ktoré závisia od integrovanej funkcie.

Lema 1.2.11.

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, c > 0 \implies$$

²¹Kvôli prehľadnosti budeme deliace body a intervaly indexovať sprava doľava, t. j. pre $i = 1, 2, \dots, k$ budeme značiť $d_i = \langle x_i; x_{i-1} \rangle = \langle -\frac{i}{k}; -\frac{i-1}{k} \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \inf_{x \in A} f(x) &= - \sup_{x \in A} [-f(x)], & \text{b) } \sup_{x \in A} (cf)(x) &= c \sup_{x \in A} f(x), & \text{c) } \inf_{x \in A} (cf)(x) &= c \inf_{x \in A} f(x). \\ \text{d) } \sup_{x \in A} (f+g)(x) &\leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x), & \text{e) } \inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x) &\leq \inf_{x \in A} (f+g)(x), \end{aligned}$$

Dôkaz.

a), b), c) vyplývajú priamo z definície, e) sa dokáže analogicky ako d).

$$\text{d) } x \in A \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup_{x \in A} g(x) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x).$$

To znamená, že $\sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)$ je horné ohraničenie množiny $\{(f+g)(x); x \in A\}$.

$$\Rightarrow \sup \{(f+g)(x); x \in A\} = \sup_{x \in A} (f+g)(x) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x). \blacksquare$$

Poznámka 1.2.3.

Pre naše účely nám postačia ohraničené funkcie definované na ohraničených množinách. Množina A v leme 1.2.11 nemusí byť ohraničená a f, g nemusia byť ohraničené na A . Je zrejmé, že musí platiť $\inf_{x \in A} f(x) < \infty, -\infty < \sup_{x \in A} f(x)$ a $\inf_{x \in A} g(x) < \infty, -\infty < \sup_{x \in A} g(x)$.

V častiach d), e) platia vo všeobecnosti nerovnosti, napr. pre funkcie $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}, g(x) = -\sin x, x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ platí:

$$-2 = -1 - 1 = \inf f + \inf g < \inf (f+g) = 0, \quad 0 = \sup (f+g) < \sup f + \sup g = 1 + 1 = 2.$$

Veta 1.2.12.

$$f(x), x \in \langle a; b \rangle \text{ je ohraničená} \implies \int_a^b f(x) dx = - \int_a^{\overline{b}} (-f(x)) dx.$$

Dôkaz.

Nech $D \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}, n \in \mathbb{N}$. Označme $\overline{M}_i = \sup \{-f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}, i = 1, 2, \dots, n$. Platí:

$$m_i = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = - \sup \{-f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = -\overline{M}_i,$$

$$S_D(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (-\overline{M}_i) \cdot \Delta x_i = - \sum_{i=1}^n \overline{M}_i \cdot \Delta x_i = -S_H(-f, D).$$

$$\begin{aligned} \implies \int_a^b f(x) dx &= \sup \{S_D(f, D); D \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}\} = \sup \{-S_H(-f, D); D \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}\} = \\ &= - \inf \{S_H(-f, D); D \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}\} = - \int_a^{\overline{b}} (-f(x)) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Veta 1.2.13.

$f(x), g(x), x \in \langle a; b \rangle$ sú ohraničené, $c \geq 0 \implies$

$$\text{a) } \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad \text{b) } \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b [f(x) + g(x)] dx,$$

$$\text{c) } \int_a^{\overline{b}} cf(x) dx = c \int_a^{\overline{b}} f(x) dx, \quad \text{d) } \int_a^{\overline{b}} [f(x) + g(x)] dx \leq \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \int_a^{\overline{b}} g(x) dx.$$

Dôkaz.

$$\text{a) } c = 0: \quad \int_a^b 0 \cdot f(x) dx = \int_a^b 0 dx \stackrel{\text{pr. 1.2.2}}{=} 0(b-a) = 0 = 0 \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

$c > 0$: Nech $D \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}, n \in \mathbb{N}$. Pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí:

$$\overline{m}_i = \inf \{cf(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = c \cdot \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = c \cdot m_i,$$

$$S_D(cf, D) = \sum_{i=1}^n \overline{m}_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (cm_i) \cdot \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i = c \cdot S_D(f, D).$$

$$\begin{aligned} \implies \int_a^b cf(x) dx &= \sup \{S_D(cf, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\} = \\ &= \sup \{c S_D(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\} = c \sup \{S_D(f, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}\} = c \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

b) Nech $D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí:

$$\begin{aligned} \bar{m}_i &= \inf \{f(x) + g(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} \geq \\ &\geq \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} + \inf \{g(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = m_i + w_i, \\ S_D(f+g, D) &= \sum_{i=1}^n \bar{m}_i \cdot \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^n (m_i + w_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n w_i \cdot \Delta x_i = S_D(f, D) + S_D(g, D). \end{aligned}$$

Nech $\{D_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$ je normálna.

$$\begin{aligned} \implies \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f+g, D_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} [S_D(f, D_k) + S_D(g, D_k)] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(g, D_k) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

c), d) Dôkaz je analogický ako v častiach a), b). ■

Veta 1.2.14.

$f, g \in R_{\langle a; b \rangle}$, $c \in \mathbb{R} \implies cf, f+g \in R_{\langle a; b \rangle}$ a platí:

$$\text{a) } \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad \text{b) } \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Dôkaz.

Na základe viet 1.2.12 a 1.2.13 ukážeme, že sa dolné a horné integrály všetkých zúčastnených funkcií rovnajú.

$$\begin{aligned} \text{a) } c \geq 0: \quad \int_a^b cf(x) dx &= c \int_a^b f(x) dx = c \int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \int_a^{\overline{b}} cf(x) dx. \\ c \leq 0, -c \geq 0: \quad \int_a^b cf(x) dx &= - \int_a^{\overline{b}} [-cf(x)] dx = -(-c) \int_a^{\overline{b}} f(x) dx = c \int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \\ &= c \int_a^b f(x) dx = -(-c) \int_a^b f(x) dx = - \int_a^{\overline{b}} [-cf(x)] dx = \int_a^{\overline{b}} cf(x) dx. \\ \text{b) } \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx &= \int_a^{\overline{b}} f(x) dx + \int_a^{\overline{b}} g(x) dx \geq \int_a^{\overline{b}} [f(x) + g(x)] dx \geq \\ &\geq \int_a^b [f(x) + g(x)] dx \geq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Veta 1.2.15.

$f \in R_{\langle a; b \rangle}$, $m = \inf \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$, $M = \sup \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$,
 $\varphi: \langle m; M \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá $\implies \varphi(f) \in R_{\langle a; b \rangle}$.

Dôkaz.

$\varphi(t)$, $t \in \langle m; M \rangle$ je spojitá, t. j. (ma1: veta 3.3.10) je ohraničená a nadobúda svoje extrémny. Označme $m^* = \min \{\varphi(t); t \in \langle m; M \rangle\}$, $M^* = \max \{\varphi(t); t \in \langle m; M \rangle\}$.

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Označme $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a+M^*-m^*}$, t. j. $\varepsilon = \varepsilon_0(b-a+M^*-m^*)$.
 $f \in R_{\langle a; b \rangle}$, t. j. ku číslu δ^2 existuje delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$ také, že platí:

$$\exists \delta > 0 \forall t_1, t_2 \in \langle m; M \rangle : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon_0. \quad (1.5)$$

Je zrejmé, že $\delta > 0$ môžeme voliť tak, aby platilo²² $\delta < \varepsilon_0$.

$f \in R_{\langle a; b \rangle}$, t. j. ku číslu δ^2 existuje delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$ také, že platí:

$$S_H(f, D) - S_D(f, D) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \delta^2,$$

pričom $m = \min \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}$, $M = \max \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ukážeme, že $S_H(\varphi(f), D) - S_D(\varphi(f), D) = \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i < \varepsilon$ a veta bude dokázaná.

Rozdelíme $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ a ich indexy $i = 1, 2, \dots, n$ na dve disjunktné množiny I_1, I_2 :²³

1. $i \in I_1$, ak platí $M_i - m_i < \delta$. Pre všetky $x, \bar{x} \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$ na základe (1.5) platí:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\bar{x})| &\leq M_i - m_i < \delta \Rightarrow |\varphi(f(x)) - \varphi(f(\bar{x}))| < \varepsilon_0 \Rightarrow M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon_0 \\ &\Rightarrow \sum_{i \in I_1} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_0 \Delta x_i = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon_0(b-a). \end{aligned}$$

2. $i \in I_2$, ak platí $M_i - m_i \geq \delta$. Potom platí:

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i \in I_2} \Delta x_i &= \sum_{i \in I_2} \delta \Delta x_i \leq \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \delta^2 \Rightarrow \sum_{i \in I_2} \Delta x_i < \delta < \varepsilon_0 \\ &\Rightarrow \sum_{i \in I_2} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i \leq \sum_{i \in I_2} (M^* - m^*) \Delta x_i = (M^* - m^*) \sum_{i \in I_2} \Delta x_i < \varepsilon_0 (M^* - m^*). \end{aligned}$$

$$\stackrel{1., 2.}{\implies} S_H(\varphi(f), D) - S_D(\varphi(f), D) = \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i \in I_1} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i + \sum_{i \in I_2} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i < \varepsilon_0(b-a) + \varepsilon_0(M^* - m^*) = \varepsilon. \blacksquare$$

Veta 1.2.16.

$f, g \in R_{\langle a; b \rangle} \implies |f|, f^2, fg \in R_{\langle a; b \rangle}$.

Dôkaz.

$f \in R_{\langle a; b \rangle}$, $\varphi(t) = |t|$, $t \in R$ je spojitá $\stackrel{\text{veta 1.2.15}}{\implies} |f| \in R_{\langle a; b \rangle}$.

$f \in R_{\langle a; b \rangle}$, $\varphi(t) = t^2$, $t \in R$ je spojitá $\stackrel{\text{veta 1.2.15}}{\implies} f^2 \in R_{\langle a; b \rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a; b \rangle} \stackrel{\text{veta 1.2.14}}{\implies} fg = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2] \in R_{\langle a; b \rangle}. \blacksquare$

Veta 1.2.17.

$f, g \in R_{\langle a; b \rangle}$, $\inf \{g(x); x \in \langle a; b \rangle\} > 0$, resp. $\sup \{g(x); x \in \langle a; b \rangle\} < 0 \implies \frac{1}{f}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a; b \rangle}$.

Dôkaz.

Označme $m^* = \inf \{g(x); x \in \langle a; b \rangle\}$, $M^* = \sup \{g(x); x \in \langle a; b \rangle\}$.

$m^* > 0$, resp. $M^* < 0 \implies 0 \notin \langle m^*; M^* \rangle \implies \varphi(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \langle m^*; M^* \rangle$ je spojitá.

$g \in R_{\langle a; b \rangle}$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ je spojitá $\stackrel{\text{veta 1.2.15}}{\implies} \frac{1}{g} \in R_{\langle a; b \rangle} \stackrel{\text{veta 1.2.16}}{\implies} \frac{f}{g} \in R_{\langle a; b \rangle}. \blacksquare$

²²Ak zmenšíme δ , tvrdenie implikácie $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon_0$ zostane v platnosti.

²³ $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i = \sum_{i \in I_1} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i + \sum_{i \in I_2} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i$.

Veta 1.2.18 (Nezápornosť integrálu).

$$f \in R_{\langle a; b \rangle}, f(x) \geq 0 \text{ pre všetky } x \in \langle a; b \rangle \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Dôkaz.

$$f(x) \geq 0, x \in \langle a; b \rangle \implies m = \inf \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\} \geq 0 \xrightarrow{(1.2)} \int_a^b f(x) dx \geq m(b-a) \geq 0. \blacksquare$$

Veta 1.2.19 (Monotónnosť integrálu).

$$f, g \in R_{\langle a; b \rangle}, f(x) \leq g(x) \text{ pre všetky } x \in \langle a; b \rangle \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Dôkaz.

$$g(x) - f(x) \geq 0, x \in \langle a; b \rangle \xrightarrow{\text{veta 1.2.18}} 0 \leq \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx. \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.19.a.

$$f \in R_{\langle a; b \rangle} \implies \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Dôkaz.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, x \in \langle a; b \rangle \implies -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx. \blacksquare$$

Skutočnosť, že pre f, g nejaká vlastnosť ($f(x) = g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, ...) **platí pre všetky uvažované x okrem konečného počtu bodov** budeme stručne zapisovať (**o.k.p.**).

Veta 1.2.20.

$f(x), g(x), x \in \langle a; b \rangle$ sú ohraničené, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ (o.k.p.) \implies

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx, \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b g(x) dx}.$$

Dôkaz.

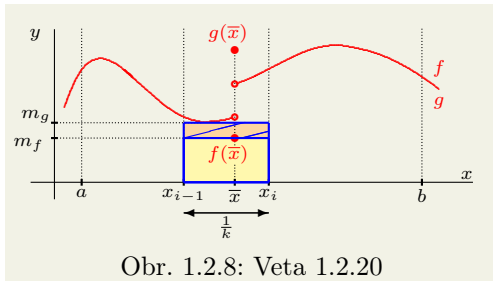
Budeme predpokladať, že sa funkcie f, g líšia iba v jednom bode \bar{x} , t. j. že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle - \{\bar{x}\}$. V opačnom prípade postupujeme matematickou indukciou po počet líšiacich sa bodov. Dokážeme iba prvé tvrdenie, druhé sa dokáže analogicky.

Označme $D_k = \{x_i\}_{i=1}^n = \{a + \frac{i(b-a)}{k}\}_{i=1}^k \in \mathcal{D}_{\langle a; b \rangle}$, $k \in \mathbb{N}$. Existuje práve jedno prirodzené číslo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ také, že $\bar{x} \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$. Funkcie f, g sa líšia iba na intervale $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$. Označme (obr. 1.2.8) $m_f = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}$, $m_g = \inf \{g(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}$. Platí $\mu(D_k) = \frac{1}{k}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(D_k) = 0$, t. j. postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna. Potom:²⁴

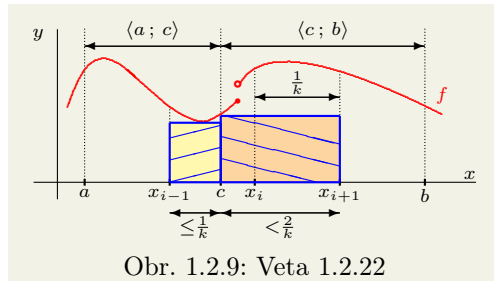
$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(g, D_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} [S_D(f, D_k) - S_D(g, D_k)] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (m_f - m_g)(x_{i+1} - x_{i-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_f - m_g}{k} = 0. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{veta 1.2.5}} \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(g, D_k) = \int_a^b g(x) dx. \blacksquare$$

²⁴ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, $m_f - m_g$ je ohraničené, potom platí (ma1: dôsledok 3.2.4.b): $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_f - m_g}{k} = 0$.



Obr. 1.2.8: Veta 1.2.20



Obr. 1.2.9: Veta 1.2.22

Veta 1.2.21.

$f \in R_{\langle a; b \rangle}$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ (o.k.p.) \implies
 $g \in R_{\langle a; b \rangle}$ a platí $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

Dôkaz.

Z vety 1.2.20 vyplýva: $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. ■

Z predchádzajúcich viet vyplýva, že konečný počet bodov nemá vplyv na Riemannov integrál (vrátane dolného a horného). To znamená, že môžeme určitý integrál na $\langle a; b \rangle$ definovať pre ohraničenú funkciu, ktorá nie je definovaná v konečnom počte bodov.²⁵ Funkcia nemusí byť definovaná ani v krajných bodoch intervalu a Riemannov integrál môžeme definovať na ľubovoľnom z intervalov $\langle a; b \rangle$, $(a; b)$, $\langle a; b \rangle$, $(a; b)$. Pre interval I s hraničnými bodmi a, b môžeme použiť označenie

$$\int_a^b f(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

Veta 1.2.22.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená, $c \in \langle a; b \rangle \implies$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Dôkaz.

Dokážeme iba prvé tvrdenie, druhé tvrdenie sa dokáže analogicky.

Nech $D'_k = \{x_i\}_{i=1}^n = \{a + \frac{i(b-a)}{k}\}_{i=1}^k \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $k \in \mathbb{N}$, potom existuje index $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ taký, že platí $c \in (x_{i-1}; x_i)$.

Položme²⁶ $D_k = (D'_k - \{x_i\}) \cup \{c\} = \{a, x_1, \dots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, b\} \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$.

$\mu(D_k) < \frac{2}{k}$ (obr. 1.2.9) $\implies \{D_k\}_{k=1}^\infty$ je normálna $\xrightarrow{\text{veta 1.2.5}} \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k) = \int_a^b f(x) dx$.

Označme $D_k^* = \{a, x_1, \dots, x_{i-1}, c\} \in \mathfrak{D}_{\langle a; c \rangle}$, $D_k^{**} = \{c, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, b\} \in \mathfrak{D}_{\langle c; b \rangle}$.

$\mu(D_k^*) \leq \mu(D_k)$, $\mu(D_k^{**}) \leq \mu(D_k)$, t. j. $\{D_k^*\}_{k=1}^\infty$, $\{D_k^{**}\}_{k=1}^\infty$ sú normálne a platí:

²⁵Vety 1.2.20 a 1.2.21 môžeme rozšíriť z konečného počtu bodov na spočítateľný počet bodov, resp. na množiny s tzv. Jordanovou mierou nula [21, 24].

²⁶Deliaci bod x_i nahradíme bodom c , t. j. $d_i = \langle x_{i-1}; c \rangle$, $d_{i+1} = \langle c; x_{i+1} \rangle$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k^*) = \int_a^c f(x) dx, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k^{**}) = \int_c^b f(x) dx.$$

Ďalej platí:

$$S_D(f, D_k) = \sum_{j=1}^k m_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^i m_j \Delta x_j + \sum_{j=i+1}^k m_j \Delta x_j = S_D(f, D_k^*) + S_D(f, D_k^{**}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [S_D(f, D_k^*) + S_D(f, D_k^{**})] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k^*) + \lim_{k \rightarrow \infty} S_D(f, D_k^{**}) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Veta 1.2.23 (Aditívnosť integrálu).

$f \in R_{(a; b)}$, $c \in (a; b) \Leftrightarrow f \in R_{(a; c)}$, $f \in R_{(c; b)}$ a platí $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Dôkaz.

Tvrdenie vety vyplýva z definície Riemannovho integrálu a z vety 1.2.22 (obr. 1.2.10).

$$\begin{aligned} NP \Rightarrow: 0 &= \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} = \left(\overline{\int_a^c f(x) dx} + \overline{\int_c^b f(x) dx} \right) - \left(\underline{\int_a^c f(x) dx} + \underline{\int_c^b f(x) dx} \right) = \\ &= \underbrace{\left(\overline{\int_a^c f(x) dx} - \underline{\int_a^c f(x) dx} \right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\overline{\int_c^b f(x) dx} - \underline{\int_c^b f(x) dx} \right)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^c f(x) dx} - \underline{\int_a^c f(x) dx} = 0, \quad \overline{\int_c^b f(x) dx} - \underline{\int_c^b f(x) dx} = 0, \text{ t. j. } f \in R_{(a; c)}, f \in R_{(c; b)}.$$

$$\begin{aligned} PP \Leftarrow: \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} &= \left(\overline{\int_a^c f(x) dx} + \overline{\int_c^b f(x) dx} \right) - \left(\underline{\int_a^c f(x) dx} + \underline{\int_c^b f(x) dx} \right) = \\ &= \left(\overline{\int_a^c f(x) dx} - \underline{\int_a^c f(x) dx} \right) + \left(\overline{\int_c^b f(x) dx} - \underline{\int_c^b f(x) dx} \right) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f \in R_{(a; b)}. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{veta 1.2.22}} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \blacksquare$$

Riemannov integrál môžeme definovať nielen pre $a < b$, ale aj pre $a \geq b$. To znamená, že dolná hranica integrovania **môže byť väčšia** ako horná hranica.²⁷ Definujeme:

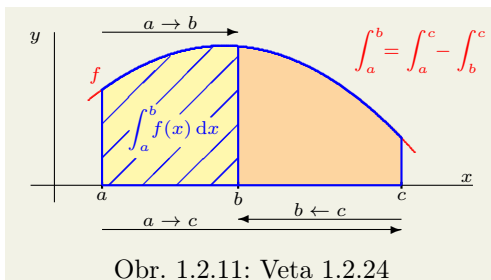
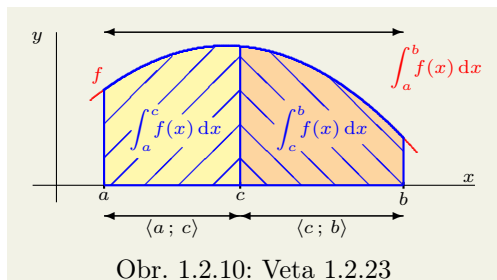
$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{pre všetky } a \in R \text{ a všetky funkcie } f,$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{pre } a > b, \text{ pokiaľ existuje } \int_b^a f(x) dx, \text{ t. j. } f \in R_{(b; a)}.$$

Ako dokazuje nasledujúca veta, aditívnosť integrálu nie je závislá na vzájomnej polohe bodov a, b, c . Ak $f \in R_{(a; b)}$, potom z uvedenej definície vyplýva:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0 = \int_a^a f(x) dx = \int_b^b f(x) dx. \quad (1.6)$$

²⁷ $f \in R_{(a; b)}$ bude naďalej znamenať riemannovsku integrovateľnosť na intervale $(a; b)$, t. j. pre $a < b$.

**Veta 1.2.24.**

$f \in R_I$, $I \subset \mathbb{R}$ je ohraničený interval, $a, b, c \in I \implies \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Dôkaz.

Je zrejmé, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná na všetkých intervaloch, ktoré vytvoria body $a, b, c \in I$. Je desať možností pre vzájomné usporiadanie a, b, c . Kvôli prehľadnosti nebudeme písať „ $f(x) dx$ “. Na základe definície, vety 1.2.23 a vzťahu (1.6) platí:

$$\boxed{a < c < b} \quad \int_a^c + \int_c^b = \int_a^b \quad (\text{veta 1.2.23, obr. 1.2.10}),$$

$$\boxed{a < b < c} \quad \int_a^c + \int_c^b = \left(\int_a^b + \int_b^c \right) + \int_c^b = \int_a^b + \left(\int_b^c + \int_c^b \right) = \int_a^b + 0 = \int_a^b \quad (\text{obr. 1.2.11}),$$

$$\boxed{b < a < c} \quad \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c - \left(\int_b^a + \int_a^c \right) = -\int_b^a = \int_a^b,$$

$$\boxed{b < c < a} \quad \int_a^c + \int_c^b = -\int_c^a - \int_b^c = -\left(\int_b^c + \int_c^a \right) = -\int_b^a = \int_a^b,$$

$$\boxed{c < a < b} \quad \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c + \left(\int_c^a + \int_a^b \right) = \left(\int_a^c + \int_c^a \right) + \int_a^b = 0 + \int_a^b = \int_a^b,$$

$$\boxed{c < b < a} \quad \int_a^c + \int_c^b = -\int_c^a + \int_c^b = -\left(\int_c^b + \int_b^a \right) + \int_c^b = -\int_b^a = \int_a^b.$$

Posledné štyri možnosti sú splnené triviálne:

$$\boxed{a = b = c} \quad \int_a^a = \int_a^a + \int_a^a, \quad \boxed{a = b} \quad \int_a^a = \int_a^a + \int_c^a, \quad \boxed{a = c} \quad \int_a^a = \int_a^a + \int_a^b, \quad \boxed{b = c} \quad \int_a^b = \int_a^a + \int_a^b. \quad \blacksquare$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu môžeme názorne ilustrovať na vektoroch. Ak si predstavíme integrály $\int_a^b f(x) dx$, $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ ako vektory \vec{ab} , $\vec{ba} = -\vec{ab}$ na reálnej osi, potom napr. pre $a < b < c$ (obr. 1.2.11) platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x) = \int_a^c f(x) - \int_b^c f(x), \quad \text{resp. } \vec{ab} = \vec{ac} + \vec{cb} = \vec{ac} - \vec{bc}.$$

Doteraz sme sa zaoberali Riemannovým integrálom na ohraničenom intervale. V mnohých prípadoch je užitočné rozšíriť definíciu Riemannovho integrálu na zjednotenie konečného počtu disjunktných ohraničených intervalov.

Nech $I_1, I_2, \dots, I_k, k \in \mathbb{N}$ sú nedegenerované ohraničené reálne intervaly, ktoré sú navzájom po dvoch disjunktné, t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j$. Ak je funkcia f riemannovsky integrovateľná na každom z intervalov I_1, I_2, \dots, I_k , potom ju nazývame **riemannovsky integrovateľná na množine $A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$** a číslo

$$\int_A f(x) dx = \int_{I_1} f(x) dx + \int_{I_2} f(x) dx + \dots + \int_{I_k} f(x) dx.$$

nazývame²⁸ **Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A** .

1.2.2 Výpočet Riemannovho integrálu

Ak $f \in R_{\langle a; b \rangle}$, potom pre každé $c \in \langle a; b \rangle$ existuje Riemannov integrál $\int_a^c f(x) dx$, ktorý je jednoznačne určený reálnym číslom. To znamená, že môžeme definovať funkciu:

$$G_h(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in \langle a; b \rangle.$$

Funkciu G_h nazývame **neurčitý Riemannov integrál** funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$, resp. **integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze)**. Keďže premenná x nachádza v hornej hranici integrálu, integračná premenná musí byť označená inak ako x . Geometricky predstavuje funkčná hodnota $G_h(x)$ plochu krivočiareho lichobežníka určenej funkciou f a intervalom $\langle a; x \rangle$ (obr. 1.2.12).

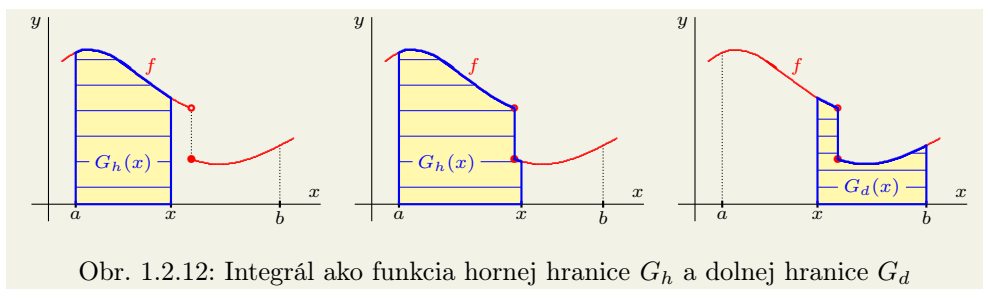
Ukážeme, že funkcia G_h je spojitá a je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale $\langle a; b \rangle$, t. j. aj neurčitým integrálom²⁹ v zmysle kapitoly 1.1.

Analogicky definujeme **integrál ako funkciu dolnej hranice (dolnej medze)**:

$$G_d(x) = \int_x^b f(t) dt, \quad x \in \langle a; b \rangle.$$

Z predchádzajúceho vyplýva, že pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ platí:

$$G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t) dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t) dt.$$



Obr. 1.2.12: Integrál ako funkcia hornej hranice G_h a dolnej hranice G_d

²⁸Korektnosť definície je zaručená aditívnosťou integrálu.

²⁹Preto sa nazýva „neurčitý“ Riemannov integrál.

Veta 1.2.25.

$$f \in R_{\langle a; b \rangle}, c, d \in \langle a; b \rangle \implies \int_c^d f(t) dt = G_h(d) - G_h(c) = G_d(c) - G_d(d).$$

Dôkaz.

Tvrdenie vyplýva z definície a z vety 1.2.24.

$$G_h(d) - G_h(c) = \int_a^d f(t) dt - \int_a^c f(t) dt = \int_a^d f(t) dt + \int_c^a f(t) dt = \int_c^d f(t) dt,$$

$$G_d(c) - G_d(d) = \int_c^b f(t) dt - \int_d^b f(t) dt = \int_c^b f(t) dt + \int_b^d f(t) dt = \int_c^d f(t) dt. \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.25.a.
 $f \in R_{\langle a; b \rangle}, f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle \implies G_h$ je neklesajúca, G_d je nerastúca na $\langle a; b \rangle$.
Dôkaz.

$$x, x^* \in \langle a; b \rangle, x < x^* \xrightarrow{\text{veta 1.2.18}} G_h(x^*) - G_h(x) = G_d(x) - G_d(x^*) = \int_x^{x^*} f(t) dt \geq 0. \blacksquare$$

Veta 1.2.26.
 $f \in R_{\langle a; b \rangle} \implies G_h, G_d$ sú spojité na $\langle a; b \rangle$.
Dôkaz.
 $f \in R_{\langle a; b \rangle}, K = \sup \{|f(x)|; x \in \langle a; b \rangle\} \implies |f(x)| \leq K$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$.
Nech $\varepsilon > 0$. Označme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, t. j. $\varepsilon = \delta K$.Nech body $x, x^* \in \langle a; b \rangle$ sú také, že platí³⁰ $0 \leq x - x^* < \delta$. Potom na základe vety 1.2.25, dôsledku 1.2.19.a, vzťahu (1.2) platí:

$$|G_h(x) - G_h(x^*)| = \left| \int_{x^*}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x^*}^x |f(t)| dt \leq K(x - x^*) < \delta K = \varepsilon.$$

To znamená (ma1: veta 3.3.2) spojitosť G_h na $\langle a; b \rangle$. Dôkaz spojitosť G_d je analogický. \blacksquare **Veta 1.2.27.**
 $f \in R_{\langle a; b \rangle}, f$ je spojitá v bode $x^* \in \langle a; b \rangle \implies$
 G_h, G_d sú diferencovateľné³¹ v bode x^* a platí $G'_h(x^*) = f(x^*), G'_d(x^*) = -f(x^*)$.
*Dôkaz.*Nech $\varepsilon > 0$.
 f je spojitá v x^* , t. j. $\exists \delta > 0 \forall x \in \langle a; b \rangle, |x - x^*| < \delta \implies |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$.
Nech $x \in \langle a; b \rangle, x \neq x^*, |x - x^*| < \delta$, t. j. $0 < |x - x^*| < \delta$, potom platí:

$$\begin{aligned} \left| \frac{G_h(x) - G_h(x^*)}{x - x^*} - f(x^*) \right| &= \left| \frac{1}{x - x^*} \int_{x^*}^x f(t) dt - \frac{f(x^*)}{x - x^*} \int_{x^*}^x dt \right| = \frac{1}{|x - x^*|} \left| \int_{x^*}^x [f(t) - f(x^*)] dt \right| = \\ &= \left[t \text{ leží medzi } x \text{ a } x^* \implies |t - x^*| \leq |x - x^*| < \delta \implies |f(t) - f(x^*)| < \varepsilon \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{|x - x^*|} \left| \int_{x^*}^x |f(t) - f(x^*)| dt \right| < \frac{1}{|x - x^*|} \left| \int_{x^*}^x \varepsilon dt \right| = \frac{1}{|x - x^*|} \varepsilon |x - x^*| = \varepsilon. \end{aligned}$$

³⁰ Je zrejmé, že bez straty všeobecnosti môžeme predpokladať platnosť nerovnosti $x^* \leq x$.³¹ V krajných bodoch a, b sa myslia jednostranné derivácie.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{mal: veta 3.2.1}} f(x^*) &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{G_h(x) - G_h(x^*)}{x - x^*} = G'_h(x^*). \\ G'_d(x^*) &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{G_d(x) - G_d(x^*)}{x - x^*} \xrightarrow{\text{veta 1.2.25}} - \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{G_h(x) - G_h(x^*)}{x - x^*} = -f(x^*). \blacksquare \end{aligned}$$

Dôsledok 1.2.27.a.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je spojitá $\implies G_h, -G_d$ sú primitívne funkcie k f na $\langle a; b \rangle$.

Dôsledok 1.2.27.b.

$f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je po častiach spojitá $\implies G_h, -G_d$ sú zovšeobecnené primitívne funkcie k f na $\langle a; b \rangle$.

Nasledujúca veta je veľmi dôležitá pre výpočet určitého integrálu. V literatúre sa často nazýva **základná veta integrálneho počtu**.

Veta 1.2.28 (Newton–Leibnizov vzorec).

$f \in R_{\langle a; b \rangle}$, F je (zovšeobecnená) primitívna k f na $\langle a; b \rangle \implies \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Dôkaz.

Z vety 1.1.2 a poznámky 1.1.6 vyplýva, že existuje konštanta $k \in R$ taká, že pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ platí $F(x) - G_h(x) = k$, t. j. $F(x) = G_h(x) + k$. Z toho vyplýva (veta 1.2.25):

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G_h(b) + c] - [G_h(a) + c] = G_h(b) - G_h(a) = \\ &= \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(x) dx - 0 = \int_a^b f(x) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Z vety vyplýva, že na výpočet určitého integrálu môžeme použiť ľubovoľnú (zovšeobecnenú) primitívnu funkciu. Newton–Leibnizov vzorec sa zvykne zapisovať v tvare:³²

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b.$$

Pred použitím Newton–Leibnizovho vzorca musíme overiť obidva predpoklady. V praxi sa overujú počas výpočtu. V príklade 1.2.5 d) síce k danej funkcii f existuje zovšeobecnená primitívna funkcia, ale f nie je ohraničená. Integrovaníu takýchto funkcií sa budeme venovať v nasledujúcej časti o nevlastných integráloch.

Niekedy sa v literatúre určitý integrál definuje pomocou Newton–Leibnizovho vzorca. Ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle$ (zovšeobecnenú) primitívnu funkciu F , potom číslo $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ nazývame **Newtonovým (určitým) integrálom funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$** . Newtonov a Riemannov integrál **nie sú ekvivalentné**, ale pokiaľ obidva existujú, potom sa rovnajú (základná veta integrálneho počtu).

Príklad 1.2.5.

a) $\int_{-1}^0 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2 \cdot 2} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{x^2}{4} \right]_{-1}^0 = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}$ (príklad 1.2.4 a), obr. 1.2.6).

³²Konštanta c prislúchajúca k primitívnej funkcii sa nepíše.

$$b) \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{príklad 1.2.4 b), obr. 1.2.7}).$$

$$c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{1^2+1}) - \ln(0 + \sqrt{0^2+1}) = \\ = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$d) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right) dx \text{ — zatiaľ nevieme vypočítať (viď príklad 1.2.18).}$$

Nie sú splnené predpoklady vety 1.2.28. Funkcia $f(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ nie je na $\langle -\pi; \pi \rangle$ ohraničená,³³ t. j. $f \notin R_{\langle -\pi; \pi \rangle}$. Na druhej strane funkcia $F(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$, $F(0) = 0$ je zovšeobecnenou primitívnou funkciou k f na $\langle -\pi; \pi \rangle$. ■

Veta 1.2.29 (1. veta o strednej hodnote).

$f, g \in R_{\langle a; b \rangle}$, $g(x) \geq 0$ pre $x \in \langle a; b \rangle$, $m = \inf \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$, $M = \sup \{f(x); x \in \langle a; b \rangle\}$
 \implies existuje $\alpha \in \langle m; M \rangle$ také, že $\int_a^b f(x)g(x) dx = \alpha \int_a^b g(x) dx$.

Dôkaz.

$$m \leq f(x) \leq M, g(x) \geq 0, x \in \langle a; b \rangle \implies mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \xrightarrow{\text{veta 1.2.19}}$$

$$m \int_a^b g(x) dx = \int_a^b mg(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b Mg(x) dx = M \int_a^b g(x) dx. \quad (1.7)$$

$g(x) \geq 0, x \in \langle a; b \rangle \xrightarrow{\text{veta 1.2.18}} \int_a^b g(x) dx \geq 0$. Sú dve možnosti:

$$1. \int_a^b g(x) dx = 0 \implies 0 = m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx = 0 \\ \implies \int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \implies \forall \alpha \in \langle m; M \rangle: \int_a^b f(x)g(x) dx = \alpha \int_a^b g(x) dx = 0.$$

$$2. \int_a^b g(x) dx > 0 \implies m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M, \text{ t. j. stačí položiť } \alpha = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}. \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.29.a.

$f, g \in R_{\langle a; b \rangle}$, $g(x) \leq 0$ pre $x \in \langle a; b \rangle \implies \exists \alpha \in \langle m; M \rangle: \int_a^b f(x)g(x) dx = \alpha \int_a^b g(x) dx$.

Dôkaz.

$$h(x) = -g(x) \geq 0, x \in \langle a; b \rangle \implies \\ \exists \alpha \in \langle m; M \rangle: \int_a^b f(x)g(x) dx = - \int_a^b f(x)h(x) dx = -\alpha \int_a^b h(x) dx = \alpha \int_a^b g(x) dx. \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.29.b.

f je spojitá na $\langle a; b \rangle$, $g \in R_{\langle a; b \rangle}$, $g(x) \geq 0$, resp. $g(x) \leq 0$ pre $x \in \langle a; b \rangle \implies$

³³ f nie je v bode 0 ani definovaná. To by nevyhovovalo, pokiaľ by bola na $\langle -\pi; \pi \rangle$ ohraničená.

$$\exists c \in \langle a; b \rangle: \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Dôkaz.

f je spojitá na $\langle a; b \rangle$, $\alpha \in \langle m; M \rangle \xrightarrow{\text{ma1: veta 3.3.12}} \exists c \in \langle a; b \rangle: \alpha = f(c)$. ■

Dôsledok 1.2.29.c.

$$f \in R_{\langle a; b \rangle} \implies \exists \alpha \in \langle m; M \rangle: \int_a^b f(x) dx = \alpha(b-a).$$

Dôkaz.

$$g(x) = 1, \langle a; b \rangle \implies \exists \alpha \in \langle m; M \rangle: \int_a^b f(x) dx = \alpha \int_a^b dx = \alpha(b-a). \blacksquare$$

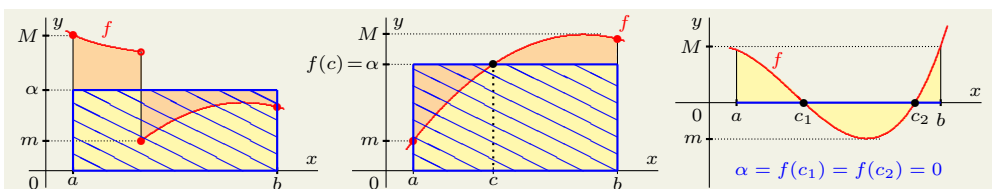
Dôsledok 1.2.29.d.

$$f \text{ je spojitá na } \langle a; b \rangle \implies \exists c \in \langle a; b \rangle: \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Ak $f(x) \in R_{\langle a; b \rangle}$, potom číslo $\alpha \in R$ (viď dôsledok 1.2.29.c) také, že platí

$$\int_a^b f(x) dx = \alpha(b-a), \quad \text{t. j. } \alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

nazývame **integrálna stredná hodnota** funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$. Geometricky predstavuje α výšku obdĺžnika s rovnakým obsahom ako obsah³⁴ krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a rovnakou podstavou $\langle a; b \rangle$ (obr. 1.2.13).



Obr. 1.2.13: Integrálna stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$

Príklad 1.2.6.

Odhadnite hodnotu integrálu $\int_0^1 \frac{x^{121} dx}{\sqrt[17]{x^2+1}}$.

Riešenie.

Označme $f(x) = \frac{1}{\sqrt[17]{x^2+1}}$, $g(x) = x^{121}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$.

Potom $g(x) = x^{121} \geq 0$, $m = 0 \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt[17]{x^2+1}} \leq 1 = M$ pre všetky $x \in \langle 0; 1 \rangle$.

$$\stackrel{(1.7)}{\implies} 0 = 0 \cdot \int_0^1 x^{121} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{121} dx}{\sqrt[17]{x^2+1}} \leq 1 \cdot \int_0^1 x^{121} dx = \left[\frac{x^{122}}{122} \right]_0^1 = \frac{1}{122} \approx 0,008197. \blacksquare$$

Príklad 1.2.7.

Určte integrálnu strednú hodnotu α_k funkcie $f(x) = x \sin x$ na intervale $\langle 0; k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{N}$.

³⁴Tým sa myslí orientovaný obsah, t. j. plocha pod osou x je záporná.

Riešenie.

Z definície vyplýva (obr. 1.2.14):

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{k\pi-0} \int_0^{k\pi} x \sin x \, dx \stackrel{\text{pr. 1.1.37}}{=} \frac{1}{k\pi} \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{k\pi} = \\ &= \frac{1}{k\pi} \left[-k\pi \cdot \cos k\pi + \sin k\pi - 0 \cdot \cos 0 - \sin 0 \right] = -\cos k\pi = -(-1)^k = (-1)^{k-1}. \blacksquare\end{aligned}$$

Pre odhady Riemannových integrálov je v mnohých prípadoch užitočná nasledujúca veta (2. veta o strednej hodnote), ktorú uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.2.30 (2. veta o strednej hodnote).

$f, g \in R_{\langle a; b \rangle}$, f je monotónna na $\langle a; b \rangle$
 \implies existuje $c \in \langle a; b \rangle$ také, že $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(a) \int_a^c g(x) \, dx + f(b) \int_c^b g(x) \, dx$.

Dôsledok 1.2.30.a.

$f \in R_{\langle a; b \rangle}$, f je monotónna na $\langle a; b \rangle$
 \implies existuje $c \in \langle a; b \rangle$ také, že $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(a)(c-a) + f(b)(b-c)$.

Dôkaz.

Ak položíme $g(x) = 1$, $x \in \langle a; b \rangle$, potom platí (obr. 1.2.15):

$$\exists c \in \langle a; b \rangle: \int_a^b f(x) \, dx = f(a) \int_a^c dx + f(b) \int_c^b dx = f(a)(c-a) + f(b)(b-c). \blacksquare$$

Príklad 1.2.8.

Odhadnite hodnotu integrálu $\int_1^a \frac{\sin x}{x} \, dx$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Riešenie.

$f(x) = \frac{1}{x}$ je monotónna na $\langle 1; a \rangle$, $g(x) = \sin x \in R_{\langle 1; a \rangle} \xrightarrow{\text{veta 1.2.30}}$

$$\begin{aligned}\exists c \in \langle 1; a \rangle: \int_1^a \frac{\sin x}{x} \, dx &= \frac{1}{1} \int_1^c \sin x \, dx + \frac{1}{a} \int_c^a \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_1^c + \frac{1}{a} \left[-\cos x \right]_c^a \\ \implies 0 &\leq \left| \int_1^a \frac{\sin x}{x} \, dx \right| \leq |-\cos c + \cos 1| + \frac{1}{a} |-\cos a + \cos c| \leq 2 + \frac{2}{a}. \blacksquare\end{aligned}$$

Určité integrály vo všeobecnosti počítame pomocou Newton–Leibnizovho vzorca. Aby sme tento vzorec mohli použiť, musíme poznať primitívnu funkciu. Na určenie primitívnej funkcie môžeme použiť všetky poznatky a metódy z predchádzajúcej časti o neurčitom integráli. Metódu per partes a substitučné metódy môžeme upraviť a určitý integrál počítat pomocou nich priamo. Po substitúcii sa nemusíme vracat k pôvodným premenným.

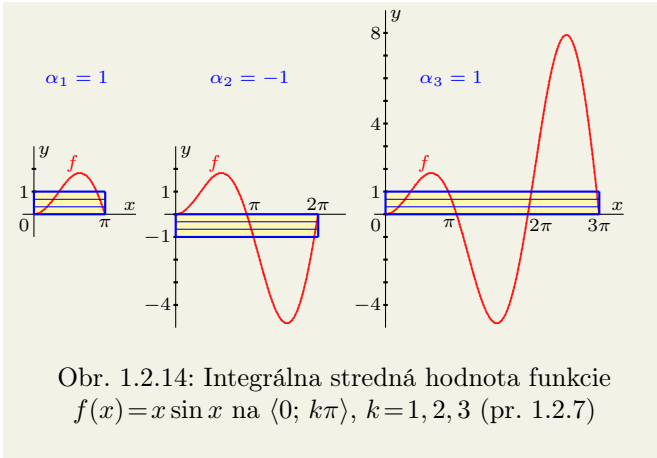
Veta 1.2.31 (Metóda per partes).

$u, v \in R_{\langle a; b \rangle}$, $u', v' \in R_{\langle a; b \rangle} \implies \int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$.

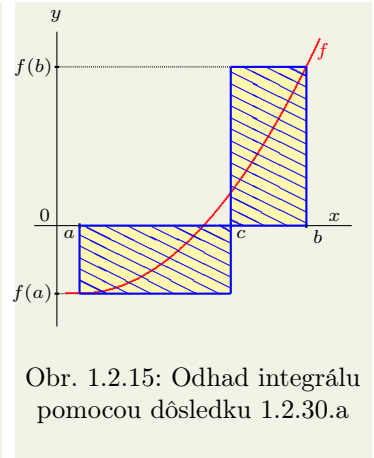
Dôkaz.

Z predpokladov vety vyplýva, že u, v sú spojité na $\langle a; b \rangle$ a že uv' , $u'v$, $(uv)' = uv' + u'v$ sú riemanovsky integrovateľné na $\langle a; b \rangle$. Ďalej pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ (o.k.p.) platí:

$$\begin{aligned}\left[u(x)v(x) \right]' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \implies \left[u(x)v(x) \right]_a^b = \int_a^b \left[u(x)v(x) \right]' \, dx = \\ &= \int_a^b \left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \right] \, dx = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx. \blacksquare\end{aligned}$$



Obr. 1.2.14: Integrálna stredná hodnota funkcie $f(x) = x \sin x$ na $\langle 0; k\pi \rangle$, $k = 1, 2, 3$ (pr. 1.2.7)



Obr. 1.2.15: Odhad integrálu pomocou dôsledku 1.2.30.a

Príklad 1.2.9.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx &\stackrel{\text{veta 1.2.31}}{=} \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ v' = \sin x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 2x \\ v = -\cos x \end{array} \right] = \left[-x^2 \cos x \right]_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ v' = \cos x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \sin x \end{array} \right] = \left(-4\pi^2 \cos 2\pi + 0^2 \cdot \cos 0 \right) + 2 \left[\left[x \sin x \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \right] = \\ &= -4\pi^2 + 2 \left(2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0 \right) - 2 \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = \\ &= -4\pi^2 - 2 \left(-\cos 2\pi + \cos 0 \right) = -4\pi^2 - 2(-1 + 1) = -4\pi^2. \end{aligned}$$

Iné riešenie.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton–Leibnizovho vzorca.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx &\stackrel{\text{pr. 1.1.37}}{=} \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right]_0^{2\pi} = \\ &= -4\pi^2 \cos 2\pi + 2 \cdot 2\pi \sin 2\pi + 2 \cos 2\pi + 0^2 \cos 0 - 2 \cdot 0 \sin 0 - 2 \cos 0 = -4\pi^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Veta 1.2.32 (1. veta o substitúcii).

f je spojitá na intervale I , $x = \varphi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$, $\varphi(\langle \alpha; \beta \rangle) \subset I$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

$$\varphi' \text{ je spojitá na } \langle \alpha; \beta \rangle \implies f(\varphi)\varphi' \in R_{\langle \alpha; \beta \rangle} \text{ a platí: } \int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt.$$

Dôkaz.

f je spojitá na $I \implies f$ má na I primitívnu funkciu F , t. j. $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

Označme $G(t) = F(\varphi(t))$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$, potom (mal: veta 4.1.7) pre všetky $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ platí $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, t. j. $G(t)$ je primitívna k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $\langle \alpha; \beta \rangle$.

φ' a aj φ sú spojité na $\langle \alpha; \beta \rangle \xrightarrow{\text{veta 1.2.15}} f(\varphi)\varphi' \in R_{\langle \alpha; \beta \rangle} \implies f(\varphi)\varphi' \in R_{\langle \alpha; \beta \rangle}$.

Potom na základe Newton–Leibnizovho vzorca platí:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx. \blacksquare$$

Vetu 1.2.32 môžeme použiť obomi smermi. Existencia $\int_a^b f(x) dx$ vyplýva zo spojitosti funkcie f na $\langle a; b \rangle$. Ak počítame integrál $\int_a^b f(x) dx$ a sú splnené predpoklady vety, potom existuje aj integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ a platí rovnosť. To znamená, že integrál $\int_a^b f(x) dx$ pretransformujeme na integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ a ten vypočítame.

Ak počítame $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ a sú splnené predpoklady vety 1.2.32, potom $\int_a^b f(x) dx$ existuje a na základe tejto vety existuje aj $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ a platí rovnosť. To znamená, že integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ vypočítame pomocou $\int_a^b f(x) dx$.

Príklad 1.2.10.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left[x = \sin t, t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle, x \in \langle -1; 1 \rangle, dx = \cos t dt \mid \begin{array}{l} \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right] = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2 \cdot 2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2 \cdot 2} + \frac{\sin \pi}{4} - \frac{-\pi}{2 \cdot 2} + \frac{\sin(-\pi)}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Predpoklady vety 1.2.32 sú splnené: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $\langle -1; 1 \rangle$, $x = \varphi(t) = \sin t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ má spojitú deriváciu $\varphi'(t) = \cos t$, $\varphi(\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle) = \langle -1; 1 \rangle$, $\varphi(\pm \frac{\pi}{2}) = \pm 1$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-1}^2 t \sin(t^2+1) dt &= \left[x = t^2 + 1, dx = 2 dt \mid \begin{array}{l} (-1)^2 + 1 = 2 \\ 2^2 + 1 = 5 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^5 \sin x dx = \frac{1}{2} \left[-\cos x \right]_2^5 = -\frac{1}{2} \left[\cos x \right]_2^5 = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}. \end{aligned}$$

Predpoklady vety sú splnené: $f(x) = \sin x$ je spojitá na R , $x = \varphi(t) = t^2 + 1$, $t \in \langle -1; 2 \rangle$ má spojitú deriváciu $\varphi'(t) = 2t$, $\varphi(\langle -1; 2 \rangle) = \langle 1; 5 \rangle \subset R$, $\varphi(-1) = 2$, $\varphi(2) = 5$.

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt = \left[x = \sin t, dx = \cos t dt \mid \begin{array}{l} \sin 0 = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{d) } \int_1^e \frac{\ln x dx}{x} = \left[t = \ln x, dt = \frac{\ln x}{x} dx \mid \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e \Rightarrow t=1 \end{array} \right] = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{e) } \int_0^1 x e^{1-x^2} dx = \left[t = 1 - x^2, x \in \langle 0; 1 \rangle \mid \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int_1^0 e^t dt = -\frac{1}{2} \left[e^t \right]_1^0 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}.$$

Iné riešenie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &\stackrel{\text{pr. 1.1.24}}{=} \left[\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{1-1^2}}{2} + \frac{\arcsin 1}{2} - \frac{-1 \cdot \sqrt{1-(-1)^2}}{2} - \frac{\arcsin(-1)}{2} = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-1}^2 t \sin(t^2+1) dt &= \left[-\frac{1}{2} \cos(t^2+1) \right]_{-1}^2 = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}. \\ \int t \sin(t^2+1) dt &= \left[\begin{array}{l} \text{1. ms: } x = t^2 + 1, t \in R \\ dx = 2 dt, x \in \langle 1; \infty \rangle \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \sin x dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cos x + c = -\frac{1}{2} \cos(t^2+1) + c, t \in R, c \in R. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt \stackrel{\text{pr. 1.1.10}}{=} \left[\frac{\sin^4 t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} - \frac{\sin^4 0}{4} = \frac{1}{4} \cdot \blacksquare$$

Ak budeme predpokladať, že funkcia φ je rýdzo monotónna, potom môžeme predpoklady predchádzajúcej vety pre funkciu f zovšeobecniť. Platí nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu (viď napr. [21]).

Veta 1.2.33 (2. veta o substitúcii).

f je ohraničená na $\langle a; b \rangle$, $x = \varphi(t): J \rightarrow \langle a; b \rangle$, J je uzavretý interval s hranicami α, β , $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in J$.³⁵ \implies

$$f \in R_{\langle a; b \rangle} \Leftrightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J \text{ a pokiaľ existujú platí: } \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

1.2.3 Integrovanie párných, nepárných a periodických funkcií

Nech $f \in R_{\langle a; b \rangle}$. Ak použijeme substitúciu $x = \varphi(t) = -t$, potom $f \in R_{\langle -b; -a \rangle}$ a platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = -t, \quad dx = -dt \\ x \in \langle a; b \rangle, \quad t \in \langle -b; -a \rangle \\ a \mapsto -a, \quad b \mapsto -b \end{array} \right] = - \int_{-a}^{-b} f(-t) dt = \int_{-b}^{-a} f(-t) dt = \int_{-b}^{-a} f(-x) dx.$$

Ak je funkcia $f \in R_{\langle a; b \rangle}$ párna, potom (obr. 1.2.16):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-b}^{-a} f(-x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx. \quad (1.8)$$

Ak je funkcia $f \in R_{\langle a; b \rangle}$ nepárna, potom (obr. 1.2.16):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-b}^{-a} f(-x) dx = \int_{-b}^{-a} [-f(x)] dx = - \int_{-b}^{-a} f(x) dx. \quad (1.9)$$

Príklad 1.2.11.

Nech $a > 0$, $f \in R_{\langle -a; a \rangle}$.

a) f je párna (obr. 1.2.17 hore) \implies

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \stackrel{(1.8)}{=} \int_0^{-(-a)} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

b) f je nepárna (obr. 1.2.17 dole) \implies

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \stackrel{(1.9)}{=} - \int_0^{-(-a)} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0. \blacksquare$$

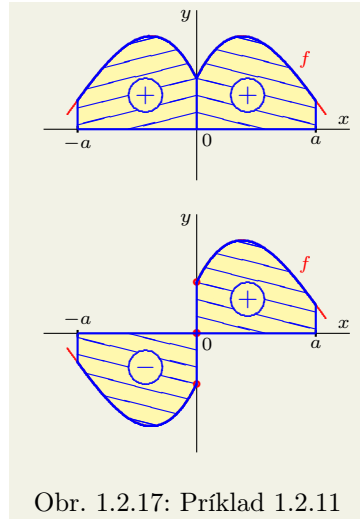
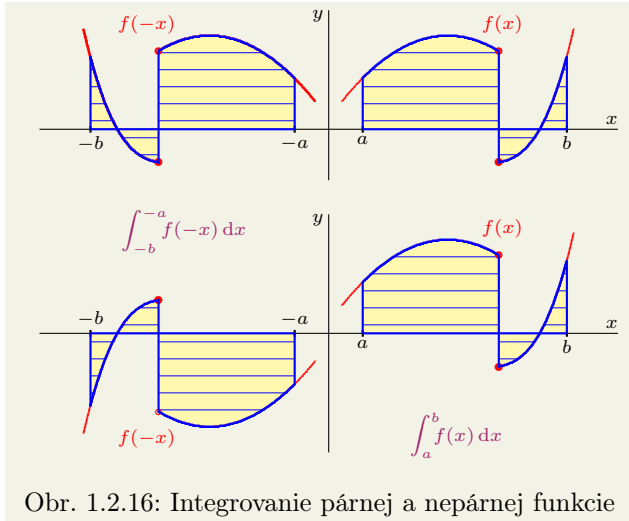
Príklad 1.2.12.

a) $\int_{-1}^1 \frac{x^3 \sqrt{x^2 + \sin^2 x}}{x^4 + 1} dx = \left[\begin{array}{l} \text{integrand je spojitá} \\ \text{a nepárna funkcia na } \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right] = 0.$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin |x| dx = \left[\begin{array}{l} \sin |x| \text{ je spojitá} \\ \text{a párna na } \langle -\pi; \pi \rangle \end{array} \right] = 2 \int_0^{\pi} \sin |x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx =$
 $= 2 \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2 \left[-(-1) + 1 \right] = 4.$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - \sin^3 4x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 4x dx = 2 \int_0^{\pi} x^4 dx - 0 = 2 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}. \blacksquare$

³⁵Pre všetky $t \in J$ platí $\varphi'(t) > 0$, resp. $\varphi'(t) < 0$, t. j. φ je rastúca, resp. klesajúca na J (lema 1.1.7).



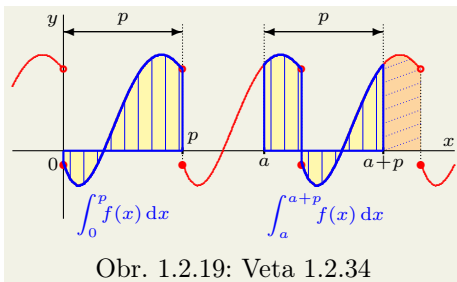
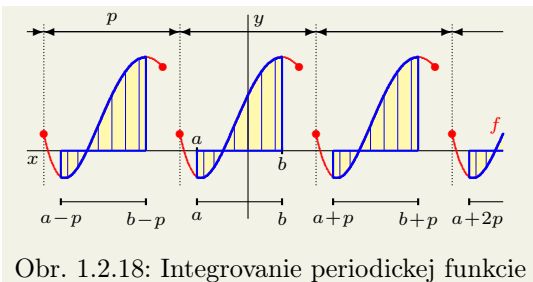
Obr. 1.2.16: Integrovanie párnej a nepárnej funkcie

Obr. 1.2.17: Príklad 1.2.11

Nech $f \in R_{\langle a; b \rangle}$, f je periodická s periódou $p > 0$. Nech $k \in \mathbb{Z}$ je ľubovoľné. Potom pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ (o.k.p.) platí³⁶ $f(x + kp) = f(x)$. Ďalej platí:

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = t + kp, \quad dx = dt \\ x \in \langle a+kp; b+kp \rangle, t \in \langle a; b \rangle \\ a+kp \mapsto a, \quad b+kp \mapsto b \end{array} \right] = \int_a^b f(t+kp) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.10)$$

t. j. $f \in R_{\langle a+kp; b+kp \rangle}$ a navyše hodnota Riemannovho integrálu funkcie f je na každom intervale $\langle a+kp; b+kp \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ rovnaká (obr. 1.2.18).



Obr. 1.2.18: Integrovanie periodickej funkcie

Obr. 1.2.19: Veta 1.2.34

Veta 1.2.34.

f je periodická s periódou $p > 0$, $a \in \mathbb{R} \implies$

$$f \in R_{\langle 0; p \rangle} \Leftrightarrow f \in R_{\langle a; a+p \rangle} \text{ a pokiaľ existujú platí: } \int_0^p f(x) dx = \int_a^{a+p} f(x) dx.$$

Dôkaz.

Nech $k \in \mathbb{Z}$ je také, že $a \in \langle (k-1)p; kp \rangle$ (obr. 1.2.19).

³⁶Okrem konečného počtu bodov intervalu $\langle a; b \rangle$, kde nemusí byť f definovaná.

$$NP \Rightarrow: f \in R_{\langle 0; p \rangle}, \langle a; a+p \rangle \subset \langle (k-1)p; (k+1)p \rangle$$

$$\xrightarrow{(1.10)} f \in R_{\langle (k-1)p; kp \rangle}, f \in R_{\langle kp; (k+1)p \rangle} \Rightarrow f \in R_{\langle (k-1)p; (k+1)p \rangle} \xrightarrow{(1.10)} f \in R_{\langle a; a+p \rangle}.$$

$$PP \Leftarrow: f \in R_{\langle a; a+p \rangle}, (k-1)p \in \langle a-p; a \rangle, kp \in \langle a; a+p \rangle, \langle (k-1)p; kp \rangle \subset \langle a-p; a+p \rangle$$

$$\xrightarrow{(1.10)} f \in R_{\langle a-p; a \rangle} \Rightarrow f \in R_{\langle a-p; a+p \rangle} \Rightarrow f \in R_{\langle (k-1)p; kp \rangle} \xrightarrow{(1.10)} f \in R_{\langle 0; p \rangle}.$$

$$\text{Ďalej platí: } \int_a^{a+p} f(x) dx = \int_a^{kp} f(x) dx + \int_{kp}^{a+p} f(x) dx =$$

$$\xrightarrow{(1.10)} \int_a^{kp} f(x) dx + \int_{kp-p}^a f(x) dx = \int_{(k-1)p}^{kp} f(x) dx \xrightarrow{(1.10)} \int_0^p f(x) dx. \blacksquare$$

Príklad 1.2.13.

$$a \in R, m, n \in N, m \neq n \xrightarrow{\text{pr. 1.1.36, veta 1.2.34}}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx \xrightarrow{\text{párna}} \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sin^2(nx) dx = 2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{4n} \right]_0^{\pi} = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2n\pi)}{4n} - \frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4n} \right] = 2 \left[\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 \right] = \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx \xrightarrow{\text{párna}} \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 2 \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \right]_0^{\pi} = \\ &= 2 \left[\frac{\sin(m-n)\pi}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)\pi}{2(m+n)} - \frac{\sin 0}{2(m-n)} + \frac{\sin 0}{2(m+n)} \right] = 2[0 - 0 - 0 + 0] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx \xrightarrow{\text{párna}} \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos^2(nx) dx = 2 \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} \right]_0^{\pi} = 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2n\pi)}{4n} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4n} \right] = 2 \left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right] = \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx \xrightarrow{\text{párna}} \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 2 \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \right]_0^{\pi} = \\ &= 2 \left[\frac{\sin(m-n)\pi}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)\pi}{2(m+n)} - \frac{\sin 0}{2(m-n)} - \frac{\sin 0}{2(m+n)} \right] = 2[0 + 0 - 0 - 0] = 0. \end{aligned}$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx \xrightarrow{\text{nepárna}} 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx \xrightarrow{\text{nepárna}} 0.$$

Všetky integrandy sú definované na celej reálnej množine R , sú to spojité a periodické funkcie s periódou 2π , t. j. predpoklady vety 1.2.34 sú splnené. \blacksquare

1.2.4 Numerické integrovanie

Riemannov integrál dokážeme vypočítať pomocou Newton–Leibnizovho vzorca, samozrejme, pokiaľ existuje primitívna funkcia. A čo v prípade, ak primitívnu funkciu nevieme určiť, alebo ju nedokážeme „jednoducho“ vyjadriť (str. 6), alebo je vyjadrenie primitívnej funkcie príveľmi prácne, resp. neúčelné? Často (najmä pri technických výpočtoch) nám postačí približná hodnota, ktorá sa od presnej hodnoty nelíši viac ako maximálna (dovolená) chyba. V takýchto prípadoch používame na výpočet Riemannovho integrálu **približné**, tzv. **numerické metódy**. Numerické integrovanie sa niekedy v literatúre nazýva **numerická kvadratura**. Uvedieme tri jednoduché metódy na približný výpočet Riemannovho integrálu: **obdĺžnikovú**, **lichobežníkovú** a **Simpsonovu**.

Nech $f \in R_{\langle a; b \rangle}$. Uvažujme postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, pričom jednotlivé delenia $D_n = \{x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}; i = 0, 1, \dots, n\}$, $n \in N$ majú $n+1$ rovnako vzdialených deliacich bodov ($\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$). Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna, pretože platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0$.

Aby sme situáciu nekomplikovali, budeme predpokladať, že je funkcia f definovaná v deliacich bodoch a pre jednoduchosť budeme značiť $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

• Obdĺžniková metóda

Integrál aproximujeme integrálnymi súčtami, ktoré geometricky predstavujú obdĺžniky. Z vety 1.2.6 a jej dôsledkov vyplýva, že pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_T(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{f(t_i)(b-a)}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} (f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)). \end{aligned}$$

Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$R_n = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} (f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)) \right| < \varepsilon,$$

t. j. $\int_a^b f(x) dx$ dokážeme vypočítať s ľubovoľnou presnosťou (chybou) $R_n < \varepsilon$.

Ak ako body T volíme ľavé hraničné body deliacich intervalov (obr. 1.2.20), t. j. zvolíme $t_i = x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, potom $f(t_i) = f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a pre odhad integrálu platí:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n y_{i-1} = \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (\text{O}_1)$$

Ak ako T volíme pravé hraničné body intervalov (obr. 1.2.21), analogicky platí:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (\text{O}_p)$$

Ak je funkcia $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ diferencovateľná a má ohraničenú deriváciu, potom pre chybu aproximácie vzorcov (O₁) a (O_p) platí (viď napr. [21, 30]):

$$R_n \leq \delta_1 \frac{(b-a)^2}{n}, \quad \text{pričom } |f'(x)| \leq \delta_1 \text{ pre } x \in \langle a; b \rangle.$$

• **Lichobežníková metóda**

Integrál aproximujeme obsahom lichobežníkov, ktoré sú určené intervalmi $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ (predstavujú výšku) a hodnotami y_{i-1}, y_i (predstavujú základne), t. j. vrcholmi so súradnicami $[x_{i-1}; 0], [x_i; 0], [x_{i-1}; y_{i-1}], [x_i; y_i]$ (obr. 1.2.22). Obsahy uvedených lichobežníkov sa rovnajú $P_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x = \frac{b-a}{2n} (y_{i-1} + y_i), i = 1, 2, \dots, n$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n). \quad (\text{L})$$

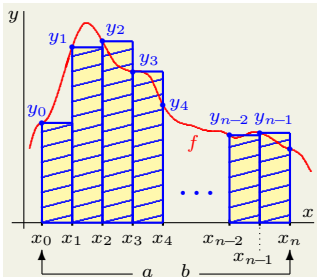
Zo vzťahov $(O_1), (O_p), (\text{L})$ vyplýva:

$$\frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n y_{i-1} + \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n y_{i-1} + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right),$$

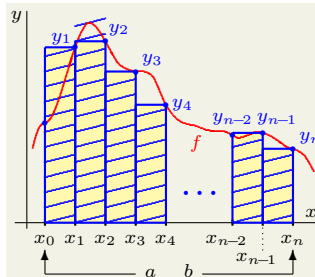
t. j. odhad určený lichobežníkovou metódou (L) sa rovná aritmetickému priemeru odhadov získaných obdĺžnikovými metódami (O_1) a (O_p) . Z toho vyplýva, že aj touto metódou dokážeme integrál aproximovať s ľubovoľnou presnosťou.

Ak je funkcia $f(x), x \in \langle a; b \rangle$ diferencovateľná rádu 2 a má ohraničenú druhú deriváciu, potom pre chybu aproximácie vzorca (L) platí (viď napr. [21, 30]):

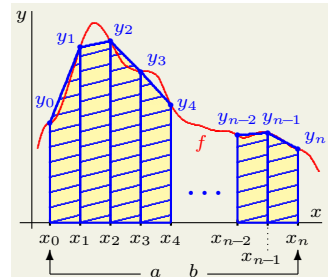
$$R_n \leq \delta_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}, \quad \text{pričom } |f''(x)| \leq \delta_2 \text{ pre } x \in \langle a; b \rangle.$$



Obr. 1.2.20: Obdĺžniková metóda (O_1)



Obr. 1.2.21: Obdĺžniková metóda (O_p)



Obr. 1.2.22: Lichobežníková metóda (L)

• **Simpsonova metóda**

Pri obdĺžnikovej metóde sme funkciu f na každom z intervalov $\langle x_{i-1}; x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n$ nahradili konštantnou funkciou $y = y_{i-1}$, resp. $y = y_i$. Pri lichobežníkovej metóde sme funkciu f na uvedených intervaloch nahradili lineárnou funkciou (úsečkou) spájajúcou body $[x_{i-1}; y_{i-1}]$ a $[x_i; y_i]$. Pri **Simpsonovej metóde**³⁷ potrebujeme páry počet deliacich intervalov, t. j. n musí byť párne. Funkciu f nahrádzame na dvojnásobne dlhších intervaloch $\langle x_{2i-2}; x_{2i} \rangle, i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ kvadratickou funkciou (parabolou), ktorá prechádza bodmi $[x_{2i-2}; y_{2i-2}], [x_{2i-1}; y_{2i-1}], [x_{2i}; y_{2i}]$ (obr. 1.2.24).

³⁷ Thomas Simpson [1710–1761] — anglický matematik a vynálezca.

Na intervale $\langle x_{2i-2}; x_{2i} \rangle$, $i=1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ nahradíme funkciu $f(x)$ kvadratickou funkciou $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Označme $\Delta x = h$. Dĺžka intervalu $\langle x_{2i-2}; x_{2i} \rangle$ je $2h$.

Úlohu si zjednodušíme tak, že pre funkciu $g(x)$, $x \in \langle x_{2i-2}; x_{2i} \rangle$, $i=1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ budeme požadovať, aby bola periodická s periódou $x_{2i} - h = x_{2i-1}$ a budeme ju vyšetřovať na intervale $\langle -h; h \rangle$. Takže budeme požadovať $g(x_{2i-2}) = g(-h) = y_{2i-2}$, $g(x_{2i-1}) = g(0) = x_{2i-1}$, $g(x_{2i}) = g(h) = y_{2i}$. Potom na základe vzťahu (1.10) platí (obr. 1.2.23):

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx &\approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} [\alpha x^2 + \beta x + \gamma] dx = \int_{-h}^h [\alpha x^2 + \beta x + \gamma] dx = \left[\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x \right]_{-h}^h = \\ &= \frac{\alpha h^3}{3} + \frac{\beta h^2}{2} + \gamma h - \frac{\alpha(-h)^3}{3} - \frac{\beta(-h)^2}{2} - \gamma(-h) = \frac{2\alpha h^3}{3} + 2\gamma h = \frac{h}{3}(2\alpha h^2 + 6\gamma). \end{aligned}$$

Ešte musíme vypočítať koeficienty α, β, γ . Platí:

$$\left. \begin{aligned} y_{2i-2} = g(-h) &= \alpha h^2 - \beta h + \gamma \\ y_{2i-1} = g(0) &= \gamma \\ y_{2i} = g(h) &= \alpha h^2 + \beta h + \gamma \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \implies y_{2i-2} + y_{2i} &= 2\alpha h^2 + 2\gamma \\ \implies 2\alpha h^2 + 6\gamma &= y_{2i-2} + y_{2i} + 4\gamma \\ &= y_{2i-2} + y_{2i} + 4y_{2i-1}, \end{aligned}$$

t. j. $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(2\alpha h^2 + 6\gamma) = \frac{b-a}{3n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$, $i=1, 2, \dots, \frac{n}{2}$.

Z toho vyplýva:³⁸

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \right) \approx \frac{b-a}{3n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) = \\ &= \frac{b-a}{3n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \quad (\text{S}) \end{aligned}$$

Ak je funkcia $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ diferencovateľná rádu 4 a má ohraničenú štvrtú deriváciu, potom pre chybu aproximácie **Simpsonovho vzorca** (S) platí (viď napr. [21, 30]):

$$R_n \leq \delta_4 \frac{(b-a)^5}{180n^4}, \quad \text{pričom } |f^{(4)}(x)| \leq \delta_4 \text{ pre } x \in \langle a; b \rangle.$$

Príklad 1.2.14.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,693147.$$

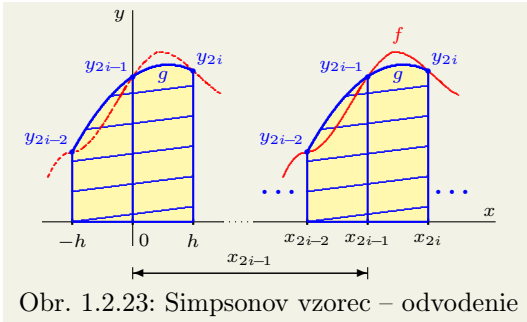
Pre numerický výpočet tohto integrálu použijeme 10 rovnako dlhých deliacich intervalov, t. j. delenie $D = \{1; 1,1; 1,2; \dots; 1,9; 2\} = \left\{1 + \frac{i}{10}\right\}_{i=0}^{10} \subset D_{\langle 1; 2 \rangle}$. Postup a výsledky numerického integrovania pomocou (O₁), (O_p), (L) a (S) sú uvedené v tabuľke 1.2.2.

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1; 2 \rangle$ je spojité, $x_i = 1 + \frac{i}{10} = \frac{10+i}{10}$, $y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{10}{10+i}$, $i=0, 1, 2, \dots, 10$.

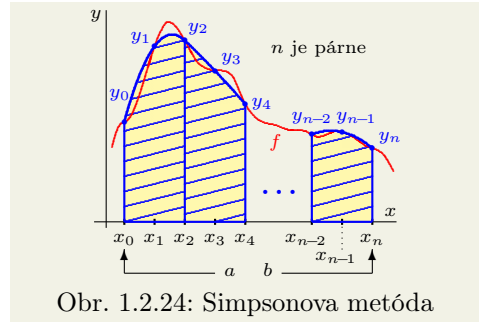
Funkcie $f, f', f'', f''', f^{(4)}$ sú spojité a ohraničené na $\langle 1; 2 \rangle$. Pre všetky $x \in \langle 1; 2 \rangle$ platí:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad |f'(x)| \leq 1 = \delta_1 \implies \text{vzorce (O}_1\text{), (O}_p\text{) majú chybu } R_n \leq 1 \frac{(2-1)^2}{10} = 0,1.$$

³⁸Z geometrie je známy tzv. **univerzálny Simpsonov vzorec**, na výpočet objemu V ľubovoľného kvádra, valca, kužeľa, ihlana, resp. gule a ich častí (kolmých, kosých, zrezaných aj nezrezaných). Má tvar $V = \frac{(P_1 + 4P + P_2)v}{6}$, pričom v je výška telesa, P_1, P_2 sú plošné obsahy dolnej a hornej podstavy ($P_2 = 0$ pre nezrezané teleso), P je plošný obsah stredného rezu (prierez v polovici výšky v).



Obr. 1.2.23: Simpsonov vzorec – odvodenie



Obr. 1.2.24: Simpsonova metóda

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, |f''(x)| \leq 2 = \delta_2 \Rightarrow \text{vzorec (L) má chybu } R_n \leq 2 \frac{(2-1)^3}{12 \cdot 10^2} = 0,001667.$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}, |f^{(4)}(x)| \leq 24 = \delta_4$$

$$\Rightarrow \text{vzorec (S) má chybu } R_n \leq 24 \frac{(2-1)^5}{180 \cdot 10^4} = 0,000013. \blacksquare$$

1.2.5 Nevlastný integrál

Riemannov integrál sme definovali pre ohraničenú funkciu na ohraničenom intervale, preto ho tiež niekedy nazývame **vlastný Riemannov integrál**. V mnohých praktických aplikáciach (matematických, fyzikálnych, technických, ekonomických, ...) sa vyžaduje integrovanie na neohraničenom intervale a mnohokrát aj integrovanie funkcie, ktorá nie je ohraničená. Preto rozšírime pojem Riemannovho integrálu aj na tieto prípady a integrál budeme nazývať **nevlastný**. Nevlastné integrály budeme definovať aj v prípade, keď ich hodnota bude nevlastná, t. j. $\pm\infty$. Najprv uvedieme motivačný príklad.

Príklad 1.2.15.

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c, x \in (0; \infty), c \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

Primitívna funkcia $2\sqrt{x}$ je síce ohraničená na intervale $(0; 1)$, ale problém je v tom, že pôvodná funkcia $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nie je na tomto intervale ohraničená.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0; 1)$ je neohraničená funkcia na ohraničenom intervale (obr. 1.2.25).

$$\varepsilon \in (0; 1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in \langle \varepsilon; 1 \rangle \text{ je ohraničená } \Rightarrow f \in R_{\langle \varepsilon; 1 \rangle} \Rightarrow$$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2 - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2.$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in \langle 1; \infty \rangle$ je ohraničená funkcia na neohraničenom intervale.

$$\varepsilon \in (1; \infty) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in \langle 1; \varepsilon \rangle \text{ je integrovateľná, t. j. } f \in R_{\langle 1; \varepsilon \rangle} \Rightarrow$$

$$\int_1^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^{\varepsilon} = 2\sqrt{\varepsilon} - 2 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_1^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [2\sqrt{\varepsilon} - 2] = \infty.$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c, x \in (0; \infty), c \in \mathbb{R}.$$

	(O ₁)	(O _p)	(L)	(S)
$x_0 = 1, 0$	$y_0 = 1, 000\ 000$	—	$y_0 = 1, 000\ 000$	$y_0 = 1, 000\ 000$
$x_1 = 1, 1$	$y_1 = 0, 909\ 091$	$y_1 = 0, 909\ 091$	$2y_1 = 1, 818\ 182$	$4y_1 = 3, 636\ 364$
$x_2 = 1, 2$	$y_2 = 0, 833\ 333$	$y_2 = 0, 833\ 333$	$2y_2 = 1, 666\ 667$	$2y_2 = 1, 666\ 667$
$x_3 = 1, 3$	$y_3 = 0, 769\ 231$	$y_3 = 0, 769\ 231$	$2y_3 = 1, 538\ 462$	$4y_3 = 3, 076\ 923$
$x_4 = 1, 4$	$y_4 = 0, 714\ 286$	$y_4 = 0, 714\ 286$	$2y_4 = 1, 428\ 571$	$2y_4 = 1, 428\ 571$
$x_5 = 1, 5$	$y_5 = 0, 666\ 667$	$y_5 = 0, 666\ 667$	$2y_5 = 1, 333\ 333$	$4y_5 = 2, 666\ 667$
$x_6 = 1, 6$	$y_6 = 0, 625\ 000$	$y_6 = 0, 625\ 000$	$2y_6 = 1, 250\ 000$	$2y_6 = 1, 250\ 000$
$x_7 = 1, 7$	$y_7 = 0, 588\ 235$	$y_7 = 0, 588\ 235$	$2y_7 = 1, 176\ 471$	$4y_7 = 2, 352\ 941$
$x_8 = 1, 8$	$y_8 = 0, 555\ 556$	$y_8 = 0, 555\ 556$	$2y_8 = 1, 111\ 111$	$2y_8 = 1, 111\ 111$
$x_9 = 1, 9$	$y_9 = 0, 526\ 316$	$y_9 = 0, 526\ 316$	$2y_9 = 1, 052\ 632$	$4y_9 = 2, 105\ 263$
$x_{10} = 2, 0$	—	$y_{10} = 0, 500\ 000$	$y_{10} = 0, 500\ 000$	$y_{10} = 0, 500\ 000$
$\int_1^2 \frac{dx}{x}$	$\Sigma = 7, 187\ 715$	$\Sigma = 6, 687\ 715$	$\Sigma = 13, 875\ 429$	$\Sigma = 20, 794\ 507$
	$\frac{\Sigma}{10} = 0, 718\ 772$	$\frac{\Sigma}{10} = 0, 668\ 772$	$\frac{\Sigma}{20} = 0, 693\ 771$	$\frac{\Sigma}{30} = 0, 693\ 150$
	$\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0, 693\ 147$			
chyba R_n	$R_n \leq 0, 1$	$R_n \leq 0, 1$	$R_n \leq 0, 001\ 667$	$R_n \leq 0, 000\ 013$
skutočná chyba	0, 025 625	0, 024 375	0, 000 624	0, 000 003

Tabuľka 1.2.2: Numerické integrovanie obdĺžnikovou (O₁), (O_p), lichobežníkovou (L) a Simpsonovou (S) metódou

V tomto prípade je aj primitívna funkcia neohraničená na intervale (0; 1). Analogicky ako v prípade a) platí (obr. 1.2.26):

$$\varepsilon \in (0; 1) \Rightarrow \frac{1}{x^2} \in R_{(\varepsilon; 1)}, \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right] = \infty.$$

$$\varepsilon \in (1; \infty) \Rightarrow \frac{1}{x^2} \in R_{(1; \varepsilon)}, \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_1^{\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right] = 1. \blacksquare$$

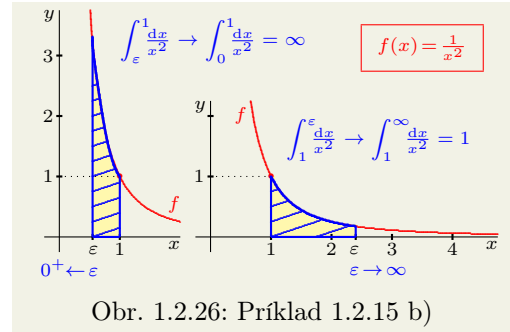
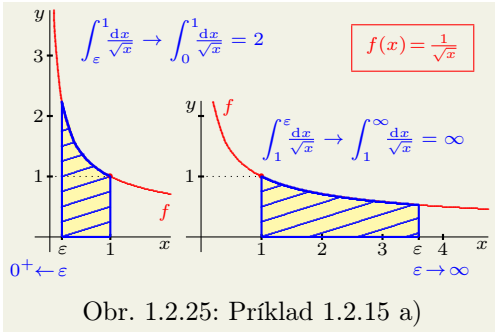
Nech $a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$. Bod $c \in \langle a; b \rangle$ nazývame **singulárny bod funkcie** $f(x)$, $x \in (a; b)$ **vplyvom funkcie**, ak je funkcia f neohraničená v nejakom okolí $O(c)$. Ak je funkcia f definovaná na neohraničenom intervale, potom body ∞ , resp. $-\infty$ nazývame **singulárne body funkcie f vplyvom hranice**.

Ak má funkcia f aspoň jeden singulárny bod $c \in \langle a; b \rangle$, potom $\int_a^b f(x) dx$ sa nazýva **nevlastný integrál (vplyvom funkcie, resp. vplyvom hranice)**.

Aby sme situáciu zbytočne nekomplikovali, budeme predpokladať, že funkcia f má najviac konečný počet singulárnych bodov. Najprv vyšetříme prípad, keď má funkcia f práve jeden singulárny bod na hranici intervalu integrovania. Sú štyri možnosti.

Nevlastné integrály vplyvom hranice:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_a^{\varepsilon} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^b f(x) dx.$$



Nevlastné integrály vplyvom funkcie:

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, & f \text{ je neohraničená v okolí bodu } b, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, & f \text{ je neohraničená v okolí bodu } a. \end{cases}$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x) dx$ **existuje**, $a, b \in \mathbb{R}^*$, ak existuje príslušná limita na pravej strane. V opačnom prípade hovoríme, že $\int_a^b f(x) dx$ **neexistuje**, resp. **osciluje**. Ak je táto limita nevlastná, t. j. $\pm\infty$, potom hovoríme, že $\int_a^b f(x) dx$ **diverguje do $\pm\infty$** . Stručne to zapisujeme $\int_a^b f(x) dx = \pm\infty$, resp. $\int_a^b f(x) dx \mapsto \pm\infty$.

Ak sa táto limita rovná číslu $I \in \mathbb{R}$, potom hovoríme, že $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje k číslu I** a označujeme $\int_a^b f(x) dx = a$, resp. $\int_a^b f(x) dx \mapsto a$.

Ak nevlastný integrál $\int_a^b f(x) dx$ osciluje alebo diverguje do $\pm\infty$, potom hovoríme, že $\int_a^b f(x) dx$ **diverguje** (je **divergentný**) a označujeme $\int_a^b f(x) dx \not\mapsto$. Ak $\int_a^b f(x) dx$ konverguje k číslu a , potom stručne hovoríme, že $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje** (je **konvergentný**)³⁹ a označujeme $\int_a^b f(x) dx \mapsto$.

Poznámka 1.2.4.

V takto definovanom nevlastnom integráli je zachovaná jedna zo základných vlastností Riemannovho integrálu – aditívnosť. Pre ľubovoľnú voľbu $d \in (a; b)$, $a, b \in \mathbb{R}^$ platí:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx,$$

pričom jeden z integrálov na pravej strane je nevlastný a druhý vlastný.

Poznámka 1.2.5.

Pojem nevlastného integrálu môžeme zovšeobecniť aj na vlastný integrál. Riemannov integrál $\int_a^b f(x) dx$ (pokiaľ existuje) sa rovná nejakému reálnemu číslu I . Takže môžeme povedať, že (vlastný) integrál $\int_a^b f(x) dx$ konverguje k číslu I .

³⁹Názvoslovie je analogické ako pri číselných radoch (viď ma1: časť 2.4 Číselné rady, str. 53).

Z predchádzajúcej definície vyplýva, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x) dx$ konverguje práve vtedy, ak je funkcia f riemannovsky integrovateľná na každom z príslušných intervalov $(a; \varepsilon)$, resp. $(\varepsilon; b)$, kde $\varepsilon \in (a; b)$.

Na výpočet nevlastných integrálov môžeme použiť Newton–Leibnizov vzorec. Ak F je primitívna funkcia k f na $(a; b)$, potom platí:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_a^\varepsilon f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [F(x)]_a^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [F(\varepsilon) - F(a)] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} F(\varepsilon) - F(a) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(a) = [F(x)]_a^\infty, \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} \int_\varepsilon^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} [F(x)]_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} [F(a) - F(\varepsilon)] = \\ &= F(a) - \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} F(\varepsilon) = F(a) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = [F(x)]_{-\infty}^b, \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} [F(x)]_a^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} [F(\varepsilon) - F(a)] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} F(\varepsilon) - F(a) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a) = [F(x)]_a^b, \\ \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} [F(x)]_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} [F(b) - F(\varepsilon)] = \\ &= F(b) - \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} F(\varepsilon) = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = [F(x)]_a^b. \end{aligned}$$

Poznámka 1.2.6.

Označenie $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ budeme používať aj pre nevlastné integrály. V singulárnych bodoch bude zápis $F(a)$, resp. $F(b)$ predstavovať príslušnú limitu, napr.:

$$\left[\ln x \right]_0^\infty = \ln \infty - \ln 0^+, \quad \text{t. j.} \quad \left[\ln x \right]_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \infty - (-\infty) = \infty.$$

Ak má $f(x)$, $x \in (a; b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ jeden singulárny bod $c \in (a; b)$ vplyvom funkcie, potom:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú oba integrály⁴⁰ $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^b f(x) dx$. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom $\int_a^b f(x) dx$ **diverguje**.

Ak aspoň jeden z integrálov $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^b f(x) dx$ neexistuje, potom $\int_a^b f(x) dx$ neexistuje. Ak $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^b f(x) dx$ existujú a nekonvergujú, potom ich súčet nemusí mať zmysel a v tom prípade nevlastný integrál $\int_a^b f(x) dx$ neexistuje (príklad 1.2.16).

⁴⁰Jeden z integrálov $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^b f(x) dx$ môže byť vlastný.

(Cauchyho) hlavnou hodnotou integrálu $\int_a^b f(x) dx$ nazývame

$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (1.11)$$

Ak má $f(x)$, $x \in (a; b)$ dva singulárne body $a, b \in R$ vplyvom funkcie, potom:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^d f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_d^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

kde $d \in (a; b)$ je ľubovoľné. Integrál $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú $\int_a^d f(x) dx$, $\int_d^b f(x) dx$. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom $\int_a^b f(x) dx$ **diverguje**.

(Cauchyho) hlavnou hodnotou integrálu $\int_a^b f(x) dx$ nazývame

$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{a+\varepsilon}^d f(x) dx + \int_d^{b-\varepsilon} f(x) dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (1.12)$$

Ak F je primitívna funkcia k f na $(a; b)$, $d \in (a; b)$, potom platí:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = [F(x)]_a^d + [F(x)]_d^b = \\ &= F(d) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(d) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = [F(x)]_a^b, \\ v.p. \int_a^b f(x) dx &\stackrel{(1.12)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [F(x)]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [F(b-\varepsilon) - F(a+\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Ak má $f(x)$, $x \in (-\infty; \infty)$ dva singulárne body $\pm\infty$ vplyvom hranice, potom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^d f(x) dx + \int_d^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^d f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_d^{\varepsilon} f(x) dx,$$

kde $d \in R$ je ľubovoľné.⁴¹ Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú $\int_{-\infty}^d f(x) dx$, $\int_d^{\infty} f(x) dx$. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ **diverguje**.

(Cauchyho) hlavnou hodnotou integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ nazývame

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\int_{-\varepsilon}^d f(x) dx + \int_d^{\varepsilon} f(x) dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx. \quad (1.13)$$

Ak F je primitívna funkcia k f na $(-\infty; \infty)$, $d \in R$, potom platí:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^d f(x) dx + \int_d^{\infty} f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^d + [F(x)]_d^{\infty} = \\ &= F(d) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(d) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = [F(x)]_{-\infty}^{\infty}, \end{aligned}$$

⁴¹Voľba bodu $d \in R$ nemá vplyv na integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ (viď poznámka 1.2.4).

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{(1.13)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [F(x)]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [F(\varepsilon) - F(-\varepsilon)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [F(x) - F(-x)].$$

Priamo z definície a z vlastností limit (mal: veta 3.2.9) vyplýva pre Cauchyho hlavné hodnoty integrálov (1.11), (1.12), (1.13) nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.2.35.

$$a, b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \int_a^b f(x) dx \exists \implies \exists v.p. \int_a^b f(x) dx \text{ a platí } \int_a^b f(x) dx = v.p. \int_a^b f(x) dx.$$

Oba prípady s dvomi singulárnymi bodmi na hraniciach zovšeobecňíme. Ak má $f(x)$, $x \in (a; b)$ dva singulárne body $a, b \in \mathbb{R}^*$ vplyvom funkcie, resp. hranice, potom:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{\varepsilon}^d f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} \int_d^{\varepsilon} f(x) dx,$$

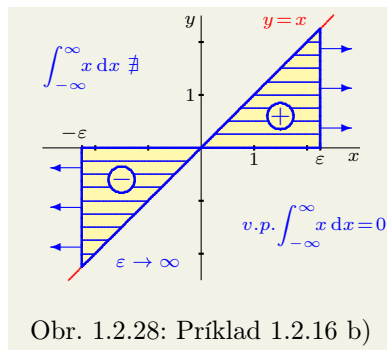
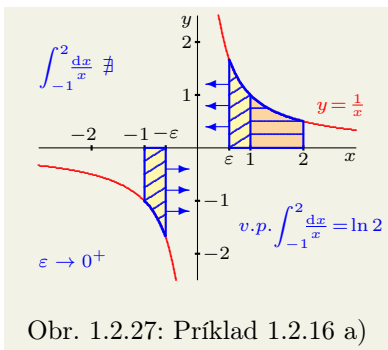
kde $d \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Ak F je primitívna funkcia k f na $(a; b)$, potom platí:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^d + [F(x)]_d^b = [F(x)]_a^b.$$

Príklad 1.2.16.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} &= \left[\begin{array}{l} 0 \dots \text{singulárny bod} \\ \text{vplyvom funkcie} \end{array} \right] = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{-1}^0 + [\ln x]_0^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln|x| - \ln 1 + \ln 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty + 0 - \ln 2 - (-\infty) = -\infty + \infty \dots \nexists. \\ v.p. \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[[\ln|x|]_{-1}^{-\varepsilon} + [\ln x]_{\varepsilon}^2 \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln \varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln 2 - \ln 1] = \ln 2. \end{aligned}$$

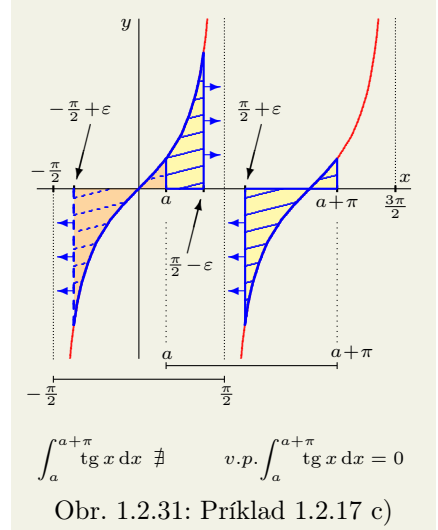
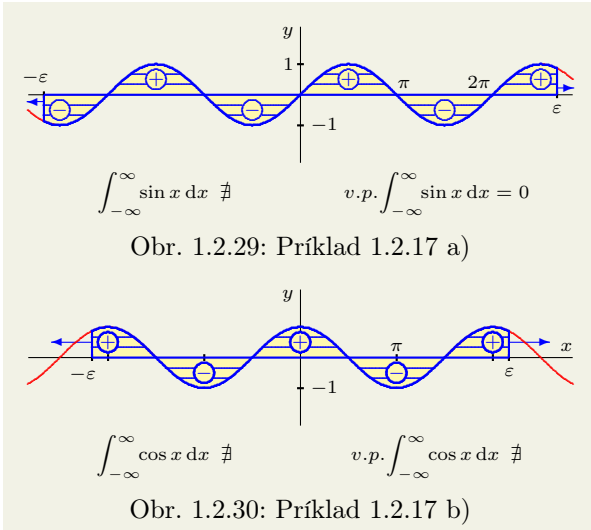
Graficky predstavuje hlavná hodnota uvedeného integrálu plochy dvoch krivočiarych lichobežníkov na $(-1; \varepsilon)$ a $(\varepsilon; 2)$, ktorých súčet je konštantný a rovný $\ln 2$. Neohraničené časti, t. j. krivočiary lichobežníky na $(-\varepsilon; 0)$ a $(0; \varepsilon)$ sa vynulujú (obr. 1.2.27).



$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\infty^2}{2} - \frac{(-\infty)^2}{2} = \infty - \infty \dots \nexists.$$

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \right] = 0.$$

Graficky predstavuje hlavná hodnota uvedeného integrálu plochu krivočiareho lichobežníka s nulovou veľkosťou na $\langle -\varepsilon; \varepsilon \rangle$, $\varepsilon \rightarrow \infty$. Rovnako veľké, ale opačne orientované krivočiare lichobežníky na $\langle -\varepsilon; 0 \rangle$ a $\langle 0; \varepsilon \rangle$ sa eliminujú (obr. 1.2.28). ■



Príklad 1.2.17.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} [-\cos x] - \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\cos x] \dots \nexists$ (obr. 1.2.29).

$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} \sin x, x \in (-\varepsilon; \varepsilon) \text{ je nepárna} \\ \text{príklad 1.2.11} \end{array} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} 0 = 0.$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x \dots \nexists$ (obr. 1.2.30).

$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\sin x \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\sin \varepsilon - \sin(-\varepsilon)] =$
 $= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\sin \varepsilon + \sin \varepsilon] = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sin \varepsilon \dots \nexists.$

c) $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx \dots \nexists, \quad v.p. \int_a^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx = 0$ (obr. 1.2.31).

Funkcia $y = \operatorname{tg} x$ je periodická s periódou π , má nekonečne veľa singulárnych bodov vplyvom funkcie $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Funkcia $y = \operatorname{tg} x, x \in (a; a+\pi)$ má buď dva singulárne body $a, a+\pi$, alebo jeden singulárny bod $c \in (a; a+\pi)$.

$a = -\frac{\pi}{2} + k\pi, a + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sú singulárne body \Rightarrow

$\int_a^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx = \left[\ln |\cos x| \right]_{-\frac{\pi}{2} + k\pi}^{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, |\cos x| \rightarrow 0^+ \\ \ln |\cos x| \rightarrow -\infty \end{array} \right] = -\infty + \infty \dots \nexists.$

$$\begin{aligned} v.p. \int_a^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+k\pi-\varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx = \left[\begin{array}{l} \text{periodickosť} \\ \text{veta 1.2.34} \end{array} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \left[\text{nepárnosť} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 = 0. \end{aligned}$$

$c = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je singulárny bod, $c \in (a; a+\pi) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx &= \int_a^{k\pi-\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx + \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx = \left[\ln |\cos x| \right]_a^{k\pi-\frac{\pi}{2}} + \left[\ln |\cos x| \right]_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{a+\pi} = \\ &= \ln |0| - \ln |\cos a| + \ln |\cos(a+\pi)| - \ln |0| = -\infty - \ln |\cos a| + \ln |\cos(a+\pi)| + \infty \dots \nexists. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v.p. \int_a^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx + \int_{c+\varepsilon}^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx \right] = \left[\text{periodickosť} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{a+\pi}^{c+\pi-\varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx + \int_{c+\varepsilon}^{a+\pi} \operatorname{tg} x \, dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{c+\pi-\varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+k\pi-\varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx = \left[\text{periodickosť} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Ak má $f(x)$, $x \in (a; b)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ konečný počet singulárnych bodov c_1, c_2, \dots, c_k , $k \in \mathbb{N}$, $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq b$, potom platí:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^{c_1} f(x) \, dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) \, dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x) \, dx + \dots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x) \, dx + \int_{c_k}^b f(x) \, dx.$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú všetky integrály na pravej strane. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom $\int_a^b f(x) \, dx$ **diverguje**. Integrály na pravej strane majú jeden alebo dva singulárne body na hraniciach integrovania.⁴²

Poznámka 1.2.7.

V budúcnosti nebudeme rozlišovať medzi zápsmi vlastných a nevlastných integrálov. To znamená, že pri vyšetrowaní integrálu $\int_a^b f(x) \, dx$ musíme najprv nájsť všetky singulárne body funkcie f na intervale $(a; b)$, potom integrál rozdeliť na príslušné nevlastné integrály s jedným, resp. dvomi singulárnymi bodmi, a tie vypočítať.

Nevlastné integrály majú podobné vlastnosti ako vlastné Riemannove integrály. Uvedieme najdôležitejšie z nich (viď veta 1.2.14 a veta 1.2.23 pre vlastné integrály).

Veta 1.2.36.

$a, b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0 \Rightarrow$

a) $\int_a^b f(x) \, dx \mapsto \Leftrightarrow \int_a^b c f(x) \, dx \mapsto$, pričom (pokiaľ existujú): $\int_a^b c f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx$.

b) $\int_a^b f(x) \, dx \mapsto$, $\int_a^b g(x) \, dx \mapsto \Rightarrow \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx \mapsto$,

pričom platí: $\int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx$.

c) $\int_a^b f(x) \, dx \mapsto$, $\int_a^b g(x) \, dx \not\mapsto \Rightarrow \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx \not\mapsto$.

⁴²Ak medzi singulárne body patrí $a \in \mathbb{R}^*$, potom $\int_a^{c_1} f(x) \, dx = \int_a^a f(x) \, dx = 0$. Analogicky pre singulárny bod $b \in \mathbb{R}^*$ platí $\int_{c_k}^b f(x) \, dx = \int_b^b f(x) \, dx = 0$.

Pre súčin fg a absolútnu hodnotu $|f|$ podobné tvrdenie neplatí (príklady 1.2.18, 1.2.27).

Príklad 1.2.18.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{pr. 1.2.15}}{=} [2\sqrt{x}]_0^1 = 2, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = 0 + \infty = \infty. \\ \text{b) } & \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\pi}^0 \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\right) dx + \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\right) dx \stackrel{\text{pr. 1.2.5 d}}{=} \\ & = \left[x \sin \frac{1}{x}\right]_{-\pi}^0 + \left[x \sin \frac{1}{x}\right]_0^{\pi} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} - (-\pi) \sin\left(-\frac{1}{\pi}\right) + \pi \sin \frac{1}{\pi} - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = \\ & = \left[x \neq 0 \Rightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0\right] = 0 - \pi \sin \frac{1}{\pi} + \pi \sin \frac{1}{\pi} - 0 = 0. \\ \text{c) } & \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x\right]_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \blacksquare \end{aligned}$$

Z predchádzajúcich úvah a z poznámky 1.2.4 vyplýva nasledujúca veta.

Veta 1.2.37 (Aditívnosť nevlastného integrálu).

$$a, b \in \mathbb{R}^*, c \in (a; b) \implies \int_a^b f(x) dx \mapsto \iff \int_a^c f(x) dx \mapsto, \int_c^b f(x) dx \mapsto,$$

pričom (pokiaľ integrály existujú) platí: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Metóda per partes (veta 1.2.31) a substitučná metóda (veta 1.2.33) sa môžu účinne používať aj pri výpočte nevlastných integrálov. Pri týchto metódach sa môže niekedy nevlastný integrál previesť na vlastný.

Veta 1.2.38 (Metóda per partes pre nevlastné integrály).

$a, b \in \mathbb{R}^*$, u, v, u', v' sú spojité na $(a; b)$

$$\implies (\text{pokiaľ existujú}) \int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Veta 1.2.39 (Metóda substitúcie pre nevlastné integrály).

$a, b \in \mathbb{R}^*$, $x = \varphi(t): J \rightarrow (a; b)$ je spojitá, J je interval s hranicami α, β , $\varphi'(t) \neq 0$ pre $t \in J$,
 $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \varphi(t) = a$, $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = b$ pre $\alpha < \beta$, resp. $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} \varphi(t) = a$, $\lim_{t \rightarrow \beta^+} \varphi(t) = b$ pre $\alpha > \beta$

$$\implies (\text{pokiaľ existujú}) \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Príklad 1.2.19.

Vypočítajte $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Riešenie.

$$I_0 = \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = 0 + 1 = 1 = 0!.$$

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\begin{array}{l} u = x^n \\ v' = e^{-x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = nx^{n-1} \\ v = -e^{-x} \end{array} \right] = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} \text{ma! veta 3.2.12} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \end{array} \right] = \\ &= -0 + 0^n \cdot e^0 + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \dots = n! I_0 = n!. \blacksquare \end{aligned}$$

Príklad 1.2.20.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^1 \ln x \, dx &= \left[u = \ln x \mid u' = \frac{1}{x} \right]_{v' = 1} = \left[x \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 dx = 1 \cdot \ln 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - \int_0^1 dx = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \right] = - \int_0^1 dx = - \left[x \right]_0^1 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \left[x = \operatorname{tg} t \text{ je spojitá, rastúca, } (\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{\cos^2 t} > 0, t \in (0; \frac{\pi}{2}), dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \right] = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \stackrel{\text{pr. 1.1.14 b)}}{=} \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{\pi}{4} - 0 - 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^\pi \frac{dx}{\cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{\cos x} = \left[\text{UGS: } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x = 2 \operatorname{arctg} t, \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, dx = \frac{2 dt}{t^2+1} \right] = \\ &= \int_0^1 \frac{2 dt}{1-t^2} + \int_1^\infty \frac{2 dt}{1-t^2} = - \int_0^1 \frac{2 dt}{t^2-1} - \int_1^\infty \frac{2 dt}{t^2-1} = - \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_0^1 - \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_1^\infty = \\ &= - \left[\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln \frac{1-t}{1+t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \frac{1-t}{1+t} \right] - \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{t-1}{t+1} - \lim_{t \rightarrow 1^+} \ln \frac{t-1}{t+1} \right] = \\ &= - \left[\ln 0^+ - \ln 1 \right] - \left[\ln 1 - \ln 0^+ \right] = \infty - 0 + 0 - \infty \dots \neq. \blacksquare \end{aligned}$$

Výpočet nevlastných integrálov býva častokrát problematický, pretože okrem vlastného integrálu musíme vypočítať aj limitu. Nevlastné integrály vyskytujúce sa v praxi (najmä technickej) bývajú zložité a málokedy sa dajú vypočítať presne. Vtedy ich nahrádzame vlastnými, ktorých hranice integrovania sa „veľmi nelíšia“ od pôvodných, t. j. ich rozdiel je dostatočne malý, aby chyba výpočtu bola v tolerancii. Ak nedokážeme tieto vlastné integrály vypočítať presne, použijeme niektorú z numerických metód.

Aby sme nepočítali zbytočne, je dobré vedieť, či daný nevlastný integrál konverguje alebo diverguje. Taktiež niekedy nepotrebujeme poznať súčet nevlastného integrálu, ale nám postačí iba informácia o jeho konvergentnosti. Uvedieme niekoľko kritérií, pomocou ktorých vyšetríme konvergenciu nevlastných integrálov.

Obmedzíme sa na prípady, keď sú singulárne body na hraniciach integrovania. Ak je singulárnych bodov viac, musíme kritéria aplikovať na každý čiastkový integrál zvlášť.

Veta 1.2.40 (Porovnávacie kritérium).

$a, b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in (a; b)$,

singulárne sú iba body a , resp. $b \implies$ (pokiaľ existujú)

$$\text{a) } \int_a^b f(x) \, dx = \infty \implies \int_a^b g(x) \, dx = \infty, \quad \text{b) } \int_a^b g(x) \, dx \text{ } \mapsto \implies \int_a^b f(x) \, dx \text{ } \mapsto.$$

Dôkaz.

Nech a je singulárnym bodom vplyvom hranice, resp. funkcie (pre b je dôkaz analogický).

$$\text{a) } \infty = \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b f(x) \, dx \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b g(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx \implies \int_a^b g(x) \, dx = \infty.$$

$$\text{b) } \int_a^b g(x) \, dx \text{ } \mapsto I_g, \int_a^b f(x) \, dx \exists, \text{ t. j. } \int_a^b f(x) \, dx \text{ } \mapsto \text{ (tvrdenie vety) alebo } \int_a^b f(x) \, dx = \infty.$$

$$\text{Nech } \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b f(x) \, dx = \infty \implies$$

$$\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{\varepsilon}^b g(x) dx = \int_a^b g(x) dx = I_g < \infty, \text{ t. j. spor. } \blacksquare$$

Je zrejmé, že ak existuje $\int_a^b f(x) dx = \infty$, potom existuje aj $\int_a^b g(x) dx = \infty$. Ale ak existuje a konverguje $\int_a^b g(x) dx$, potom $\int_a^b f(x) dx$ nemusí existovať (príklad 1.2.21).

Existenciu nevlastného integrálu nezápornej funkcie $f(x) \geq 0$ na intervale $(a; b)$ nám zaručí napríklad jej spojitosť alebo monotónnosť. Nech $\varepsilon \in (a; b)$:

1. Ak b je singulárny bod, potom $f \in R_{(a; \varepsilon)}$, funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t) dt \geq 0, x \in (a; \varepsilon)$ je neklesajúca (dôsledok 1.2.25.a), t. j. hodnota výrazu $G_h(\varepsilon) = \int_a^{\varepsilon} f(t) dt \geq 0$ sa pre $\varepsilon \rightarrow b^-$ zväčšuje a existuje $\lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} G_h(\varepsilon) = \int_a^b f(x) dx$ (vlastná alebo $+\infty$).
2. Ak a je singulárny bod, potom $f \in R_{(\varepsilon; b)}$, funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t) dt \geq 0, x \in (\varepsilon; b)$ je nerastúca (dôsledok 1.2.25.a), t. j. hodnota $G_d(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^b f(t) dt \geq 0$ sa pre $\varepsilon \rightarrow a^+$ zväčšuje a existuje $\lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} G_d(\varepsilon) = \int_a^b f(x) dx$ (vlastná alebo $+\infty$).

Dôsledok 1.2.40.a.

$a, b \in R^*, h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in (a; b)$, singulárne sú iba body a , resp. b ,

$$\int_a^b h(x) dx \mapsto, \int_a^b g(x) dx \mapsto \implies (\text{pokiaľ existuje}) \int_a^b f(x) dx \mapsto.$$

Dôkaz.

Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $x \in (a; b)$ platí $0 \leq f(x) - h(x) \leq g(x) - h(x)$.

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx \mapsto, \int_a^b g(x) dx \mapsto &\xrightarrow{\text{veta 1.2.36}} \int_a^b [g(x) - h(x)] dx \mapsto \implies (\text{pokiaľ existuje}) \\ \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \mapsto &\xrightarrow{\text{veta 1.2.36}} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x) + g(x)] dx \mapsto. \blacksquare \end{aligned}$$

Príklad 1.2.21.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0; 1), f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \cap (0; 1), \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0; 1) - Q. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \text{ (príklad 1.2.15), } 0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ pre všetky } x \in (0; 1), \text{ ale } \int_0^1 f(x) dx \nexists.$$

$$\varepsilon \in (0; 1) \Rightarrow \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 0 dx = 0, \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 f(x) dx \nexists. \blacksquare$$

Príklad 1.2.22.

a) $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx \mapsto$. Predpoklady vety 1.2.40 sú splnené: 0 je jediný singulárny bod,

$\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}, x \in (0; 1)$ je spojitá, t. j. $\exists \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx, 0 \leq \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ pre $x \in (0; 1), \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx \mapsto$. ∞ je singulárny bod, $\frac{\sin^2 x}{e^x}, x > 0$ je spojitá, t. j. $\exists \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx,$

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \text{ pre } x \in (0; \infty), \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x} = \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = e^0 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1.$$

c) $\int_0^1 \cotg x dx = \infty$. 0 je jediný singulárny bod,

$$x \in (0; 1) \Rightarrow \cos x \text{ je rastúca, } x < \sin x \text{ (ma1: príklad 4.3.5)} \Rightarrow \\ \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} \geq \frac{\cos 1}{\sin 1} \geq \frac{1}{x}, \int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = \infty. \blacksquare$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje absolútne** (označenie $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{a}$), ak konverguje $\int_a^b |f(x)| dx$. Nevlastný integrál $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje relatívne** (označenie $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{r}$), ak $\int_a^b f(x) dx$ konverguje a $\int_a^b |f(x)| dx$ diverguje, t. j. $\int_a^b |f(x)| dx = \infty$.

Veta 1.2.41.

$$\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{a} \Rightarrow (\text{pokiaľ existuje}) \int_a^b f(x) dx \xrightarrow{r}, \text{ pričom } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Dôkaz.

Tvrdenie vety vyplýva z dôsledku 1.2.40.a a z nerovnosti $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. \blacksquare

Ako dokazuje nasledujúci príklad, nevlastný integrál môže konvergovať absolútne a pritom nemusí existovať, ale ak existuje, potom konverguje.

Príklad 1.2.23.

Označme $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in \mathbb{Q} \cap (0; 1), \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0; 1) - \mathbb{Q}. \end{cases}$ Potom $|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0; 1)$.

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \text{ (príklad 1.2.15)} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \xrightarrow{a}. \text{ Ale } \int_0^1 f(x) dx \nexists.$$

$$\varepsilon \in (0; 1) \Rightarrow \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = -\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\varepsilon} - 2, \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx \nexists. \blacksquare$$

Veta 1.2.42 (Limitné porovnávacie kritérium).

$a, b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, funkcie f, g sú definované na $(a; b)$, $g(x) > 0$ pre všetky $x \in (a; b)$, a [resp. b] je jediný singulárny bod, existuje vlastná $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ [resp. $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$]

$$\Rightarrow (\text{pokiaľ existujú}) \int_a^b f(x) dx \xrightarrow{r} \iff \int_a^b g(x) dx \xrightarrow{r}.$$

Dôkaz.

Vetu dokážeme pre singulárny bod a . Pre singulárny bod b je dôkaz analogický.

$$PP_{\Leftarrow}: \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \pm\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{ma1: veta 3.2.2}} \exists c \in (a; b) \text{ tak, že } \frac{f}{g} \text{ je na } (a; c) \text{ ohraničená.}$$

$$\Rightarrow \exists p > 0 \text{ tak, že pre všetky } x \in (a; c) \text{ platí } -p \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq p \Rightarrow -pg(x) \leq f(x) \leq pg(x).$$

$$\int_a^b g(x) dx \xrightarrow{r} \Rightarrow \int_a^c g(x) dx \xrightarrow{r} \Rightarrow \pm \int_a^c pg(x) dx \xrightarrow{r} \Rightarrow \int_a^c f(x) dx \xrightarrow{r},$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ pričom } \int_c^b f(x) dx \text{ je vlastný } \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \xrightarrow{r}.$$

$$NP_{\Rightarrow}: \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = q \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \pm\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{ma1: veta 3.2.2, dôsledok 3.2.7.a}}$$

$\exists c \in (a; b)$ tak, že $\frac{f}{g}$ je na $(a; c)$ ohraničená a kladná (pre $q > 0$), resp. záporná (pre $q < 0$).

$$\Rightarrow \exists p > 0 \text{ tak, že pre všetky } x \in (a; c) \text{ platí } -p \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq p \text{ a navyše } f(x) > 0, \text{ resp. } f(x) < 0,$$

t. j. $-pf(x) \leq g(x) \leq pf(x)$ pre $q > 0$, resp. $pf(x) \leq g(x) \leq -pf(x)$ pre $q < 0$. Zvyšok dôkazu je analogický ako pri postačujúcej podmienke. ■

Príklad 1.2.24.

a) $\int_0^1 \cotg(\sqrt{x^2+1}-1) dx = \infty$. Predpoklady vety 1.2.42 sú splnené:

$f(x) = \cotg(\sqrt{x^2+1}-1)$, $g(x) = \frac{1}{x} > 0$, $x \in (0; 1)$ majú jediný singulárny bod 0,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cotg(\sqrt{x^2+1}-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin(\sqrt{x^2+1}-1)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \cos(\sqrt{x^2+1}-1) \right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

b) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \infty$. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \frac{1}{x} > 0$, $x \in (1; \infty)$ majú singulárny bod ∞ ,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_1^\infty = \ln \infty - \ln 1 = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

Príklad 1.2.25.

$x \in (0; \infty)$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^p} = \int x^{-p} dx = \begin{cases} \ln x + c, & \text{pre } p = 1, \\ \frac{x^{1-p}}{1-p} + c = \frac{-1}{(p-1)x^{p-1}} + c, & \text{pre } p \neq 1. \end{cases}$

$$p > 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}} \right]_0^1 = \frac{-1}{1-p} - \frac{-1}{0^+} = \infty, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}} \right]_1^\infty = \frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{p-1} = \frac{1}{p-1}.$$

$$p = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = \infty, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_1^\infty = \ln \infty - \ln 1 = \infty.$$

$$p < 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_0^1 = \frac{1}{1-p} - 0 = \frac{1}{1-p}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^\infty = \infty - \frac{1}{1-p} = \infty. \blacksquare$$

• **Vzťah medzi nevlastnými integrálmi a číselnými radmi**

Nech $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je nekonečný číselný rad s reálnymi členmi a_n , $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme po častiach konštantnú funkciu $f(x)$, $x \in \langle 1; \infty \rangle$ definovanú predpisom (obr. 1.2.32):

$$f(x) = a_n, \quad x \in \langle n; n+1 \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

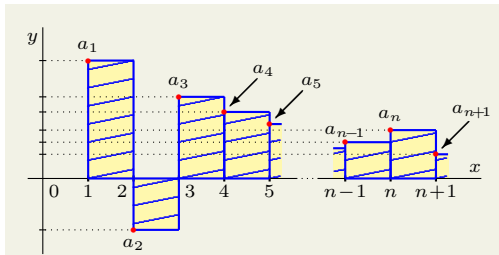
Integrál $\int_1^\infty f(x) dx$ predstavuje plochu, ktorá sa rovná súčtu obsahov obdĺžnikov so základňami $(n+1)-1 = 1$ a výškami a_n , t. j. súčtu plôch a_n . To znamená, že platí:

$$\int_1^\infty f(x) dx = \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

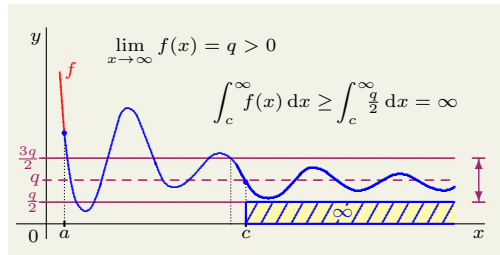
Ak číselný rad $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje, potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (ma1: veta 2.4.1). Pre nevlastné integrály vplyvom hranice platí analogická nutná podmienka konvergencie. V niektorých prípadoch dokážeme vyšetriť konvergenciu číselného radu pomocou vhodne zvoleného nevlastného integrálu (tzv. integrálne kritérium) alebo naopak.

Veta 1.2.43 (Nutná podmienka konvergencie nevlastného integrálu).

$a, b \in \mathbb{R}^*$, $\int_a^\infty f(x) dx \mapsto \left[\text{resp. } \int_{-\infty}^b f(x) dx \mapsto \right]$



Obr. 1.2.32: Vzťah medzi číselnými radmi a nevlastnými integrálmi



Obr. 1.2.33: Nesplnená nutná podmienka konvergencie nevlastného integrálu

$$\implies (\text{pokiaľ existuje}) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ [resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{]}.$$

Dôkaz.

Dokážeme sporom. Nech $\int_a^\infty f(x) dx \mapsto, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q > 0$.

mal: veta 3.2.1 \implies Existuje⁴³ $c > a$ tak, že pre $x \in (c; \infty)$ platí $|f(x) - q| < \frac{q}{2}$, t. j. $\frac{q}{2} < f(x)$.

Potom (porovnávacie kritérium 1.2.40) dostaneme spor ($\int_a^c f(x) dx$ je vlastný):

$$\int_c^\infty f(x) dx \geq \int_c^\infty \frac{q}{2} dx = \left[\frac{qx}{2} \right]_c^\infty = \infty \implies \int_a^\infty f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx = \infty.$$

Ostatné prípady pre $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < 0$, resp. pre $\int_{-\infty}^b f(x) dx \mapsto$ sa dokážu analogicky. ■

Ako dokazuje nasledujúci príklad, integrál $\int_a^\infty f(x) dx$ môže konvergovať a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ nemusí existovať. Ale ak existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$, potom $\int_a^\infty f(x) dx$ diverguje.

Príklad 1.2.26.

a) Nech $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in N, \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (1; \infty) - N, \end{cases}$ potom $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ neexistuje, ale $\int_1^\infty f(x) dx = 1$.

$\varepsilon > 1 \implies f(x) = \frac{1}{x^2}$ pre všetky⁴⁴ $x \in (1; \varepsilon)$ (o.k.p.) $\xrightarrow{\text{veta 1.2.21}} f \in R_{(1; \varepsilon)}$,

$$\int_1^\varepsilon f(x) dx = \int_1^\varepsilon \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 \implies \int_1^\infty f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon} \right] = 1.$$

$x \in N \implies f(x) = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$
 $x \notin N \implies f(x) = \frac{1}{x^2} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \dots \nexists$

b) $\int_6^\infty f(x) dx = \int_6^\infty \frac{2x^4 - 3x^2 - x}{x^4 + x^2 + 1} dx = \infty$, pričom ∞ je jediný singulárny bod.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \xrightarrow{\text{neplatí nutná podmienka konvergencie}} \int_6^\infty f(x) dx$ diverguje.

⁴³ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in R$ tak, že pre všetky $x > \delta$ platí $|f(x) - q| < \varepsilon$, t. j. v našom prípade $\varepsilon = \frac{q}{2}$, $\delta = c$.

⁴⁴Rovnosť neplatí pre prirodzené čísla — na každom intervale $(1; \varepsilon)$ ich je konečný počet.

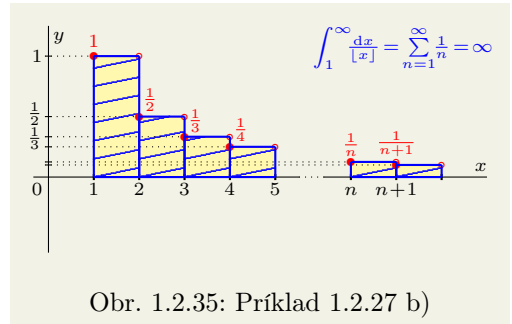
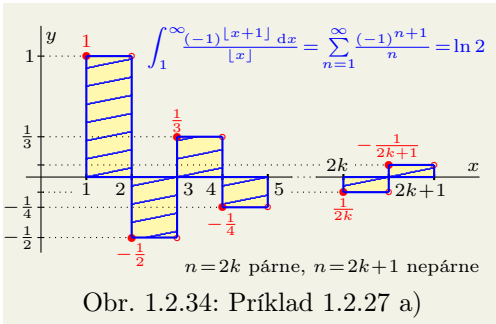
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \xrightarrow{\text{mal: veta 3.2.1}}$ Existuje $c > 4$ tak, že pre všetky $x > c$ platí $|f(x) - 2| < 1$.

\implies pre všetky $x > c$ platí $1 < f(x) < 3 \xrightarrow{\text{veta 1.2.40}} \infty = \int_6^\infty dx \leq \int_6^\infty f(x) dx$. ■

Príklad 1.2.27.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^\infty \frac{(-1)^{\lfloor x+1 \rfloor}}{\lfloor x \rfloor} dx &= \int_1^2 \frac{(-1)^2}{1} dx + \int_2^3 \frac{(-1)^3}{2} dx + \int_3^4 \frac{(-1)^4}{3} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} dx + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left[\int_n^{n+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} dx \right] = \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_n^{n+1} dx \right] = \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} [x]_n^{n+1} \right] = \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} (n+1 - n) \right] = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow{\text{mal: príklad 2.4.21}} \ln 2 \in \mathbb{R} \text{ (obr. 1.2.34)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_1^\infty \frac{dx}{\lfloor x \rfloor} &= \int_1^2 \frac{dx}{1} + \int_2^3 \frac{dx}{2} + \dots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{n} + \dots = \sum_{n=1}^\infty \left[\int_n^{n+1} \frac{dx}{n} \right] = \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n} \int_n^{n+1} dx \right] = \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n} [x]_n^{n+1} \right] = \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n} (n+1 - n) \right] = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{mal: príklad 2.4.5}} \infty \text{ (obr. 1.2.35)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Veta 1.2.44 (Integrálne kritérium konvergencie číselných radov).

$f(x), x \in \langle 1; \infty \rangle$ je nerastúca, nezáporná, $a_n = f(n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N} \implies$

$$\int_1^\infty f(x) dx \longmapsto \iff \sum_{n=1}^\infty a_n \longmapsto.$$

Dôkaz.

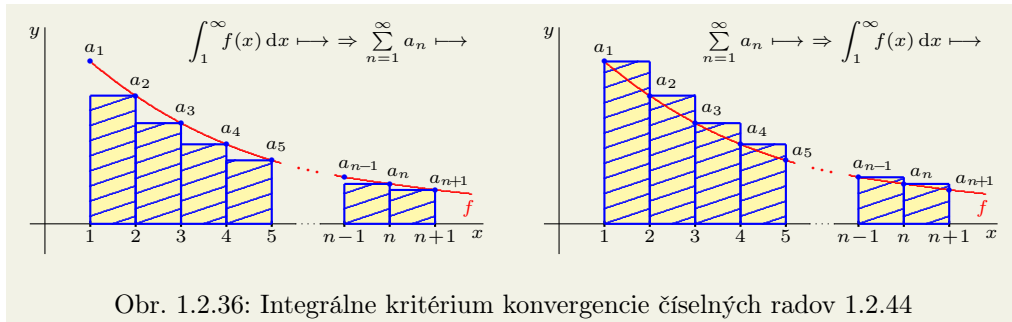
$NP \Rightarrow:$ $g(x) = a_{n+1}, x \in \langle n; n+1 \rangle$ pre $n \in \mathbb{N}$ (obr. 1.2.36 vľavo) $\Rightarrow \int_1^\infty g(x) dx = \sum_{n=2}^\infty a_n$.

$0 \leq g(x) \leq f(x)$ pre všetky $x \in \langle 1; \infty \rangle$, $\int_1^\infty f(x) dx \xrightarrow{\text{veta 1.2.40}}$

$$\int_1^\infty g(x) dx = \sum_{n=2}^\infty a_n \longmapsto \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n \longmapsto.$$

$PP \Leftarrow:$ $g(x) = a_n, x \in \langle n; n+1 \rangle$ pre $n \in \mathbb{N}$ (obr. 1.2.36 vpravo) $\Rightarrow \int_1^\infty g(x) dx = \sum_{n=1}^\infty a_n$.

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in \langle 1; \infty \rangle$, $\sum_{n=1}^\infty a_n \longmapsto \xrightarrow{\text{veta 1.2.40}} \int_1^\infty f(x) dx \longmapsto$. ■



1.2.6 Aplikácie Riemannovho integrálu

Z geometrického hľadiska predstavuje Riemannov určitý integrál (vlastný i nevlastný) plochu krivočiareho lichobežníka. To znamená, že určitý integrál môžeme použiť na výpočet obsahov rovinných útvarov. Pomocou Riemannovho integrálu môžeme vypočítať nielen obsahy týchto útvarov, ale aj ich obvody, statické momenty, prípadne ťažiská. Tiež môžeme vypočítať objemy a povrchy telies, ktoré vzniknú ich rotáciou v priestore.

Obmedzíme sa na odvodenie vzorcov pre ohraničené rovinné plochy a ohraničené priestorové telesá. Tieto vzorce ostanú v platnosti aj pre neohraničené objekty, ale budú mať tvar nevlastných integrálov.

Vo všeobecnosti môžeme plochy v rovine ohraničiť grafmi reálnych funkcií alebo krivkami. Názorne si môžeme krivku predstaviť ako (obvykle spojitú) čiaru v rovine s určitými vlastnosťami, napr. ako dráhu nejakého pohybu hmotného bodu. Matematicky môžeme krivku v rovine definovať viacerými spôsobmi. Najčastejšie sa vyjadrujú parametricky.

Explicitne krivku f vyjadrujeme ako graf spojitej funkcie jednej reálnej premennej $y = f(x)$, $x \in I$, resp. $x = f(y)$, $y \in I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, t. j. ako množinu bodov $\{[x; f(x)] ; x \in \mathbb{R}\}$, resp. množinu bodov $\{[f(y); y] ; y \in \mathbb{R}\}$. **Implicitne** môžeme vyjadriť **krivku** f ako množinu bodov⁴⁵ $\{[x; y] \in \mathbb{R}^2 ; F(x, y) = 0\}$, pričom $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

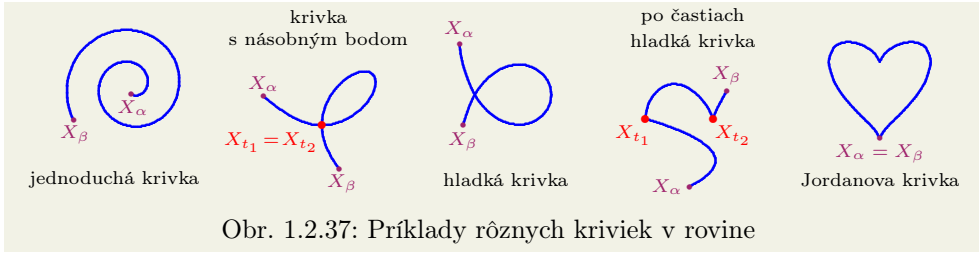
Množina⁴⁵ $f = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 ; x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J\}$, pričom $\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie a J je interval, sa nazýva **parametrické vyjadrenie krivky** f . Jednotlivé body krivky f označme pre $t \in J$ symbolom $X_t = [\varphi(t); \psi(t)]$.

Ak pre $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$ platí $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, potom hovoríme, že sa **krivka** f **pretína v bode** $X_{t_1} = X_{t_2}$, ktorý nazývame **násobný bod**. Ak $X_{t_1} \neq X_{t_2}$ pre všetky $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$ (nikde sa nepretína, t. j. nemá násobné body), potom sa krivka f nazýva **jednoduchá**.

Ak $J = \langle \alpha ; \beta \rangle$ je uzavretý interval, potom $X_\alpha = [\varphi(\alpha); \psi(\alpha)]$ sa nazýva **počiatočný bod** a $X_\beta = [\varphi(\beta); \psi(\beta)]$ sa nazýva **koncový bod krivky** f . Krivka f nazýva **uzavretá**, ak platí $X_\alpha = X_\beta$. Ak je krivka f uzavretá a jednoduchá na intervale $\langle \alpha ; \beta \rangle$, potom sa nazýva **jednoduchá uzavretá** alebo **Jordanova krivka**.

Krivka f sa nazýva **hladká na** J , ak sú funkcie φ' , ψ' spojité na J a pre všetky $t \in J$

⁴⁵Je to analogické ako pri implicitnej, resp. parametrickej definícii funkcie (ma1: str. 73), ale pri krivke môže byť priradených jednému vzoru x viaceru obrazov y .



Obr. 1.2.37: Príklady rôznych kriviek v rovine

platí⁴⁶ $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$, t. j. $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$. Hladká krivka má v každom bode dotyčnicu, pričom v krajných bodoch má jednostranné dotyčnice.

Krivka f sa nazýva **po častiach hladká**, ak je hladká na každom intervale $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, t. j. $\{t_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha; \beta \rangle}$. Po častiach hladká krivka má dotyčnicu v každom bode okrem konečného počtu, kde má jednostranné dotyčnice. Funkcie φ', ψ' sú po častiach spojité na J a spojité na $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

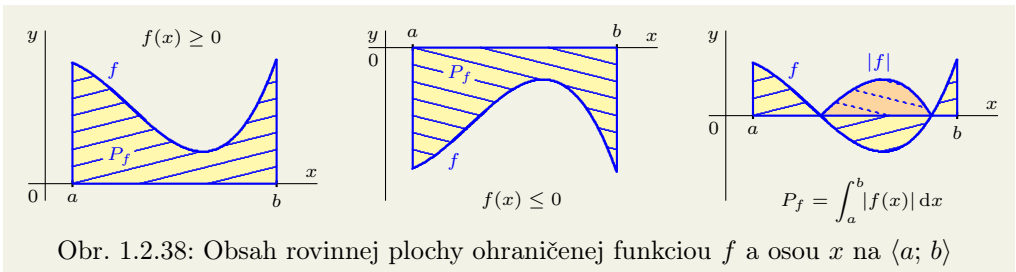
• **Obsah rovinnej plochy**

Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciou, resp. krivkou je vždy kladný. Pre obsah plochy P_f ohraničenej funkciou $f \in R_{\langle a; b \rangle}$ a osou x na intervale $\langle a; b \rangle$ platí:

$$0 \leq f(x) \Rightarrow P_f = \{[x; y]; x \in \langle a; b \rangle, 0 \leq y \leq f(x)\} = \int_a^b f(x) dx.$$

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow P_f = P_{-f} = \int_a^b [-f(x)] dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Vo všeobecnosti pre $f \in R_{\langle a; b \rangle}$ platí (obr. 1.2.38): $P_f = P_{|f|} = \int_a^b |f(x)| dx$.



Obr. 1.2.38: Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciou f a osou x na $\langle a; b \rangle$

Pre obsah plochy $P_{f-g} = \{[x; y]; x \in \langle a; b \rangle, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ohraničenej funkciami $f, g \in R_{\langle a; b \rangle}$, pričom $g(x) \leq f(x)$ pre $x \in \langle a; b \rangle$, platí (obr. 1.2.39):

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \Rightarrow P_{f-g} = P_f - P_g = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx,$$

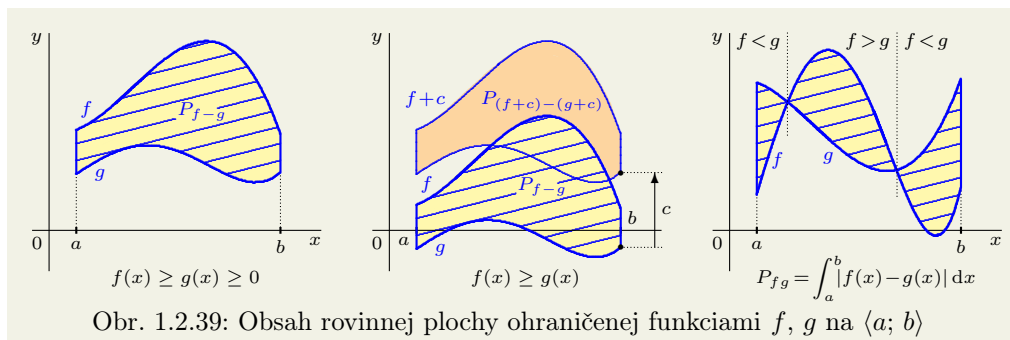
$$g(x) \leq f(x) \Rightarrow \text{existuje}^{47} c > 0 \text{ tak, aby } 0 \leq g(x) + c \leq f(x) + c, x \in \langle a; b \rangle$$

⁴⁶V krajných bodoch intervalu J sa myslia jednostranné derivácie.

⁴⁷Plocha sa nezmení, iba sa posunie o hodnotu c v kladnom smere osi y .

$$\implies P_{f-g} = P_{(f+c)-(g+c)} = \int_a^b [(f(x)+c) - (g(x)+c)] dx = \int_a^b [f(x)-g(x)] dx.$$

Všeobecne pre $f, g \in R_{\langle a; b \rangle}$ platí (obr. 1.2.39 vpravo): $P_{fg} = P_{|f-g|} = \int_a^b |f(x)-g(x)| dx$.



Obr. 1.2.39: Obsah rovinatej plochy ohraničenej funkciami f, g na $\langle a; b \rangle$

Nech je funkcia $f \in R_{\langle a; b \rangle}$ parametrizovaná spojitými funkciami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, pričom α, β sú hraničné body J . Nech $\varphi'(t) > 0$ (φ je rastúca, $\alpha < \beta$), resp. $\varphi'(t) < 0$ (φ je klesajúca, $\beta < \alpha$) na J . Potom (ma1: veta 3.1.5) φ je prostá na J a existuje $t = \varphi^{-1}(x) : \langle a; b \rangle \rightarrow J$, t. j. $y = f(x) = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$. Pre obsah plochy P_f ohraničenej funkciou f a osou x platí:⁴⁸

$$P_f = \int_a^b |f(x)| dx = \left[\text{subst. } \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix} \right] = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)| dt.$$

Vo všeobecnosti, ak je $f : x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$, $\alpha < \beta$ jednoduchá po častiach hladká uzavretá krivka, potom pre plochu P_f ohraničenú touto krivkou platí:

$$P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |\psi(t) \cdot \varphi'(t)| dt.$$

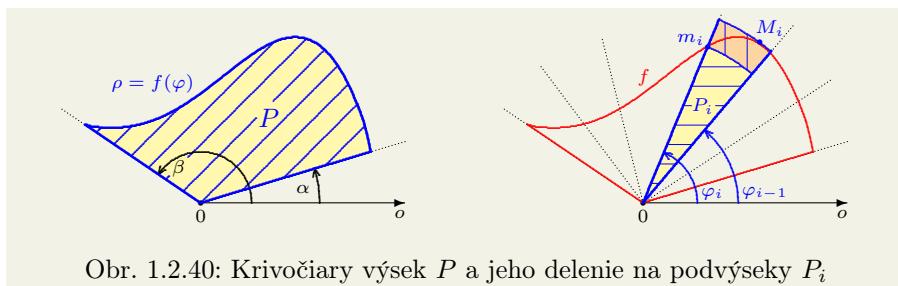
Pre niektoré aplikácie je výhodnejšie, keď je funkcia, resp. krivka f zadaná **v polárnych súradniciach**. V tomto prípade budeme predpokladať, že explicitné vyjadrenie má tvar $f = \{[\varphi; \rho] \in R^2; \rho = f(\varphi)\}$, resp. $f = \{[\varphi; \rho] \in R^2; \varphi = f(\rho)\}$.

Medzi karteziánskymi a polárnymi súradnicami platia vzťahy (ma1: str. 74): $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\rho \in (0; \infty)$, $\varphi \in R$, resp. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\rho}$ pre $\rho \neq 0$.

Ak je krivka f zadaná v polárnych súradniciach rovnicou $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in J$, kde J je interval, potom ju môžeme vyjadriť v karteziánskych súradniciach **v parametrickom tvare**: $f = \{[x; y] \in R^2; x = f(\varphi) \cdot \cos \varphi, y = f(\varphi) \cdot \sin \varphi, \varphi \in J\}$.

Plochu v polárnych súradniciach, ktorá je ohraničená polpriamkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ a po častiach spojitou funkciou $\rho = f(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ (obr. 1.2.40 vľavo), t. j. $P = \{[x; y] \in R^2; x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle, 0 \leq \rho \leq f(\varphi)\}$, nazývame **krivočiarý výsek** určený funkciou f a polpriamkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

⁴⁸ $P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \varphi'(t) dt = -\int_\beta^\alpha |\psi(t)| \varphi'(t) dt = \int_\beta^\alpha |\psi(t)| (-\varphi'(t)) dt = \int_\beta^\alpha |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \varphi'(t) dt$ pre φ klesajúcu, $P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \varphi'(t) dt$ pre φ rastúcu.

Obr. 1.2.40: Krivočiary výsek P a jeho delenie na podvýseky P_i

Delenie $D = \{\varphi_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle\alpha;\beta\rangle}$, $n \in \mathbb{N}$ rozdelí krivočiary výsek P na n krivočiarych výsekov P_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ohraničených polpriamkami $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$ (obr. 1.2.40 vpravo). Pre $i = 1, 2, \dots, n$ označme

$$m_i = \min \{f(\varphi); \varphi \in \langle\varphi_{i-1}; \varphi_i\rangle\}, \quad M_i = \max \{f(\varphi); \varphi \in \langle\varphi_{i-1}; \varphi_i\rangle\}.$$

Každú z plôch P_i môžeme odhadnúť zdola a zhora kruhovými výsekami s polomerami m_i a M_i a stredovým uhlom $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Pre plochu P potom platí:⁴⁹

$$\frac{S_D(f^2, D)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2 \Delta\varphi_i}{2} \leq P \leq \sum_{i=1}^n \frac{M_i^2 \Delta\varphi_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{S_H(f^2, D)}{2}.$$

Uvedené vzťahy predstavujú dolné a horné Riemannove integrálne súčty funkcie $f^2(\varphi)$, $\varphi \in \langle\alpha; \beta\rangle$. Keďže $f^2 \in R_{\langle\alpha; \beta\rangle}$, potom pre obsah krivočiareho výseku P platí:

$$P = \frac{1}{2} \sup \{S_D(f^2, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle\alpha; \beta\rangle}\} = \frac{1}{2} \inf \{S_H(f^2, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle\alpha; \beta\rangle}\} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi.$$

Príklad 1.2.28.

Určte obsah plochy P ohraničenej funkciou $y = \sin x$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a osou x .

Riešenie.

$$P = \int_0^{2\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0.$$

Uvedený postup je **nesprávny**, pretože (obr. 1.2.41) na $\langle \pi; 2\pi \rangle$ je funkcia $\sin x$ záporná. Správne riešenie je nasledujúce:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} + \left[\cos x \right]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4. \blacksquare \end{aligned}$$

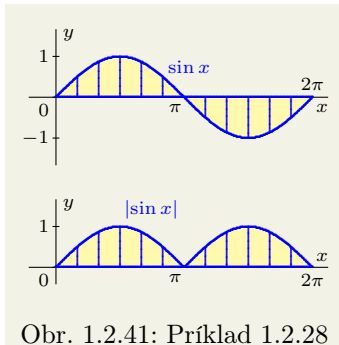
Príklad 1.2.29.

Odvoďte vzorec pre obsah P kruhu K s polomerom $r > 0$.

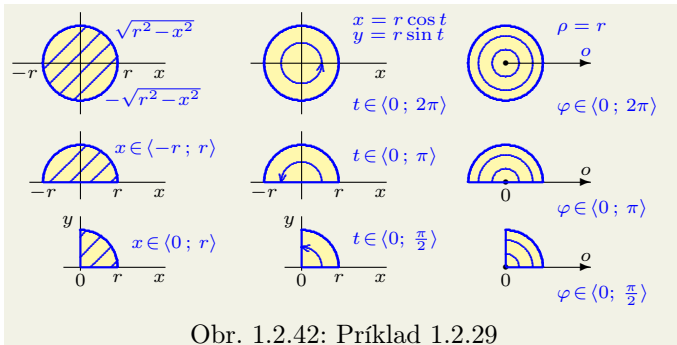
Riešenie.

a) Explicitne (obr. 1.2.42 vľavo) je kruh K ohraničený funkciami $\pm\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r; r \rangle$.

⁴⁹Obsah kruhového výseku so stredovým uhlom φ a polomerom ρ sa rovná hodnote $\pi\rho^2 \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\rho^2\varphi}{2}$.



Obr. 1.2.41: Príklad 1.2.28



Obr. 1.2.42: Príklad 1.2.29

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})] dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{\text{pr. 1.1.24}}{=} \\ &= 2 \left[\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} \right]_{-r}^r = 2 \left[\frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{r^2}{2} \cdot \frac{-\pi}{2} - 0 \right] = \pi r^2. \end{aligned}$$

b) Parametricky (obr. 1.2.42 stred) je kruh K ohraničený uzavretou jednoduchou krivkou $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in (0; 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \int_0^{2\pi} |r \cos t \cdot [r \sin t]'| dt = \int_0^{2\pi} |r^2 \cos^2 t| dt = r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \stackrel{\text{pr. 1.1.36}}{=} \\ &= r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = r^2 \left[\frac{2\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right] = \pi r^2. \end{aligned}$$

c) V polárnych súradniciach (obr. 1.2.42 vpravo) je kruh K ohraničený konštantnou funkciou $\rho = r$, $\varphi \in (0; 2\pi)$.

$$\Rightarrow P = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \pi r^2. \blacksquare$$

Poznámka 1.2.8.

Obsah kruhu P môžeme taktiež vypočítať ako dvojnásobok polkruhu, resp. štvornásobok štvrtkruhu (obr. 1.2.42):

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_0^{\pi} r^2 \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{r^2}{2} d\varphi, \\ \text{resp. } P &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} d\varphi. \end{aligned}$$

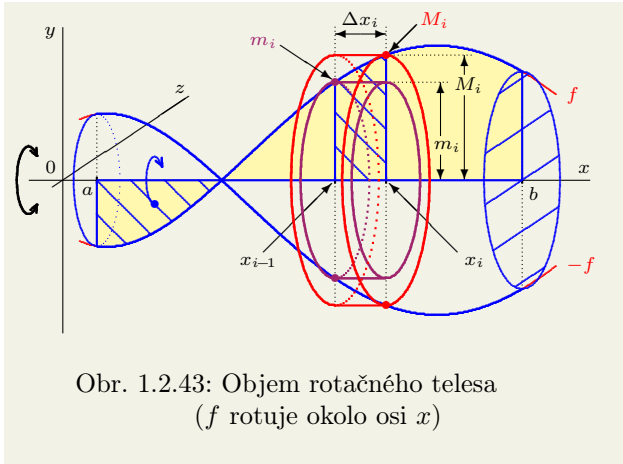
• Objem rotačného telesa — krivka rotuje okolo osi x

Nech $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je po častiach spojitá funkcia. Plocha ohraničená funkciou f , osou x a intervalom $\langle a; b \rangle$ leží v rovine xy . Ak ju necháme rotovať okolo osi x , vznikne v priestore xyz rotačné teleso (obr. 1.2.43).⁵⁰ Určíme objem V_x tohto rotačného telesa.

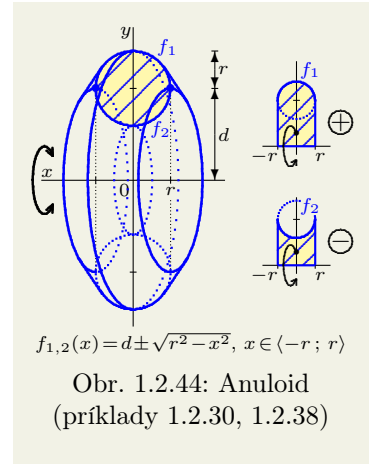
Uvažujme delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre $i = 1, 2, \dots, n$ označme

$$m_i = \min \{|f(x)|; x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}, \quad M_i = \max \{|f(x)|; x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\}.$$

⁵⁰Z obrázku je tiež zrejme, že nezáleží na tom, či je funkcia f kladná alebo záporná. Pri rotácii funkcií f , $-f$, resp. $|f|$ vznikne rovnaké teleso.



Obr. 1.2.43: Objem rotačného telesa
(f rotuje okolo osi x)



Obr. 1.2.44: Anuloid
(príklady 1.2.30, 1.2.38)

Každý z objemov⁵¹ V_i , $i = 1, 2, \dots, n$ môžeme ohraničiť objemami valcov s výškou Δx_i a s polormi podstáv m_i a M_i , t. j. objemami $\pi m_i^2 \Delta x_i$ a $\pi M_i^2 \Delta x_i$. Potom platí:

$$\begin{aligned} \pi S_D(f^2, D) &= \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \pi m_i^2 \Delta x_i \leq V_x = \sum_{i=1}^n V_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 \Delta x_i = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i = \pi S_H(f^2, D). \end{aligned}$$

Vyššie uvedené vzťahy predstavujú dolné a horné Riemannove integrálne súčty funkcie $|f(x)|^2 = f^2(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$. Keďže $f^2 \in R_{\langle a; b \rangle}$, potom pre objem V_x platí:

$$V_x = \pi \cdot \sup \{ S_D(f^2, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \} = \pi \cdot \inf \{ S_H(f^2, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Nech je funkcia $f \in R_{\langle a; b \rangle}$ parametrizovaná spojitými funkciami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, pričom $\varphi'(t) > 0$ ($J = \langle \alpha; \beta \rangle$, φ je rastúca), resp. $\varphi'(t) < 0$ ($J = \langle \beta; \alpha \rangle$, φ je klesajúca) na J . Potom je φ prostá a existuje $t = \varphi^{-1}(x) : \langle a; b \rangle \rightarrow J$, t. j. $y = f(x) = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$. Pre objem rotačného telesa V_x platí:⁵²

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \left[\text{subst. } \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix} \right] = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt.$$

Vo všeobecnosti pre funkciu $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ (φ, ψ sú spojité, $\varphi'(t) > 0$, resp. $\varphi'(t) < 0$) a ňou určený objem rotačného telesa V_x (okolo osi x) platí:

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \cdot |\varphi'(t)| dt.$$

⁵¹ V_i , $i = 1, 2, \dots, n$ vznikne rotáciou funkcie $f(x)$, $x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$ okolo osi x .

⁵² $V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt = -\pi \int_{\beta}^{\alpha} \psi^2(t) \varphi'(t) dt = \pi \int_{\beta}^{\alpha} \psi^2(t) (-\varphi'(t)) dt = \pi \int_{\beta}^{\alpha} \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt$ pre klesajúcu, $V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt$ pre φ rastúcu.

Príklad 1.2.30.

Vypočítajte objem anuloidu⁵³ s polomerami $d \pm r$, $d \geq r > 0$.

Riešenie.

Anuloid vznikne rotáciou kružnice s polomerom r okolo priamky vzdalenej od jej stredu o hodnotu d (obr. 1.2.44). Jeho objem vypočítame ako rozdiel objemov telies, ktoré vzniknú rotáciami polkružníc $f_1(x) = d + \sqrt{r^2 - x^2}$ a $f_2(x) = d - \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r; r \rangle$ okolo osi x . Platí:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r f_1^2(x) dx - \pi \int_{-r}^r f_2^2(x) dx = \pi \int_{-r}^r (d + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-r}^r (d - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \\ &= \pi \int_{-r}^r (d^2 + 2d\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2) dx - \pi \int_{-r}^r (d^2 - 2d\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2) dx = \\ &= \pi \int_{-r}^r 4d\sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = rx, \quad x = -r \Rightarrow t = -1 \\ dt = r dx, \quad x = r \Rightarrow t = 1 \end{array} \right] = 4\pi d \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - r^2 t^2} r dt = \\ &= 4\pi d r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt \stackrel{\text{pr. 1.2.10 a)}}{=} 4\pi d r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 d r^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Príklad 1.2.31.

Odvoďte vzorec pre objem V gule G s polomerom $r > 0$ (obr. 1.2.45).

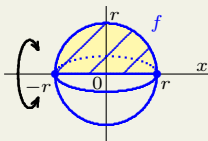
Riešenie.

a) Guľa G vznikne rotáciou polkružnice $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r; r \rangle$ okolo osi x :

$$V = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

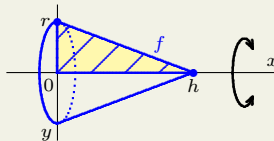
b) V parametrickom tvare má polkružnica f tvar $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$ a platí:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi (r \sin t)^2 \cdot |(r \cos t)'| dt = \pi \int_0^\pi r^2 \sin^2 t \cdot |-r \sin t| dt = \pi r^3 \int_0^\pi \sin^3 t dt = \\ &= \pi r^3 \int_0^\pi \frac{3 \sin t - \sin 3t}{4} dt = \pi r^3 \left[-\frac{3 \cos t}{4} + \frac{\cos 3t}{4 \cdot 3} \right]_0^\pi = \pi r^3 \left[-\frac{-3}{4} + \frac{-1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \right] = \frac{4\pi r^3}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$



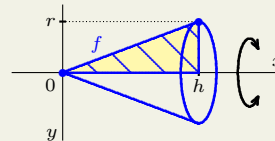
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \langle -r; r \rangle$$

Obr. 1.2.45: Objem gule



$$f(x) = r - \frac{r}{h}x, \quad x \in \langle 0; h \rangle$$

Obr. 1.2.46: Objem kužeľa (príklad 1.2.32)



$$f(x) = \frac{r}{h}x, \quad x \in \langle 0; h \rangle$$

⁵³Anuloid je teleso, ktoré má tvar plávajúceho kolesa, resp. pneumatiky.

Príklad 1.2.32.

Určte objem rotačného kužeľa s polomerom podstavy $r > 0$ a výškou $h > 0$.

Riešenie.

a) Daný kužeľ (obr. 1.2.46 vľavo) vznikne rotáciou trojuholníka s vrcholmi $[0; 0]$, $[h; 0]$, $[0; r]$, t. j. úsečky $f(x) = r - \frac{r}{h}x = \frac{r}{h}(h-x)$, $x \in \langle 0; h \rangle$ okolo osi x . Pre jeho objem platí:

$$V = \pi \int_0^h \left[\frac{r}{h}(h-x) \right]^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (x-h)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{(x-h)^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[0 - \frac{-h^3}{3} \right] = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

b) Daný kužeľ vznikne (obr. 1.2.46 vpravo) taktiež rotáciou trojuholníka s vrcholmi $[0; 0]$, $[h; 0]$, $[h; r]$, t. j. úsečky $f(x) = \frac{r}{h}x$, $x \in \langle 0; h \rangle$ okolo osi x . Pre objem platí:

$$V = \pi \int_0^h \left[\frac{r}{h}x \right]^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{h^3}{3} - 0 \right] = \frac{\pi r^2 h}{3}. \blacksquare$$

• **Objem rotačného telesa — krivka rotuje okolo osi y**

Nech $f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$, $a \geq 0$ je po častiach spojitá funkcia. Plocha ohraničená funkciou f , osou x a intervalom $\langle a; b \rangle$ leží v rovine xy (v polovine $x \geq 0$). Ak ju necháme rotovať okolo osi y , vznikne v priestore xyz rotačné teleso (obr. 1.2.47). Určíme jeho objem V_y .

Uvažujme delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre $i = 1, 2, \dots, n$ označme

$$m_i = \min \{ |f(x)|; x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle \}, \quad M_i = \max \{ |f(x)|; x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle \}.$$

Každý z objemov⁵⁴ V_i , $i = 1, 2, \dots, n$ môžeme ohraničiť zdola objemom medzivalcia s výškou m_i a zhora objemom medzivalcia s výškou M_i s totožnými polermi podstáv x_{i-1} a x_i , t. j. objemami $\pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)m_i$ a $\pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)M_i$. Pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí:

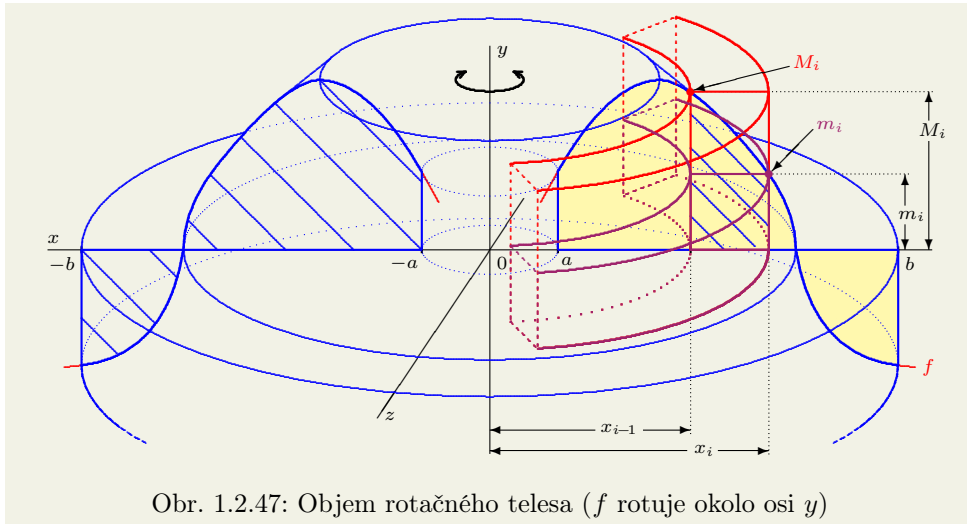
$$\begin{aligned} 2x_{i-1}\Delta x_i &\leq x_i^2 - x_{i-1}^2 = (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = (x_i + x_{i-1})\Delta x_i \leq 2x_i\Delta x_i. \\ \implies 2\pi S_D(xf, D) &= 2\pi \sum_{i=1}^n x_{i-1}m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)m_i \leq V_y = \\ &= \sum_{i=1}^n V_i \leq \sum_{i=1}^n \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)M_i = 2\pi \sum_{i=1}^n x_iM_i\Delta x_i = 2\pi S_H(xf, D). \end{aligned}$$

Uvedené vzťahy predstavujú dolné a horné Riemannove integrálne súčty funkcie $x|f(x)|$, $x \in \langle a; b \rangle$. Keďže $x|f| \in R_{\langle a; b \rangle}$, potom pre objem rotačného telesa V_y platí:

$$V_y = 2\pi \cdot \sup \{ S_D(x|f|, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \} = 2\pi \cdot \inf \{ S_H(x|f|, D); D \in \mathfrak{D}_{\langle a; b \rangle} \} = 2\pi \int_a^b |f(x)| dx.$$

Nech je funkcia $f \in R_{\langle a; b \rangle}$ parametrizovaná spojitými funkciami $x = \varphi(t) \geq 0$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, pričom $\varphi'(t) > 0$ ($J = \langle \alpha; \beta \rangle$, φ je rastúca), resp. $\varphi'(t) < 0$ ($J = \langle \beta; \alpha \rangle$, φ je klesajúca) na J . Potom je φ prostá a existuje $t = \varphi^{-1}(x) : \langle a; b \rangle \rightarrow J$, t. j. $y = f(x) = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, $x \in I$. Pre objem rotačného telesa V_y platí:⁵⁵

⁵⁴ V_i , $i = 1, 2, \dots, n$ vznikne rotáciou funkcie $f(x)$, $x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$ okolo osi y .
⁵⁵ $V_y = -2\pi \int_{\beta}^{\alpha} \varphi(t) |\psi(t)| \varphi'(t) dt = 2\pi \int_{\beta}^{\alpha} \varphi(t) |\psi(t)| (-\varphi'(t)) dt = 2\pi \int_{\beta}^{\alpha} \varphi(t) |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)| dt$ pre klesajúcu φ a $V_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) |\psi(t)| \varphi'(t) dt = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)| dt$ pre φ rastúcu.

Obr. 1.2.47: Objem rotačného telesa (f rotuje okolo osi y)

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx = \left[\begin{array}{l} \text{subst. } x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right] = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t) |\psi(t)| \varphi'(t) dt.$$

Vo všeobecnosti pre funkciu $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ (φ , ψ sú spojité, $\varphi'(t) > 0$, resp. $\varphi'(t) < 0$) a ňou určený objem rotačného telesa V_y (okolo osi y) platí:

$$V_y = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t) |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)| dt = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t) |\psi(t) \varphi'(t)| dt.$$

Príklad 1.2.33.

a) Objem gule s polomerom $r > 0$ (viď príklad 1.2.31) môžeme vypočítať ako dvojnásobok objemu polgule, ktorá vznikne rotáciou štvrtkružnice $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle 0; r \rangle$ okolo osi y (obr. 1.2.48). Pre objem V gule platí:

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot 2\pi \int_0^r x \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} -x^2 = t \quad | \quad x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ -2x dx = dt \quad | \quad x = r \Rightarrow t = -r^2 \end{array} \right] = -2\pi \int_0^{-r^2} \sqrt{r^2 + t} dt = \\ &= -2\pi \int_0^{-r^2} (t+r^2)^{\frac{1}{2}} dt = -2\pi \left[\frac{(t+r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{-r^2} = -\frac{4\pi}{3} [0 - r^3] = \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

V parametrickom tvare má štvrtkružnica f tvar $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ a platí:

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos t |r \sin t \cdot (r \cos t)'| dt = 4\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} \sin t = u \quad | \quad t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \cos t dt = du \quad | \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \end{array} \right] = 4\pi r^3 \int_0^1 u^2 du = 4\pi r^3 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = 4\pi r^3 \left[\frac{1}{3} - 0 \right] = \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

b) Rotačný kužeľ s polomerom podstavy $r > 0$ a výškou $h > 0$ vznikne rotáciou trojuholníka s vrcholmi $[0; 0]$, $[r; 0]$, $[0; h]$, t. j. úsečky $f(x) = h - \frac{h}{r}x = \frac{h}{r}(r - x)$, $x \in \langle 0; r \rangle$ okolo osi y (obr. 1.2.49). Pre jeho objem platí:

$$V = 2\pi \int_0^r x \frac{h}{r}(r-x) dx = \frac{2\pi h}{r} \int_0^r (xr-x^2) dx = \frac{2\pi h}{r} \left[\frac{x^2 r}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{2\pi h}{r} \left[\frac{r^3}{2} - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{\pi r^2 h}{3}. \blacksquare$$

Príklad 1.2.34.

Určte objem telesa V , ktoré vznikne rotáciou úsečky $y = 2-x, x \in \langle 0; 4 \rangle$ okolo osi y .

Riešenie.

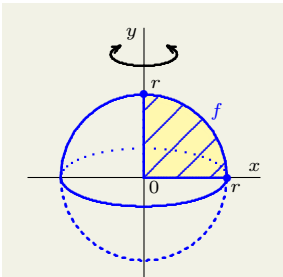
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 x |2-x| dx = 2\pi \int_0^2 x(2-x) dx + 2\pi \int_2^4 x(x-2) dx = \\ &= 2\pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^4 = 2\pi \left[4 - \frac{8}{3} \right] + 2\pi \left[\frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 4 \right] = 16\pi. \end{aligned}$$

Iné riešenie.

Rotáciou vznikne teleso zložené z kužeľa a z dutého valca s chýbajúcou časťou v tvare zrezaného kužeľa (obr. 1.2.50). Kužeľ vznikne rotáciou úsečky $y = 2-x, x \in \langle 0; 2 \rangle$, má výšku 2, polomer podstavy 2 a objem $V_1 = \frac{2^2 \cdot 2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$.

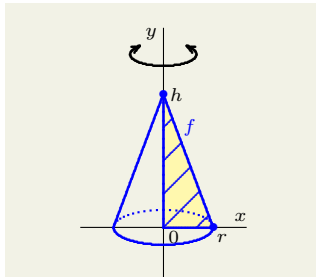
Dutý valec vznikne rotáciou úsečky $y = 2-x, x \in \langle 2; 4 \rangle$, má výšku 2, polomery podstáv 2, resp. 4 a objem $V_2 = V_2' - V_2'' = \frac{96\pi}{3} - \frac{56\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$, pričom $V_2' = 4^2 \cdot 2\pi = \frac{96\pi}{3}$ je objem valca a $V_2'' = \frac{4^2 \cdot 4\pi}{3} - \frac{2^2 \cdot 2\pi}{3} = \frac{56\pi}{3}$ je objem chýbajúceho zrezaného kužeľa (pôvodný kužeľ: výška 4, polomer podstavy 4, odrezaný kužeľ: výška 2, polomer podstavy 2).

$$\implies V = V_1 + V_2 = \frac{8\pi}{3} + \frac{40\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi. \blacksquare$$



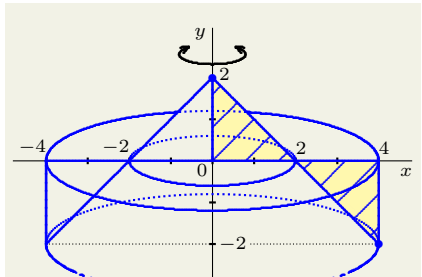
$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in \langle 0; r \rangle$$

Obr. 1.2.48: Objem gule (príklad 1.2.33 a)



$$f(x) = h - \frac{h}{r}x, x \in \langle 0; h \rangle$$

Obr. 1.2.49: Objem kužeľa (príklad 1.2.33 b)



$$f(x) = 2 - x, x \in \langle 0; 4 \rangle$$

Obr. 1.2.50: Objem telesa (príklad 1.2.34)

• **Dĺžka krivky**

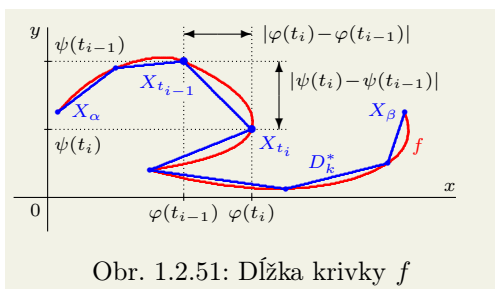
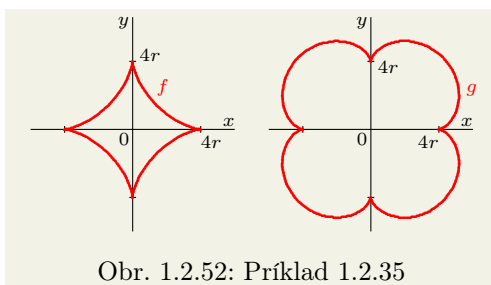
Nech $f: x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ je po častiach hladká krivka, $D = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{D}_{\langle \alpha; \beta \rangle}$, $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta, n \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné delenie. Označme $|X_{t_{i-1}} X_{t_i}|, i = 1, 2, \dots, n$ dĺžku úsečky, ktorá spája body $X_{t_{i-1}}, X_{t_i}$. **Dĺžkou krivky f** nazývame hodnotu:⁵⁶

$$d(f) = \sup \{d(X_D); D \in \mathcal{D}_{\langle \alpha; \beta \rangle}\}, \quad \text{kde } d(X_D) = \sum_{i=1}^n |X_{t_{i-1}} X_{t_i}|.$$

⁵⁶ $d(X_D)$ je dĺžka lineárnej lomenej krivky X_D , ktorá je zložená z úsečiek postupne spájajúcich body $X_{t_i}, i = 0, 1, \dots, n$ (obr. 1.2.51).

Dĺžka krivky f je nezávislá na jej vyjadrení a so zvolenou presnosťou ju môžeme aproximovať hodnotou $d(X_D)$, pričom $D \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha; \beta \rangle}$.

Uvažujme po častiach hladkú krivku $f: x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha; \beta \rangle$. Označme hraničné body intervalov, na ktorých je f hladká postupne $t_0^* = \alpha < t_1^* < t_2^* < \dots < t_{n-1}^* < t_n^* = \beta$, $n \in \mathbb{N}$. Je zrejmé, že $D^* = \{t_i^*\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha; \beta \rangle}$.

Obr. 1.2.51: Dĺžka krivky f 

Obr. 1.2.52: Príklad 1.2.35

Označme $D_k^* = \{\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{k}; i = 0, 1, \dots, k\} \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha; \beta \rangle}$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$. Uvažujme zjemnenie $D_k = D^* \cup D_k^* = \{t_i\}_{i=0}^l$, $k \in \mathbb{N}$. Delenia D^* a D_k majú spoločné minimálne dva body⁵⁷ $t_0^* = \alpha + \frac{0(\beta-\alpha)}{k} = \alpha$, $t_n^* = \alpha + \frac{k(\beta-\alpha)}{k} = \beta$, t. j. $l \in \{k, k+1, \dots, k+n-1\}$. Navyše platí $\mu(D_k) \leq \frac{\beta-\alpha}{k}$, t. j. $\mu(D_k) \rightarrow 0$ pre $k \rightarrow \infty$. To znamená, že postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ je normálna a pre dĺžku krivky f platí $d(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(X_{D_k})$. Pre dĺžku lineárnej lomenej krivky D_k , $k \in \mathbb{N}$ (obr. 1.2.51) platí:

$$d(D_k) = \sum_{i=1}^l |X_{t_{i-1}} X_{t_i}| = \sum_{i=1}^l \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}.$$

Na $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, l$ sú pre funkcie φ, ψ splnené predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3). Potom existujú $\tau_i, \bar{\tau}_i \in (t_{i-1}; t_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$ také, že $\varphi'(\tau_i) = \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{\Delta t_i}$, $\psi'(\bar{\tau}_i) = \frac{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})}{\Delta t_i}$, kde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Potom platí:

$$d(D_k) = \sum_{i=1}^l \Delta t_i \sqrt{\left[\frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right]^2 + \left[\frac{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right]^2} = \sum_{i=1}^l \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2}. \quad (1.14)$$

Predtým ako budeme pokračovať, dokážeme najskôr jedno pomocné tvrdenie.

Lema 1.2.45.

Pre ľubovoľné $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí nerovnosť $|\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b^2}| \leq |c - b|$.

Dôkaz.

Pre $b = c$ je nerovnosť splnená triviálne.

Nech $b < c$ (pre $b > c$ je dôkaz analogický). Funkcia $g(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, $x \in \langle b; c \rangle$ spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3), je spojitá a pre všetky

⁵⁷Môžu mať spoločné aj niektoré iné body.

$x \in (c; b)$ existuje $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Potom existuje $s \in (b; c)$ také, že platí:

$$g'(s) = \frac{g(c)-g(b)}{c-b}, \text{ t. j. } \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}}{c-b} \implies$$

$$\frac{|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}|}{|c-b|} = \left| \frac{\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}}{c-b} \right| = \left| \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} \right| = \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{a^2+s^2}} \leq 1. \blacksquare$$

Položme $a = \varphi'(\tau_i)$, $c = \psi'(\bar{\tau}_i)$, $b = \psi'(\tau_i)$ pre $i = 1, 2, \dots, l$. Potom pre $i = 1, 2, \dots, l$ platí:

$$\left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \leq |\psi'(\bar{\tau}_i) - \psi'(\tau_i)|.$$

Funkcia ψ' je po častiach spojitá na $\langle \alpha; \beta \rangle$, je spojitá a teda aj rovnomerne spojitá na intervaloch $\langle \alpha; t_1^* \rangle$, $\langle t_1^*; t_2^* \rangle$, $\langle t_2^*; t_3^* \rangle$, \dots , $\langle t_{n-1}^*; \beta \rangle$. Potom pre každé $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} > 0$ existuje $\delta > 0$ a tiež $k \in N$ tak, že pre všetky $|t - \bar{t}| < \frac{\beta - \alpha}{k} \leq \delta$ platí $|\psi'(t) - \psi'(\bar{t})| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} = \varepsilon_0$. Keďže⁵⁸ $\tau_i, \bar{\tau}_i \in (t_{i-1}; t_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$, t. j. $|\tau_i - \bar{\tau}_i| < t_i - t_{i-1} < \frac{\beta - \alpha}{k} \leq \delta$, potom platí:

$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^l \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} - \sum_{i=1}^l \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^l \Delta t_i \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^l \Delta t_i |\psi'(\bar{\tau}_i) - \psi'(\tau_i)| < \sum_{i=1}^l \Delta t_i \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{i=1}^l \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} (\beta - \alpha) = \varepsilon. \quad (1.15)$$

To znamená, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^l \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^l \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right)$ a na základe vzťahu (1.14) pre dĺžku krivky f platí:⁵⁹

$$d(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(X_{D_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^l \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Explicitne zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ môžeme parametrizovať $x = t$, $y = f(t)$, $t \in \langle a; b \rangle$. Ak je f' spojitá na $\langle a; b \rangle$, potom pre dĺžku grafu funkcie f platí:

$$d(f) = \int_a^b \sqrt{[t']^2 + [f'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

V polárnych súradniciach zadanú krivku $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle$ môžeme (v karteziánskych súradniciach) parametrizovať v tvare $x = \rho \cos t = f(t) \cos t$, $y = \rho \sin t = f(t) \sin t$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$. Ak je funkcia f' spojitá, potom pre dĺžku krivky f platí:

⁵⁸Z konštrukcie bodov t_0, t_1, \dots, t_l vyplýva, že každý z intervalov $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, l$ je podmnožinou nejakého intervalu $\langle \alpha; t_1^* \rangle$, $\langle t_1^*; t_2^* \rangle$, $\langle t_2^*; t_3^* \rangle$, \dots , $\langle t_{n-1}^*; \beta \rangle$.

⁵⁹Posledná suma predstavuje integrálny súčet funkcie $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ na $\langle \alpha; \beta \rangle$.

$$\begin{aligned}
 d(f) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[(f(t) \cos t)']^2 + [(f(t) \sin t)']^2} dt = \\
 &= \left[\begin{aligned} [(f(t) \cos t)']^2 &= [f'(t) \cos t - f(t) \sin t]^2 = [f'(t)]^2 \cos^2 t - f'(t)f(t) \sin 2t + f^2(t) \sin^2 t \\ [(f(t) \sin t)']^2 &= [f'(t) \sin t + f(t) \cos t]^2 = [f'(t)]^2 \sin^2 t + f'(t)f(t) \sin 2t + f^2(t) \cos^2 t \end{aligned} \right] = \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 + f^2(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi)} d\varphi.
 \end{aligned}$$

Príklad 1.2.35.

Určte dĺžku hviezdice (asteroidy) $f: x = 3r \cos t + r \cos 3t, y = 3r \sin t - r \sin 3t, t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a štvorlístka $g: x = 5r \cos t - r \cos 5t, y = 5r \sin t - r \sin 5t, t \in \langle 0; 2\pi \rangle, r > 0$.

Riešenie.

Pre hviezdicu⁶⁰ f a jej dĺžku $d(f)$ platí (obr. 1.2.38 vľavo):

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} [(3r \cos t + r \cos 3t)']^2 &= [-3r \sin t - 3r \sin 3t]^2 = 9r^2[\sin^2 t + 2 \sin t \sin 3t + \sin^2 3t] \\ [(3r \sin t - r \sin 3t)']^2 &= [3r \cos t - 3r \cos 3t]^2 = 9r^2[\cos^2 t - 2 \cos t \cos 3t + \cos^2 3t] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 d(f) &= \int_0^{2\pi} 3r \sqrt{[\sin^2 t + 2 \sin t \sin 3t + \sin^2 3t] + [\cos^2 t - 2 \cos t \cos 3t + \cos^2 3t]} dt = \\
 &= 3r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2[\cos t \cos 3t - \sin t \sin 3t]} dt = 3r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos 4t} dt = (*) = \\
 &= 6r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos 4t}{2}} dt = 6r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos 4t}{2}} dt = 6r \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 2t} dt = 6r \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = \\
 &= \left[\begin{array}{l} 4 \text{ rovnaké} \\ \text{oblúky} \end{array} \right] = 6r \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6r \cdot 4 \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 24r \left[-\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 24r.
 \end{aligned}$$

Pre štvorlístok⁶¹ g a jeho dĺžku $d(g)$ platí (obr. 1.2.38 vpravo):

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} [(5r \cos t - r \cos 5t)']^2 &= [-5r \sin t + 5r \sin 5t]^2 = 25r^2[\sin^2 t - 2 \sin t \sin 5t + \sin^2 5t] \\ [(5r \sin t - r \sin 5t)']^2 &= [5r \cos t - 5r \cos 5t]^2 = 25r^2[\cos^2 t - 2 \cos t \cos 5t + \cos^2 5t] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 d(f) &= \int_0^{2\pi} 5r \sqrt{[\sin^2 t - 2 \sin t \sin 5t + \sin^2 5t] + [\cos^2 t - 2 \cos t \cos 5t + \cos^2 5t]} dt = \\
 &= 5r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2[\cos t \cos 5t + \sin t \sin 5t]} dt = 5r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos 4t} dt \stackrel{(*)}{=} 5 \frac{24r}{3} = 40r. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Príklad 1.2.36.

Odvoďte vzorec pre obvod o kružnice K s polomerom $r > 0$ (obr. 1.2.42).

Riešenie.

a) Explicitne sa kružnica K skladá z grafov funkcií $\pm f(x) = \pm \sqrt{r^2 - x^2}, x \in \langle -r; r \rangle$. Sú to dve polkružnice, ktorých dĺžka je rovnaká.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \Rightarrow 1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2} \Rightarrow \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
 \Rightarrow o &= 2 \int_{-r}^r \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2r \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2r \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r}^r = 2r \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 2\pi r.
 \end{aligned}$$

⁶⁰Hviezdica je špeciálny prípad krivky nazývanej hypocykloida.

⁶¹Štvorlístok je špeciálny prípad krivky nazývanej epicykloida.

b) Parametricky je kružnica K definovaná rovnicami $x=r \cos t$, $y=r \sin t$, $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

$$o = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r \sin t]^2 + [r \cos t]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

c) V polárnych súradniciach je kružnica K ohraničená konštantou $\rho=r$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

$$o = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + [r']^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + 0^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} r d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r. \blacksquare$$

Poznámka 1.2.9.

Ak $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ je parametrické vyjadrenie **priestorovej krivky** f v R^3 , pričom φ' , ψ' , χ' sú spojité na $\langle \alpha; \beta \rangle$, $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| + |\chi'(t)| > 0$ pre všetky $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ okrem konečného počtu, potom pre dĺžku krivky f platí:

$$d(f) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

• Povrch rotačného telesa — krivka rotuje okolo osi x

Uvažujme v rovine xy po častiach hladkú krivku $f: x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$. Ak ju necháme rotovať okolo osi x , vytvorí v priestore xyz rotačnú plochu⁶² (obr. 1.2.53). Určíme obsah tejto rotačnej plochy P_x , t. j. povrch pláštá (bez podstáv) takto vzniknuteľného rotačného telesa.

Nech $D_k = \{t_i\}_{i=0}^l$, $k \in N$ je delenie intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$, ktoré sme definovali na strane 100 pri výpočte dĺžky krivky f . Každú z plôch⁶³ P_i , $i = 1, 2, \dots, l$ aproximujeme povrchom pláštá kolmého zrezaného kužeľa (obr. 1.2.54) s výškou $|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$ a polermi podstáv $|\psi(t_{i-1})|$ a $|\psi(t_i)|$, t. j. hodnotou (viď napr. [1]):

$$\pi(|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \cdot |X_{t_{i-1}} X_{t_i}| = \pi(|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2},$$

kde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Hodnoty $\tau_i, \bar{\tau}_i \in (t_{i-1}; t_i)$ majú rovnaký význam ako vo vzťahu (1.14) v predchádzajúcej časti pri určovaní dĺžky krivky.

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, takže pre plochu P_x platí:

$$P_x = \pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^l (|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} \right).$$

Funkcia ψ je na $\langle \alpha; \beta \rangle$ spojitá a ohraničená (ma1: Weierstrasseho veta 3.3.10), t. j. existuje $m \in R$ také, že pre všetky $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ platí $|\psi(t)| \leq m$. Analogicky ako pri vzťahu (1.15) pre každé $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2m(\beta-\alpha)} > 0$ existujú $\delta > 0$, $k \in N$ tak, že pre všetky $|t - \bar{t}| < \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$ platí $|\psi'(t) - \psi'(\bar{t})| < \varepsilon_0$. Keďže $|\tau_i - \bar{\tau}_i| < t_i - t_{i-1} < \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$, $i = 1, 2, \dots, l$, potom platí:

$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^l (|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} - \sum_{i=1}^l (|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \leq$$

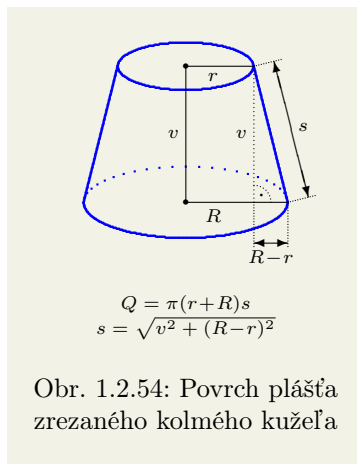
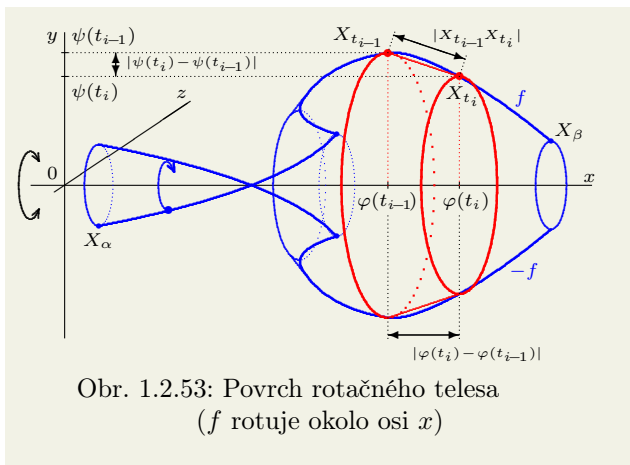
⁶²Krivka f môže byť uzavretá, môže sa pretínať a funkcia ψ môže nadobúdať záporné hodnoty.

⁶³Plocha P_i , $i = 1, 2, \dots, l$ vznikne rotáciou krivky $f: x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t \in (t_{i-1}; t_i)$ okolo osi x .

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^l (|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \Delta t_i \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^l 2m \Delta t_i |\psi'(\bar{\tau}_i) - \psi'(\tau_i)| < \sum_{i=1}^l 2m \Delta t_i \frac{\varepsilon}{2m(\beta-\alpha)} = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \sum_{i=1}^l \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} (\beta-\alpha) = \varepsilon. \end{aligned}$$

To znamená, že platí:

$$\begin{aligned} P_x &= \pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^l (|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\bar{\tau}_i)]^2} \right) = \\ &= \pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^l (|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right). \end{aligned}$$



Funkcie φ' , ψ' sú po častiach spojité na $\langle \alpha; \beta \rangle$. Na každom podintervale, na ktorom sú φ' , ψ' spojité, je tiež spojitá (mal: veta 3.3.4) a tým pádom aj ohraňovaná zložená funkcia $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$. To znamená, že existuje $m \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ platí $0 \leq \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \leq m$. Funkcia ψ je spojitá na $\langle \alpha; \beta \rangle$. Z toho vyplýva, že funkcia $|\psi|$ je spojitá a tiež rovnomerne spojitá na $\langle \alpha; \beta \rangle$, t. j. pre každé $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2m(\beta-\alpha)} > 0$ existujú $\delta > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $|t - \bar{t}| < \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$ platí $||\psi(t)| - |\psi(\bar{t})|| < \varepsilon_0$. Keďže $|t_{i-1} - \tau_i| < t_i - t_{i-1} < \delta$, $|t_i - \tau_i| < t_i - t_{i-1} < \delta$, $i = 1, 2, \dots, l$, potom platí:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \sum_{i=1}^l (|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|) \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^l |\psi(\tau_i)| \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^l \left| |\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)| - 2|\psi(\tau_i)| \right| \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^l \left(\left| |\psi(t_{i-1})| - |\psi(\tau_i)| \right| + \left| |\psi(t_i)| - |\psi(\tau_i)| \right| \right) \Delta t_i m < \end{aligned}$$

$$< \sum_{i=1}^l (\varepsilon_0 + \varepsilon_0) \Delta t_i m = 2\varepsilon_0 m \sum_{i=1}^l \Delta t_i = 2 \frac{\varepsilon}{2m(\beta-\alpha)} m(\beta-\alpha) = \varepsilon.$$

Pre povrch P_x rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky f okolo osi x , potom platí:⁶⁴

$$P_x = 2\pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^l |\psi(\tau_i)| \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Explicitne zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ môžeme parametrizovať $x = t$, $y = f(t)$, $t \in \langle a; b \rangle$. Ak je f' spojité na $\langle a; b \rangle$, potom pre obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie f okolo osi x , platí:

$$P_x = 2\pi \int_a^b |f(t)| \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Príklad 1.2.37.

Odvoďte vzorec pre povrch S gule G s polomerom $r > 0$ (viď obr. 1.2.42).

Riešenie.

Guľa G vznikne rotáciou polkružnice $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r; r \rangle$ okolo osi x (pr. 1.2.36)

$$S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r [x]_{-r}^r = 2\pi r [r - (-r)] = 4\pi r^2.$$

V parametrickom tvare má polkružnica f tvar $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$ a platí

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi} |r \sin t| \sqrt{[-r \sin t]^2 + [r \cos t]^2} dt = 2\pi r \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{r^2} dt = \\ &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2\pi r^2 [-\cos t]_0^{\pi} = -2\pi r^2 [\cos t]_0^{\pi} = -2\pi r^2 [-1 - 1] = 4\pi r^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Príklad 1.2.38.

Vypočítajte povrch anuloidu s polermi $d \pm r$, $d \geq r > 0$ (obr. 1.2.44).

Riešenie.

Pre povrch anuloidu platí (plochy sa sčítajú, viď pr. 1.2.30):

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-r}^r |f_1| \sqrt{1 + [f_1'(x)]^2} dx + 2\pi \int_{-r}^r |f_2| \sqrt{1 + [f_2'(x)]^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \frac{(|f_1| + |f_2|)r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \\ &= 2\pi 2dr \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi dr \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r}^r = 4\pi dr \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = 4\pi^2 dr, \end{aligned}$$

príčom pre $x \in \langle -r; r \rangle$ platí $f_{1,2}(x) = d \pm \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$, $f'_{1,2}(x) = \pm \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{\mp x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $|f_1| + |f_2| = f_1 + f_2 = 2d$, $\sqrt{1 + [f'_{1,2}(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. ■

Cvičenia

⁶⁴Posledná suma predstavuje integrálny súčet funkcie $|\psi(t)| \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ na intervale $\langle \alpha; \beta \rangle$.

„Tati, bila tě někdy tvoje maminka?“ „Ne, jenom tvoje.“
úryvok z filmu *SLUNCE, SENO A PÁR FACEK*

Ach milí priatelia, priatelia neexistujú!
ARISTOTELES

Výsledky cvičení

1 Integrál reálné funkcie

1.1.2. a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c, x \in R$, b) $\arctg(x+2) + c, x \in R$, c) $-\frac{1}{x+2} + c, x \in R, x \neq -2$, d) $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x+3| + c, x \in R, x \neq -1, x \neq -3$, e) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|x+2-\sqrt{2}| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|x+2+\sqrt{2}| + c, x \in R, x \neq -2 \pm \sqrt{2}$, f) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c, x \in R$, g) $-\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \ln|x-3| + \frac{1}{8} \ln|x+1| + c, x \in R, x \neq 1, x \neq 3, x \neq -1$, h) $-\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{5} \ln|x-2| + \frac{1}{20} \ln|x+3| + c, x \in R, x \neq 1, x \neq 2, x \neq -3$, i) $\frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c, x \in R, x \neq 1, x \neq -2, x \neq -1$, j) $-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{12} \ln|x+2| + c, x \in R, x \neq 1, x \neq 2, x \neq -2$, k) $\ln|x-2| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c, x \in R, x \neq 1, x \neq 2$, l) $\ln|x+2| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c, x \in R, x \neq -1, x \neq -2$, m) $\frac{1}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{9} \ln|x+2| - \frac{1}{3(x+2)} + c, x \in R, x \neq 1, x \neq -2$, n) $\frac{1}{9} \ln|x+2| - \frac{1}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} + c, x \in R, x \neq 1, x \neq -2$, o) $\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c, x \in R, x \neq -1$, p) $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2-x+2) - \frac{1}{2\sqrt{7}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + c, x \in R, x \neq 1$, q) $\frac{1}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c, x \in R, x \neq 2$, r) $\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c, x \in R, x \neq -1$, s) $\ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + c, x \in R, x \neq 0, x \neq 1$, t) $-\frac{1}{4(x^2+2x+3)^2} + c, x \in R$, u) $\frac{-x-4}{8(x^2+4x+6)^2} - \frac{3(x+2)}{32(x^2+4x+6)} - \frac{3}{32\sqrt{2}} \arctg \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c, x \in R$, v) $\frac{-x-3}{4(x^2+4x+5)^2} - \frac{3(x+2)}{8(x^2+4x+5)} - \frac{3}{8} \arctg(x+2) + c, x \in R$, w) $\frac{x+1}{4(x^2+4x+3)^2} - \frac{3(x+2)}{8(x^2+4x+3)} + \frac{3}{16} \ln|x+3| - \frac{3}{16} \ln|x+1| + c, x \in R, x \neq -1, x \neq -3$, x) $\frac{x}{8(x^2+4x+2)^2} - \frac{3(x+2)}{32(x^2+4x+2)} + \frac{3}{64\sqrt{2}} \ln|x+2-\sqrt{2}| - \frac{3}{64\sqrt{2}} \ln|x+2+\sqrt{2}| + c, x \in R, x \neq -2 \pm \sqrt{2}$. **1.1.3.** a) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} - \arctg x + c, x \in R, x \neq 0$, b) $\frac{1}{4(x-2)^4} + \frac{2}{3(x-2)^3} + \frac{1}{2(x-2)^2} + c, x \in R, x \neq 2$, c) $-\frac{1}{4(x-1)^4} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{2(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + c, x \in R, x \neq 1$, d) $\frac{1}{2(x+2)^2} - \frac{6}{x+2} - 15 \ln|x+2| + 20(x+2) - \frac{15(x+2)^2}{2} + 2(x+2)^3 - \frac{(x+2)^4}{4} + c, x \in R, x \neq -2$, e) $\frac{81}{2(x-2)^2} + \frac{108}{x-2} - 54 \ln|x-2| - 12(x-2) - \frac{(x-2)^2}{2} + c, x \in R, x \neq 2$, f) $-\frac{1}{2(1+x^2)} + c, x \in R$, g) $-\frac{1}{4(1+x^2)^2} + c, x \in R$, h) $-\frac{1}{6(1+x^2)^3} + c, x \in R$, i) $\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+6}) + c, x \in R$, j) $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}| + c, x \in (-\infty; -3) \cup (-1; \infty)$, k) $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}| + c, x \in (-\infty; -2-\sqrt{7}) \cup (-2+\sqrt{7}; \infty)$, l) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) + c, x \in R$, m) $\arcsin \frac{x-2}{\sqrt{10}} + c$, resp. $-\arccos \frac{x-2}{\sqrt{10}} + c$, resp. $2 \arctg \frac{\sqrt{10}-\sqrt{-x^2+4x+6}}{x-2} + c, x \in (2-\sqrt{10}; 2+\sqrt{10})$, resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2+4x+6}}{x-2} + c, x \in (2-\sqrt{10}; 2+\sqrt{10}), x \neq 2$, n) $\arcsin \frac{x-2}{\sqrt{2}} + c$, resp. $-\arccos \frac{x-2}{\sqrt{2}} + c$, resp. $2 \arctg \frac{\sqrt{2}-\sqrt{-x^2+4x+3}}{x-2} + c, x \in (2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$, resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2+4x-2}}{x-2} + c, x \in (2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}), x \neq 2$, o) $\frac{1}{3}$, p) $\arcsin \frac{x-2}{3} + c$, resp. $-\arccos \frac{x-2}{3} + c$, resp. $2 \arctg \frac{3-\sqrt{-x^2+4x+5}}{x-2} + c, x \in (-1; 5)$, resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2+4x+5}}{x-2} + c, x \in (-1; 5), x \neq 2$, q) $\arcsin \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c$, resp. $-\arccos \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c$, resp. $2 \arctg \frac{\sqrt{2}-\sqrt{-x^2-4x-2}}{x+2} + c, x \in (-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2})$, resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2-4x-2}}{x+2} + c, x \in (-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}), x \neq -2$, r) $\arcsin(x+2) + c$, resp. $-\arccos(x+2) + c$, resp. $2 \arctg \frac{1-\sqrt{-x^2-4x-3}}{x+2} + c, x \in (-3; -1)$, resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2-4x-3}}{x+2} + c, x \in (-3; -1), x \neq -2$, s) $\frac{1}{\sqrt{8}} \ln|\sqrt{2+3x}-\sqrt{8}| - \frac{1}{\sqrt{8}} \ln|\sqrt{2+3x}+\sqrt{8}| + c, x \in (-\frac{2}{3}; \infty), x \neq 2$, t) $\frac{1}{2} \ln|\sqrt{-2+3x}-2| - \frac{1}{2} \ln|\sqrt{-2+3x}+2| + c, x \in (\frac{2}{3}; \infty), x \neq 2$, u)

$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{-1-3x} - \sqrt{2}| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{-1-3x} + \sqrt{2}| + c, x \in (-\infty; -\frac{1}{3}), x \neq -1, v) \arctg \frac{\sqrt{2+3x}}{2} + c,$
 $x \in (-\frac{2}{3}; \infty), w) 2 \arctg \sqrt{1-2x} + c, x \in (-\infty; \frac{1}{2}), x) \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{-1-2x}}{\sqrt{3}} + c, x \in (-\infty; -\frac{1}{2}).$ **1.1.4.** a) $\frac{1}{8} |x-1|(x-1)^7 + c, x \in R, b) \frac{1}{9} |x-1|(x-1)^8 + c, x \in R, c) \frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}}{2} + \ln(x+2 + \sqrt{x^2+4x+6}) + c,$
 $x \in R, d) \frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}{2} - \frac{1}{2} \ln |x+2 + \sqrt{x^2+4x+6}| + c, x \in R, (-\infty; -3) \cup (-1; \infty), e) \frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x-3}}{2}$
 $- \frac{7}{2} \ln |x+2 + \sqrt{x^2+4x-3}| + c, x \in R, (-\infty; -2 - \sqrt{7}) \cup (-2 + \sqrt{7}; \infty), f) \ln(x+1 + \sqrt{x^2+2x+3})$
 $+ \frac{(x+1)\sqrt{x^2+4x+3}}{2} + c, x \in R, g) \frac{(x-2)\sqrt{-x^2+4x+6}}{2} + 5g(x) + c, x \in (2 - \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}),$ kde $g(x) =$
 $\arcsin \frac{x-2}{\sqrt{10}},$ resp. $-\arccos \frac{x-2}{\sqrt{10}},$ resp. $2 \arctg \frac{\sqrt{10 - \sqrt{-x^2+4x+6}}}{x-2},$ resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2+4x+6}}{x-2}, x \neq 2,$ h) $\frac{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-2}}{2} + g(x) + c, x \in (2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}),$ kde $g(x) = \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{2}},$ resp. $-\arccos \frac{x-2}{\sqrt{2}},$ resp.
 $2 \arctg \frac{\sqrt{2 - \sqrt{-x^2+4x+3}}}{x-2},$ resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2+4x-2}}{x-2}, x \neq 2, i) \frac{(x-2)\sqrt{-x^2+4x+5}}{2} + \frac{9}{2}g(x) + c, x \in (-1; 5),$
kde $g(x) = \arcsin \frac{x-2}{3},$ resp. $-\arccos \frac{x-2}{3},$ resp. $2 \arctg \frac{3 - \sqrt{-x^2+4x+5}}{x-2},$ resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2+4x+5}}{x-2}, x \neq 2,$
k) $\frac{(x+2)\sqrt{-x^2-4x-2}}{2} + g(x) + c, x \in (-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}),$ kde $g(x) = \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{2}},$ resp. $-\arccos \frac{x+2}{\sqrt{2}},$ resp.
 $2 \arctg \frac{\sqrt{2 - \sqrt{-x^2-4x-2}}}{x+2},$ resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2-4x-2}}{x+2}, x \neq -2, l) \frac{(x+2)\sqrt{-x^2-4x-3}}{2} + \frac{1}{2}g(x) + c, x \in (-3; -1),$
kde $g(x) = \arcsin(x+2),$ resp. $-\arccos(x+2),$ resp. $2 \arctg \frac{1 - \sqrt{-x^2-4x-3}}{x+2},$ resp. $-\arctg \frac{\sqrt{-x^2-4x-3}}{x+2},$
 $x \neq -2, m) -96 \sqrt[6]{x-1} - 24 \sqrt[3]{x-1} - 8\sqrt{x-1} - 3 \sqrt[3]{(x-1)^2} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x-1)^5} - 192 \ln(-2 + \sqrt[6]{x-1}) + c,$
 $x \in (1; \infty), n) -6 \sqrt[6]{x-1} - 3 \sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt{x-1} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x-1)^5} - 6 \ln(-1 + \sqrt[6]{x-1}) + c, x \in$
 $(1; \infty), o) 6 \sqrt[6]{x-1} - 3 \sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt{x-1} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x-1)^5} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{x-1}) + c, x \in (1; \infty).$ **1.1.5.** a) $2 \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}} + c, x \in (0; 1), b) 2\sqrt{2+3x} + \sqrt{8} \ln |\sqrt{2+3x} - \sqrt{8}| - \sqrt{8} \ln |\sqrt{2+3x} + \sqrt{8}| + c,$
 $x \in (-\frac{2}{3}; \infty), x \neq 2, c) 2\sqrt{2+3x} - 4 \arctg \frac{\sqrt{2+3x}}{2} + c, x \in (-\frac{2}{3}; \infty), d) 2\sqrt{-1-2x} - 2\sqrt{3} \arctg \frac{\sqrt{-1-2x}}{\sqrt{3}} + c,$
 $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}), e) 2\sqrt{1-2x} - 2 \arctg \sqrt{1-2x} + c, x \in (-\infty; \frac{1}{2}), f) x\sqrt{t} - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{t}-1| + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{t}+1| + c,$
 $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty),$ kde $t = \frac{x+1}{x},$ g) $(x+1)\sqrt{t} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{t}-1| - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{t}+1| + c, x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty),$
kde $t = \frac{x}{x+1},$ h) $(x+2)\sqrt{t} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{t}-1| - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{t}+1| + c, x \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty),$ kde $t = \frac{x+1}{x+2},$
i) $\sqrt{1+x^2} + c, x \in R, j) -\sqrt{1-x^2} + c, x \in (-1; 1), k) (x+1)\sqrt{t} - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{t}-1| + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{t}+1| + c,$
 $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; \infty),$ kde $t = \frac{x+2}{x+1},$ l) $(x+1)\sqrt{t} + \ln |\sqrt{t}-1| - \ln |\sqrt{t}+1| + c, x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty),$
kde $t = \frac{x-1}{x+1},$ m) $\frac{3(x-4)}{5} \sqrt[3]{(x+1)^2} + c, x \in (-1; \infty), n) -2\sqrt{x} + x + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + c, x \in (0; \infty), o) 5 + 4\sqrt{x} - x - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + c,$
 $x \in (0; \infty), p) 5 - 4\sqrt{x} - x - 4 \ln|-1 + \sqrt{x}| + c, x \in (0; \infty), x \neq 1,$
q) $-6 \sqrt[6]{x} + 2\sqrt{x} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} + 6 \arctg \sqrt[6]{x} + c, x \in (0; \infty), r) 2\sqrt{3} \arctg \frac{-1+2\sqrt[6]{x}}{\sqrt{3}} - 2 \ln(1 + \sqrt[6]{x})$
 $+ \ln(1 - \sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x}) + c, x \in (0; \infty), s) 2\sqrt{x^2+x} + c, x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty), t) \frac{2x^3-4}{9} \sqrt{1+x^3} + c,$
 $x \in (-1; \infty), u) \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c, x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty), v) \frac{2\sqrt{(x^3+1)^3}}{9} - \frac{2\sqrt{x^3+1}}{3} + c, x \in (-1; \infty),$
w) $\frac{1}{4} \ln(\sqrt[4]{x^4+1} + x) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt[4]{x^4+1} - x) - \frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} + c, x \in R, x \neq 0, x) \frac{1}{4} \ln|x + \sqrt[4]{x^4-1}|$
 $- \frac{1}{4} \ln|x - \sqrt[4]{x^4-1}| - \frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt[4]{x^4-1}}{x} + c, x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty), y) \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |\sqrt{1-x^4} + x\sqrt[4]{4-4x^4+x^2}|$
 $- \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |\sqrt{1-x^4} - x\sqrt[4]{1-x^4} + x^2| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt[4]{4-4x^4+x}}{x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt[4]{4-4x^4-x}}{x} + c, x \in (-1; 1),$
 $x \neq 0.$ **1.1.6.** a) $\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x + c, x \in (-1; 1), b) \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2-1}{4} \arcsin x + c, x \in (-1; 1), c) \frac{x^2+2}{9} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{3} \arcsin x + c,$
 $x \in (-1; 1), d) -\sqrt{1-x^2} + x \arccos x + c, x \in (-1; 1), e) -\frac{x}{4} \sqrt{1-x^2}$
 $+ \frac{2x^2-1}{4} \arccos x + c, x \in (-1; 1), f) -\frac{x^2+2}{9} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{3} \arccos x + c, x \in (-1; 1), g) -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x$
 $+ \frac{x^2}{2} \arctg x + c, x \in R, h) -\frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{3} \arctg x + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) + c, x \in R, i) \frac{x}{4} - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{4} \arctg x + \frac{x^4}{4} \arctg x + c,$
 $x \in R, j) -x \arctg x + \frac{x^2+1}{2} \arctg^2 x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, x \in R, k) x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, x \in R,$
l) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} \operatorname{arccotg} x - \frac{1}{2} \arctg x + c, x \in R, m) \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x - \frac{1}{6} \ln(x^2+1) + c, x \in R, n) -\frac{x}{4} + \frac{x^3}{12}$
 $+ \frac{x^4}{4} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{4} \arctg x + c, x \in R, o) x \operatorname{arccotg} x + \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arccotg}^2 x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, x \in R, p) x \arcsin \sqrt{t}$
 $+ \sqrt{-(x+1)} + c, x \in (-\infty; -1),$ kde $t = \frac{x+1}{x},$ q) $x \arcsin \sqrt{t} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x} + c,$ resp. $(x+1) \arcsin \sqrt{t}$
 $- \sqrt{x} + c, x \in (0; \infty),$ kde $t = \frac{x}{x+1},$ r) $x \arcsin \sqrt{t} - \sqrt{x+1} + 2 \arctg \sqrt{x+1} + c,$ resp. $(x+2) \arcsin \sqrt{t}$

$-\sqrt{x+1} + c, x \in (-1; \infty)$, kde $t = \frac{x+1}{x+2}$, s) $x \arcsin \sqrt{t} + \sqrt{-(x+2)} + \operatorname{arctg} \sqrt{-(x+2)} + c$, resp. $(x+1) \arcsin \sqrt{t} + \sqrt{-(x+2)} + c, x \in (-\infty; -2)$, kde $t = \frac{x+2}{x+1}$, t) $x \arcsin \sqrt{t} - \sqrt{2(x-1)} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{2}} + c$, resp. $(x+1) \arcsin \sqrt{t} - \sqrt{2(x-1)} + c, x \in (1; \infty)$, kde $t = \frac{x-1}{x+1}$, u) $x \arccos \sqrt{t} - \sqrt{-(x+1)} + c, x \in (-\infty; -1)$, kde $t = \frac{x+1}{x}$, v) $x \arccos \sqrt{t} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c$, resp. $(x+1) \arccos \sqrt{t} + \sqrt{x} + c, x \in (0; \infty)$, kde $t = \frac{x}{x+1}$, w) $x \arccos \sqrt{t} - \sqrt{-(x+2)} - \operatorname{arctg} \sqrt{-(x+2)} + c$, resp. $(x+1) \arccos \sqrt{t} - \sqrt{-(x+2)} + c, x \in (-\infty; -2)$, kde $t = \frac{x+2}{x+1}$, x) $x \arccos \sqrt{t} + \sqrt{2(x-1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{2}} + c$, resp. $(x+1) \arccos \sqrt{t} + \sqrt{2(x-1)} + c, x \in (1; \infty)$, kde $t = \frac{x-1}{x+1}$. **1.1.7.** a) $-\frac{\sin^2 2x \cdot \cos 2x}{6} - \frac{\cos 2x}{3} + c$, resp. $-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^3 2x}{6} + c, x \in R$, b) $\frac{3x}{8} - \frac{\cos 3x \cdot \sin 3x}{8} - \frac{\cos 3x \cdot \sin^3 3x}{12} + c, x \in R$, c) $\frac{\cos^2 3x \cdot \sin 3x}{9} + \frac{2 \sin 3x}{9} + c$, resp. $\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin^3 3x}{9} + c, x \in R$, d) $\frac{3x}{8} + \frac{3 \sin 2x \cdot \cos 2x}{16} + \frac{\sin 2x \cdot \cos^3 2x}{8} + c, x \in R$, e) $-\frac{\sinh 4x \cdot \cosh 4x}{8} - \frac{x}{2} + c$, resp. $\frac{\sinh 8x}{16} - \frac{x}{2} + c$, resp. $\frac{e^{8x}}{32} - \frac{x}{2} - \frac{e^{-8x}}{32} + c, x \in R$, f) $\frac{\sinh^2 2x \cdot \cosh 2x}{6} - \frac{\cosh 2x}{3} + c$, resp. $\frac{\cosh^3 2x}{6} - \frac{\cosh 2x}{2} + c$, resp. $\frac{e^{6x}}{48} - \frac{3e^{2x}}{16} - \frac{3e^{-2x}}{16} + \frac{e^{-6x}}{48} + c, x \in R$, g) $\frac{3x}{8} - \frac{3 \sinh x \cdot \cosh x}{8} + \frac{\sinh^3 x \cdot \cosh x}{4} + c$, resp. $\frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{2x}}{8} + \frac{3x}{8} + \frac{e^{-2x}}{8} - \frac{e^{-4x}}{64} + c, x \in R$, h) $x \cosh x - \sinh x + c, x \in R$, i) $(x^2 + 2) \cosh x - 2x \sinh x + c, x \in R$, j) $(x^3 + 6x) \cosh x - (3x^2 + 6) \sinh x + c, x \in R$, k) $\frac{\sinh 3x \cdot \cosh 3x}{6} + \frac{x}{2} + c$, resp. $\frac{\sinh 6x}{12} + \frac{x}{2} + c$, resp. $\frac{e^{6x}}{24} + \frac{x}{2} - \frac{e^{-6x}}{24} + c, x \in R$, l) $\frac{\sinh x \cdot \cosh^2 x}{3} + \frac{2 \sinh x}{3} + c$, resp. $\frac{\sinh^3 x}{3} + \sinh x + c$, resp. $\frac{e^{3x}}{24} + \frac{3e^x}{8} - \frac{3e^{-x}}{8} - \frac{e^{-3x}}{24} + c, x \in R$, m) $\frac{3x}{8} + \frac{3 \sinh 2x \cdot \cosh 2x}{16} + \frac{\sinh 2x \cdot \cosh^3 2x}{8} + c$, resp. $\frac{e^{8x}}{128} + \frac{e^{4x}}{16} + \frac{3x}{8} - \frac{e^{-4x}}{16} - \frac{e^{-8x}}{128} + c, x \in R$, n) $x \sinh x - \cosh x + c, x \in R$, o) $(x^2 + 2) \sinh x - 2x \cosh x + c, x \in R$, p) $(x^3 + 6x) \sinh x - (3x^2 + 6) \cosh x + c, x \in R$. **1.1.8.** a) $-\frac{1}{\operatorname{tg} x+1} + c, x \in R, x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, b) $-\frac{2}{3\sqrt{21}} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{3x}{2} - 2}{\sqrt{21}} + c, x \in R, x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z$, c) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln |\operatorname{tg} x + 2 - \sqrt{3}| - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln |\operatorname{tg} x + 2 + \sqrt{3}| + c, x \in R, x \neq -\frac{\pi}{12} + k\pi, x \neq \frac{7\pi}{12} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, d) $-\frac{1}{\sqrt{7}} \ln |3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4 - \sqrt{7}| + \frac{1}{\sqrt{7}} \ln |3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4 + \sqrt{7}| + c, x \in R, \sin x \neq \frac{3}{4}, x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z$, e) $\frac{1}{2 \operatorname{tg} x} + c, x \in R, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z$, f) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{3} + c, x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, g) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{3}| + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{3}| + c, x \in R, x \neq \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z$, h) $\frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{3x}{2}}{\sqrt{3}} + c, x \in R, x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z$, i) $-\frac{1}{4} \ln |1 - 2 \cos 2x| + c, x \in R, x \neq \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$, j) $-\frac{1}{3} \ln (4 - 3 \sin x) + c, x \in R$, k) $-\frac{1}{3} \ln (2 - \sin 3x) + c, x \in R$, l) $-\frac{1}{6} \ln (4 - 3 \cos 2x) + c, x \in R$, m) $-\frac{\arcsin x}{x} + \ln |x| - \ln (2 + 2\sqrt{1-x^2}) + c, x \in (-1; 1), x \neq 0$, n) $-\frac{\arccos x}{x} - \ln |x| + \ln (2 + 2\sqrt{1-x^2}) + c, x \in (-1; 1), x \neq 0$, o) $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c, x \in (-1; 1)$, p) $2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + c, x \in (0; 1)$, q) $-x - \sqrt{1-x^2} \arccos x + c, x \in (-1; 1)$, r) $-2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x} \arccos \sqrt{x} + c, x \in (0; 1)$, s) $\frac{x+(x^2-1) \operatorname{arctg} x}{4(x^2+1)} + c, x \in R$, t) $-\frac{x^2+1}{4(x^2-1)} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{8} \ln |x-1| - \frac{1}{8} \ln |x+1| + c, x \in R, x \neq \pm 1$, u) $-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2} \ln x^2 - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + c, x \in R, x \neq 0$, v) $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + c, x \in R$, w) $-\frac{1}{2} \operatorname{arccotg}^2 x + c, x \in R$, x) $-\frac{\operatorname{arccotg} x}{x} - \frac{1}{2} \ln x^2 + \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + c, x \in R, x \neq 0$. **1.1.9.** a) $\frac{1}{5} \ln^5 x + c, x \in (0; \infty)$, b) $\frac{1}{8} \ln^2 x^4 + c, x \in R, x \neq 0$, c) $2e^{\sqrt{x}} + c, x \in (0; \infty)$, d) $\ln (1 + e^x) + c, x \in R$, e) $-\frac{x^6+3x^4+6x^2+6}{2} e^{-x} + c, x \in R$, f) $-\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} + c, x \in R$, m) $\frac{1}{2 \ln 2} \ln |\sqrt{2x+4} - 2| - \frac{1}{2 \ln 2} \ln |\sqrt{2x+4} + 2| + c, x \in R$, n) $\frac{1}{\sqrt{3} \ln 2} \ln |\sqrt{2x+3} - \sqrt{3}| - \frac{1}{\sqrt{3} \ln 2} \ln |\sqrt{2x+3} + \sqrt{3}| + c, x \in R$, o) $\frac{1}{\sqrt{2} \ln 2} \ln |\sqrt{2x+2} - \sqrt{2}| - \frac{1}{\sqrt{2} \ln 2} \ln |\sqrt{2x+2} + \sqrt{2}| + c, x \in R$, g) $\frac{x}{4} - \frac{1}{4 \ln 2} \ln (2^x + 4) + c, x \in R$, h) $\frac{x}{3} - \frac{1}{3 \ln 2} \ln (2^x + 3) + c, x \in R$, i) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2 \ln 2} \ln (2^x + 2) + c, x \in R$, p) $\frac{2}{\ln 2} \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1} + c, x \in (0; \infty)$, q) $\frac{1}{\ln 2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2^x-4}{3}} + c, x \in (2; \infty)$, r) $\frac{2}{\sqrt{3} \ln 2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2^x-3}}{\sqrt{3}} + c, x \in (\ln 2 \cdot 3; \infty)$, j) $\frac{1}{\ln 2} \ln |2^x - 1| - x + c, x \in R, x \neq 0$, k) $\frac{1}{4 \ln 2} \ln |2^x - 4| - \frac{x}{4} + c, x \in R, x \neq 2$, l) $\frac{1}{3 \ln 2} \ln |2^x - 3| - \frac{x}{3} + c, x \in R, x \neq 2$. **1.1.10.** a) $\ln |\arcsin x| + c, x \in (-1; 1), x \neq 0$, b) $-\ln |\arccos x| + c, x \in (-1; 1)$, c) $2\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln (x+1) + c, x \in (0; \infty)$, d) $2\sqrt{x} \operatorname{arccotg} \sqrt{x} + \ln (x+1) + c, x \in (0; \infty)$, e) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (2 \operatorname{tg} x) + c, x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, f) $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (2 \operatorname{cotg} x) + c, x \in R, x \neq k\pi, k \in Z$, g) $2\sqrt{-2+3x} + 2 \ln |\sqrt{-2+3x} - 2| - 2 \ln |\sqrt{-2+3x} + 2| + c, x \in (\frac{2}{3}; \infty), x \neq 2$, h) $2\sqrt{-1-3x} + \sqrt{2} \ln |\sqrt{-1-3x} - \sqrt{2}| - \sqrt{2} \ln |\sqrt{-1-3x} + \sqrt{2}| + c, x \in (-\infty; -\frac{1}{3}), x \neq -1$, i) $\frac{1}{2} \ln^2 \operatorname{arctg} x + c, x \in (0; \infty)$, j) $-\ln (\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}) + c, x \in R$, k) $\frac{2}{3} \sqrt{(2 + \ln x)^3} + c, x \in (e^{-2}; \infty)$, l) $\arcsin \ln x + c, x \in (e^{-1}; e)$, m) $\ln |x| - \frac{1}{3} \ln |2 - x^3 + 2\sqrt{1-x^3} + x^6| + c, x \in R, x \neq 0$, n) $\ln |x| - \frac{1}{3} \ln |2 + x^3 + 2\sqrt{1+x^3} + x^6| + c, x \in R, x \neq 0$, o) $\frac{1}{4} \ln (1 - 2\sqrt{x-x^2}) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-x^2}}{x} - \frac{x+\sqrt{x-x^2}}{2} + c, x \in (0; 1)$, p) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} \ln |2x - 1 - 2\sqrt{x^2-x}| + \frac{5-2x}{4} \sqrt{x^2-x} - x + c, x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$,

q) $x + \sqrt[3]{3x+4} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2} - \ln(1 + \sqrt[3]{3x+4}) + c$, $x \in \langle -\frac{4}{3}; \infty \rangle$, r) $-2\sqrt{1+x-x^2} + \ln|x| - \ln|2+x+2\sqrt{1+x-x^2}| + c$, $x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, $x \neq 0$, s) $6 \operatorname{arctg} \sqrt{t} - 4\sqrt{t} - \sqrt{1-x^2} + c$, $x \in (-1; 1)$, kde $t = \frac{1-x}{1+x}$, t) $4\sqrt{t} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt{t} + \sqrt{1-x^2} + c$, $x \in (-1; 1)$, kde $t = \frac{1+x}{1-x}$. **1.1.11.** a) $\frac{1}{8}|x-1|^7(x-1) + c$, $x \in R$, b) $\frac{1}{9}|x-1|^8(x-1) + c$, $x \in R$, c) $-\operatorname{sgn} x e^{-|x|} + c$, $x \in R$, $x \neq 0$, d) $\operatorname{sgn} x e^{|x|} + c$, $x \in R$, $x \neq 0$, e) $-\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x + c$, $x \in (0; \infty)$, f) $-\frac{x^3}{9} + \frac{x^3}{3} \ln x + c$, $x \in (0; \infty)$, g) $-\frac{x^4}{16} + \frac{x^4}{4} \ln x + c$, $x \in (0; \infty)$, h) $-\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5} \ln x + c$, $x \in (0; \infty)$, i) $(x+1) \ln(x+1)^7 - 7x + c$, $x \in (-1; \infty)$, j) $\frac{2x^3}{27} - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{x^3}{3} \ln^2 x + c$, $x \in (0; \infty)$, k) $\frac{x^4}{32} - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{x^4}{4} \ln^2 x + c$, $x \in (0; \infty)$, l) $\frac{2x^5}{125} - \frac{2x^5}{25} \ln x + \frac{x^5}{5} \ln^2 x + c$, $x \in (0; \infty)$, m) $(2x-3) \ln(2x-3)^2 - 4x + c$, $x \in R$, $x \neq \frac{3}{2}$, n) $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + c$, $x \in R$, o) $(2\sqrt{x^5} - 10x^2 + 40\sqrt{x^3} - 120x + 240\sqrt{x} - 240) e^{\sqrt{x}} + c$, $x \in (0; \infty)$, p) $(2x - 4\sqrt{x} + 4) e^{\sqrt{x}} + c$, $x \in (0; \infty)$, q) $\frac{9}{20} \sqrt[9]{(2x-3)^{10}} + c$, $x \in (\frac{3}{2}; \infty)$, r) $-\frac{7}{16} \sqrt[7]{(3-2x)^8} + c$, $x \in (-\infty; \frac{3}{2})$, s) $-(x^3 + 3x^2 + 6x + 5) e^{-x} + c$, $x \in R$, t) $x - e^{-x} \arcsin e^x - \ln(1 + \sqrt{1-e^{2x}}) + c$, $x \in (-\infty; 0)$, u) $e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$, $x \in R$, $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, v) $\frac{e^x(\sin x + 1)}{\cos x}$, $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, w) $\frac{e^x(\sin x - 1)}{\cos x}$, $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, x) $-e^{-x} \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln(e^{-2x} + 1) + c$, $x \in R$. **1.1.12.** a) $-\frac{2x^2-3}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + c$, $x \in R$, b) $(3x^2-6) \sin x - (x^3-6x-1) \cos x + c$, $x \in R$, c) $(3x^2-6) \cos x + (x^3-6x-1) \sin x + c$, $x \in R$, d) $\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{2x^2-3}{4} \sin 2x + c$, $x \in R$, e) $-\frac{9x^2+9x+7}{27} \cos 3x + \frac{2x+1}{9} \sin 3x + c$, $x \in R$, f) $\frac{2x+1}{9} \cos 3x + \frac{9x^2+9x+7}{27} \sin 3x + c$, $x \in R$, g) $\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} 2x + c$, $x \in R$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, h) $\frac{(x+2)^4}{4} \ln(x+1)^6 - \frac{3(x+1)^4}{8} - 2(x+1)^3 - \frac{9(x+1)^2}{2} - 6(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x+1)^6 + c$, $x \in R$, $x \neq -1$, i) $\frac{2x^2-2x-1}{4} e^{2x} + c$, $x \in R$, j) $(x-1)^5 \ln(x+1) - \frac{(x+1)^5}{5} + \frac{5(x+1)^4}{2} - \frac{40(x+1)^3}{3} + 40(x+1)^2 - 80(x+1) + 32 \ln(x+1) + c$, $x \in (-1; \infty)$, k) $-\frac{1}{3} \sqrt{(1-2e^x)^3} + c$, $x \in (-\infty; -\ln 2)$, l) $\frac{x^3-1}{6} \ln(1-x) - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} + c$, $x \in (-\infty; -1)$, m) $\frac{(x+1)^6}{6} \ln(x-2)^4 - \frac{(x-2)^6}{9} - \frac{12(x-2)^5}{5} - \frac{45(x-2)^4}{2} - 120(x-2)^3 - 405(x-2)^2 - 972(x-2) - 243 \ln(x-2)^2 + c$, $x \in R$, $x \neq 2$, n) $\frac{9x^2+3x+8}{27} e^{3x} + c$, $x \in R$, o) $\frac{2}{3} \sqrt{(1+e^x)^3} + c$, $x \in R$.

Literatúra

- [1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce*, 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2000, ISBN 80-204-0607-7.
- [2] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej analýzy*, Bratislava, ŠNTL 1955.
- [3] Blaško R., *Matematická analýza 1*, Žilina, EDIS 2009, ISBN 978-80-554-0119-5.
- [4] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I*, Praha, SNTL ALFA 1985.
- [5] Под редакцией Демидовича Б. П., *Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов*, издание пятое, Москва, НАУКА 1966.
- [6] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, издание девятое, Москва, Издательство НАУКА 1977.
- [7] Demlová M., Nagy J., *Algebra*, Matematika pro VŠT, sešit III, Praha, SNTL 1985.
- [8] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1., 2., 3. a 4. časť*, Bratislava, ALFA 1970–72.
- [9] Frank L. a kolektiv autorů, *Matematika*, Praha, SNTL 1973.
- [10] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky*, Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.
- [11] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. a II. díl*, 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.
- [12] Holenda J., *Řady*, Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.
- [13] Horský Z., *Diferenciální počet*, Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.
- [14] Jarník V., *Integrální počet I, II*, Praha, Nakladatelství ČSAV 1956.
- [15] Jirásek F., Krieglstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky*, Praha, SNTL ALFA 1982.
- [16] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. a II. diel*, Bratislava, SVTL 1965.
- [17] Knichal V., Bašta A., pišl M., rektorys K., *Matematika II*, Praha, SNTL SVTL 1966.

- [18] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I (A—L) a II (M—Ž)*, odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.
- [19] Míka S., *Numerické metody algebry*, Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.
- [20] Mikola M., *Algebra*, 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina 1998.
- [21] Nagy J., Nováková E., Vacek M., *Integrální počet*, Matematika pro VŠT, sešit VI, Praha, SNTL 1984.
- [22] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky*, Praha, SNTL 1976.
- [23] Neubrunn T., Vencko J., *Úvod do matematickej analýzy*, skriptá MFF UK, Bratislava 1981.
- [24] Neubrunn T., Vencko J., *Matematická analýza II*, skriptá MFF UK, Bratislava 1984.
- [25] Prágerová A., *Cvičení z matematiky*, Praha, SNTL ALFA 1987.
- [26] Příkryl P., *Numerické metody matematické analýzy*, Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.
- [27] Šilov G. J., *Matematická analýza*, Bratislava, ALFA 1974.
- [28] Smoljanskij M. L., *Tabulky neurčitých integrálov*, Bratislava, ALFA 1963.
- [29] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*, Bratislava, ALFA SNTL 1987.
- [30] Vitásek E., *Numerické metody*, Praha, SNTL 1987.
- [31] Blaško, R., *Matematická analýza I*,
<http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb/ma1/ma1.htm>, (učebnica MA 1) 2007.
- [32] Drexel University, The Math Forum, <http://mathforum.org/>, Internet Mathematics Library, <http://mathforum.org/library/>.
- [33] EMIS, The European Mathematical Information Service, <http://www.emis.de/>.
- [34] Encyklopédie des Formes Mathématiques Remarquables, <http://www.mathcurve.com/>.
- [35] Excellent Matematika, <http://matematika.host.sk/index2.htm>.
- [36] GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/>.
- [37] Geometry the online learning center, <http://www.geometry.net/>.
- [38] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/>.
- [39] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/>, WolframAlpha – computational knowledge engine, <http://www.wolframalpha.com/>.