

Markovove procesy

Teória hromadnej obsluhy

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

17. októbra 2013

Náhodný reťazec $\{\mathbb{X}(t)\}_{t \in T}$ s množinou stavov S nazveme **Markovov proces**, ak

- 1 množina $T = \langle 0, \infty \rangle$,
- 2 platí Markovova vlastnosť:

$$\forall t_0, t_1, \dots, t_{n+1} \in T : t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1},$$

$$\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S :$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{X}(t_{n+1}) = j | \mathbb{X}(t_n) = i, \mathbb{X}(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, \mathbb{X}(t_0) = i_0) = \\ \mathcal{P}(\mathbb{X}(t_{n+1}) = j | \mathbb{X}(t_n) = i).$$

Ak $\mathbb{X}(t) = i$, potom hovoríme, že proces je v čase t v stave i .

Poznámka

Pojem **Markovov proces** sa používa hlavne v technickej literatúre miesto zdĺhavého názvu **Markovov reťazec so spojitým časom**.

Homogénne Markovove procesy

Markovov proces $\{\mathbb{X}(t)\}_{t \in T}$ nazveme **homogénny** (v čase), ak platí:

$$\forall t_1, t_1 + h, t_2, t_2 + h \in T, \forall i, j \in S :$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{X}(t_1 + h) = j | \mathbb{X}(t_1) = i) = \mathcal{P}(\mathbb{X}(t_2 + h) = j | \mathbb{X}(t_2) = i).$$

Pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j za čas h označíme

$$p_{ij}(h) = \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{X}(t+h) = j | \mathbb{X}(t) = i) & \text{ak } h > 0 \\ 1 & \text{ak } h = 0, i = j \\ 0 & \text{ak } h = 0, i \neq j \end{cases}$$

a usporiadame do **matice pravdepodobností prechodu za čas h**

$$\mathbf{P}(h) = (p_{ij}(h))_{i,j \in S}.$$

Pravdepodobnosť, že sa proces v čase $t \in T$ nachádza v stave $j \in S$ označíme $p_j(t) = \mathcal{P}(\mathbb{X}(t) = j)$ a po usporiadaní v tvare $\mathbf{p}(t) = (p_j(t))_{j \in S}$ nazývame **pp. rozdelenie procesu v čase t** .

Počiatočným rozdelením procesu rozumieme $\mathbf{p}(0)$.

Príklad 2.1

V dvoch urnách je opäť 5 guľičiek. Teraz nás však bude zaujímať chovanie guľičiek v reálnom čase. Nech je na začiatku pozorovania je 1.urna prázdna. Dĺžky časových intervalov medzi jednotlivými zmenami počtu guľičiek v urnách sú náhodné, nezávislé a nie sú ovplyvnené zmenami počtu guľičiek v urnách. Pravdepodobnosť zmien počas intervalu danej dĺžky nezávisí od polohy tohoto intervalu na časovej osi. Navrhňte model, ktorý umožní výpočet stredného počtu guľičiek v 1.urne ako funkciu doby trvania pozorovania.

Nech $\mathbb{X}(t)$ udáva počet guľičiek v 1.urne v čase pozorovania $t \in T$. Jedná sa o homogénny Markovov proces s počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Potom stredný počet guľičiek v 1.urne je v čase t určený vzťahom

$$E(\mathbb{X}(t)) = 1 \cdot p_1(t) + 2 \cdot p_2(t) + 3 \cdot p_3(t) + 4 \cdot p_4(t) + 5 \cdot p_5(t).$$

Veta 2.1

$$\mathbf{P}(r+s) = \mathbf{P}(r)\mathbf{P}(s) \quad \forall r, s \in T. \quad (1)$$

Veta 2.2

$$\mathbf{p}(t+h) = \mathbf{p}(t)\mathbf{P}(h) \quad \forall t, h \in T. \quad (2)$$

Poznámka

Hovoríme, že reálna funkcia reálnej premennej $f(x)$ je pre $x \rightarrow 0$ rádovo menšia než x a zapisujeme $f(x) \equiv o(x)$ pre $x \rightarrow 0$ ak platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Overte, že platí $o(x) + o(x) = o(x)$, $K \cdot o(x) = o(x)$.

Intenzitou prechodu zo stavu i do stavu j rozumieme

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} & \text{ak } i \neq j \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} & \text{ak } i = j \end{cases} \quad (3)$$

a zvykneme usporiadať do **matice intenzít prechodu** $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$,
kde

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{ak } i \neq j \\ -\lambda_{ii} & \text{ak } i = j. \end{cases} \quad (4)$$

Cvičenie:

Z (3), (4) a $\sum_{j \in S} p_{ij}(h) = 1$ overte platnosť rovnosti

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = 0 \quad \forall i \in S.$$

Príklad 2.2 pokračovanie 2.1

Predpokladajme, že intenzity prechodu medzi rôznymi (bezprostredne dostupnými) stavmi urien sú rovnaké a nezávislé od počtu guľčiek v urnách. Definujte v tomto modeli maticú intenzít prechodu a maticu pravdepodobnosti prechodu za veľmi malú dobu Δt .

Všetky možné bezprostredné prechody budú mať konštantnú intenzitu prechodu λ

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

Potom $P(\Delta t) = E + Q \cdot \Delta t + I \cdot o(\Delta t)$ pre malé Δt .

Veta 2.3

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q} \quad \forall t \in T. \quad (5)$$

Dôkaz: Označme $\mathbf{E}$ jednotkovú maticu a $\mathbf{I}$ maticu jednotiek. Z Chapman-Kolmogorovovej vety 2.2 dostaneme

$$\frac{\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{p}(t)\mathbf{P}(\Delta t) - \mathbf{p}(t)\mathbf{E}}{\Delta t} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\mathbf{p}(t)\mathbf{I}.$$

Po limitnom prechode $\Delta t \rightarrow 0^+$ máme tvrdenie vety. •

Príklad 2.3 pokračovanie 2.2

Bude nás zaujímať dynamika chovania guľičiek, ak na začiatku pozorovania je rovnako pravdepodobné, že sú všetky guľičky buď v prvej alebo druhej urne.

Potom systém Kolmogorovových diferenciálnych rovníc má tvar

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \lambda p_1(t)$$

$$p'_1(t) = \lambda p_0(t) - 2\lambda p_1(t) + \lambda p_2(t)$$

$$p'_2(t) = \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t) + \lambda p_3(t)$$

$$p'_3(t) = \lambda p_2(t) - 2\lambda p_3(t) + \lambda p_4(t)$$

$$p'_4(t) = \lambda p_3(t) - 2\lambda p_4(t) + \lambda p_5(t)$$

$$p'_5(t) = \lambda p_4(t) - \lambda p_5(t)$$

s počiatočnými podmienkami $\mathbf{p}(0) = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2})$.

Riešenie $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$

Po úprave na tvar

$$\frac{\mathbf{p}'(t)}{\mathbf{p}(t)} = \mathbf{Q}$$

a integrovaní máme

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}e^{\mathbf{Q}t},$$

kde $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots)$ je konštantný vektor a

$$e^{\mathbf{Q}t} = \mathbf{E} + \frac{t}{1!}\mathbf{Q} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{Q}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{Q}^3 + \dots$$

Potom pre počiatočné rozdelenie procesu $\mathbf{p}(0)$ poznáme explicitný tvar riešenia systému Kolmogorovových diferenciálnych rovníc

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)e^{\mathbf{Q}t}.$$

Stacionárne rozdelenie a regulárny proces

Nech $\mathbf{Q}$ je matica intenzít. Potom vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in S}$ pre ktorý platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} &= \mathbf{0} \\ \sum_{j \in S} \pi_j &= 1 \\ \pi_j &\geq 0 \quad \forall j \in S\end{aligned}$$

nazývame **stacionárne rozdelenie procesu** určeného maticou intenzít $\mathbf{Q}$.

Ak existuje limita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$$

a toto limitné rozdelenie nezávisí na $\mathbf{p}(0)$, potom Markovov proces nazveme **regulárny**.

Veta 2.4

Limitné rozdelenie regulárneho procesu je stacionárne.

Veta 2.5 (Markovova)

Ak existuje $t > 0$, že všetky prvky matice $\mathbf{P}(t)$ sú kladné, potom je príslušný Markovov proces regulárny.

Príklad 2.4 pokračovanie 2.3

Bude nás zaujímať chovania guľičiek v čase keď sa systém stabilizuje.

Hľadáme stacionárne rozdelenie procesu riešením systému lineárnych rovníc

$$0 = -\lambda\pi_0 + \lambda\pi_1$$

$$0 = \lambda\pi_0 - 2\lambda\pi_1 + \lambda\pi_2$$

$$\vdots$$

$$0 = \lambda\pi_3 - 2\lambda\pi_4 + \lambda\pi_5$$

$$0 = \lambda\pi_4 - \lambda\pi_5$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_5$$

ktorý má očakávané riešenie $\mathbf{p}(0) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Je príslušný Markovov proces regulárny?

Prechodový graf Markovovho procesu

Nech $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ je matica intenzít Markovovho procesu s množinou stavov S . Potom **prechodovým grafom procesu** rozumieme hranovo ohodnotený orientovaný graf $G = (S, H, c)$ s množinou vrcholov S , množinou orientovaných hrán

$$H = \{(i, j) \in S \times S : q_{ij} \neq 0\}$$

a ohodnotním hrán $c : H \rightarrow (-\infty, \infty)$ určeného $c(i, j) = q_{ij}$.

Poznámka

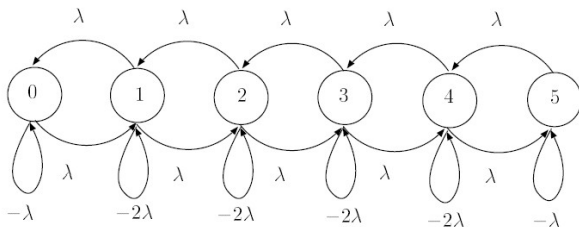
Pre zjednodušenie obrázku prechodového grafu budeme ďalej, ak nebude hroziť nedorozumenie, vynechávať kreslenie slučiek (i, i) . Ich ohodnotenie získame ľahko zo vzťahu

$$q_{ii} = - \sum_{j \in S - \{i\}} q_{ij}.$$

Príklad 2.5 pokračovanie 2.2

Nahradíme maticu $\mathbf{Q}$ intenzít prechodovým grafom G .

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$



Obr. 1: Prechodový graf G so zobrazenými slučkami

Prechodový graf Markovovho reťazca

Nech $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ je matica prechodu Markovovho reťazca s množinou stavov S . Potom **prechodovým grafom reťazca** rozumieme hranovo ohodnotený orientovaný graf $G = (S, H, c)$ s množinou vrcholov S , množinou orientovaných hrán

$$H = \{(i, j) \in S \times S : p_{ij} > 0\}$$

a ohodnotením hrán $c : H \rightarrow (0, 1)$ určeného $c(i, j) = p_{ij}$.

Poznámka

V prípade Markovovho procesu sa niekedy môžeme stretnúť aj s prechodovým grafom $G = (S, H, c)$, kde je ohodnotenie hrán grafu definované takto $c(i, j) = p_{ij}(\Delta t)$. Ako sa zmení obr.1. z príkladu 2.5.?

Význam reprezentácie procesu určného maticou $\mathbf{Q}$ prechodovými grafom G nie je len vo väčšej prehľadnosti prechodov medzi stavmi. Zaujímavá je napr. grafová reformulácia vety 2.5.

Veta 2.5 (Markovova)

Mech $G = (S, H, c)$ je prechodový graf Markovovho procesu s maticou intenzít $\mathbf{Q}$. Ak existuje prirodzené číslo n , že pre ľubovoľnú dvojicu vrcholov $i, j \in S$ existuje orientovaný sled dĺžky n z vrcholu i do vrcholu j , potom je Markovov reťazec regulárny.

Poznámka

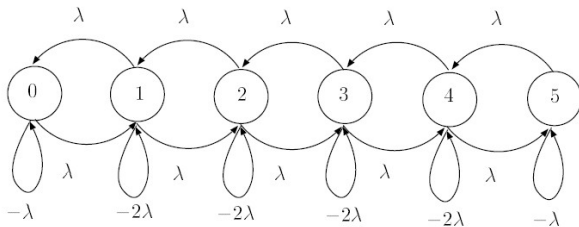
V teórii grafov pod pojmom orientovaný sled dĺžky n z vrcholu v_0 do vrcholu v_n v orientovanom grafe $G = (V, H)$ rozumieme striedavú postupnosť vrcholov a hrán

$$v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), v_2, \dots, (v_{n-1}, v_n), v_n$$

kde $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ a $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n) \in H$.

Príklad 2.6

Ukážte, že Markovov proces z príkladu 2.5 je regulárny.



Obr. 2: Prechodový graf G

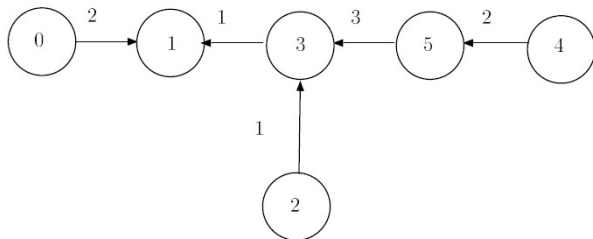
Zvolíme $n = 5$ a ukážeme pre ľubovoľné vrcholy $i, j \in S$ prechodového grafu G existuje orientovaný sled dĺžky 5 z $i \rightarrow j$.
Vzorom takého orientovaného sledu $0 \rightarrow 3$ je

$$0, (0, 1), 1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 3), 3, (3, 3), 3.$$

Analogicky pre ľubovoľný orientovaný $i \rightarrow j$ sled dĺžky 5 pre $|i - j| \leq 5$.

Koreňová kostra v orientovanom grafe

Koreňovou kostrou v orientovanom grafe $G = (V, H, c)$ rozumieme taký orientovaný strom $K = (V, H_K, c)$, $H_K \subseteq H$, ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu, má jediný koreň (vrchol z ktorého nevychádzajú žiadne orientované hrany) a všetky jeho hrany sú orientované do koreňa (každá hrana z H_K leží práve na jednej ceste do koreňa). Ohodnotením kostry K je súčin ohodnotení hrán orientovanej kostry t.j. $c(K) = \prod_{h \in H_K} c(h)$.



Obr. 3: Príklad koreňovej kostry $K = (V, H_K, c)$ s koreňom 1 a ohodnotením $c(K) = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

Veta 2.6 (Marklova,1993)

Nech $G = (S, H, c)$ je silne súvislý prechodový graf Markovovho reťazca/procesu s konečným počtom stavov S . Potom je stacionárne rozdelenie $\pi = (\pi_j)_{j \in S}$ procesu určené vzťahom

$$\pi_j = \frac{B_j}{\sum_{i \in S} B_i}, \quad (6)$$

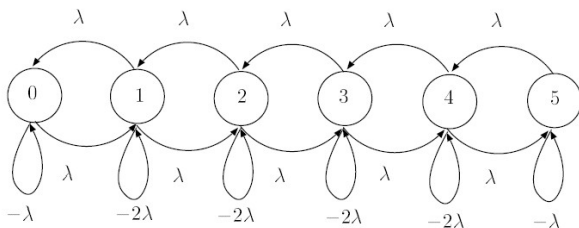
kde B_j je súčtom ohodnotení všetkých koreňových kostier, ktoré majú koreň vo vrchole j .

Poznámka

Pod pojmom silne súvislý orientovaný graf $G = (V, H)$ rozumieme taký orientovaný graf, v ktorom pre ľubovoľné dva rôzne vrcholy $u, v \in V$ existuje orientovaný sled $u \rightarrow v$.

Príklad 2.7

Vypočítajte stacionárne rozdelenie procesu z príkladu 2.5.



Obr. 4: Prechodový graf G

Pre každý vrchol $j \in S = \{0, 1, \dots, 5\}$ existuje jediná orientovaná kostra s koreňom j , ktorá má všetky hrany ohodnotené λ a tak

$$B_j = \lambda^5, \pi_j = \frac{B_j}{\sum_{i \in S} B_i} = \frac{\lambda^5}{6 \cdot \lambda^5} = \frac{1}{6}.$$

Algebraická metóda pre konečné Markovove procesy

V Markovovom procese určenom konečnou množinou stavov $S = \{0, 1, \dots, n\}$ a maticou intenzít $\mathbf{Q}$ hľadáme stacionárne rozdelenie v tvare riešenia systému

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \sum_{j \in S} \pi_j = 1, \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0},$$

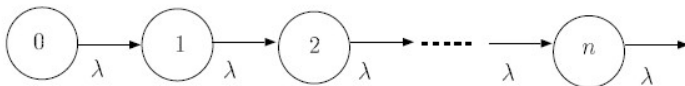
ktoré môžeme prepísať na tvar

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{b}^T, \mathbf{b} = (0, 0, \dots, 0, 1) \Rightarrow \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}^T,$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{10} & q_{20} & \dots & q_{n-1,0} & q_{n0} \\ q_{01} & q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n-1,1} & q_{n1} \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n-1,2} & q_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ q_{0,n-1} & q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \dots & q_{n-1,n-1} & q_{n,n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Homogénnym Poissonovým procesom s parametrom $\lambda, \lambda > 0$ rozumieme homogénny Markovov proces s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ s počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)$ a s nasledujúcim prechodovým grafom



Obr. 5: *Prechodový graf homogénneho Poissonovho procesu*

Poznámka

Ďalej budeme v názve vynechávať slovo „homogénny“ a skracovať len na Poissonov proces. So všeobecnejšími nehomogénnymi Poissonovými procesmi sa nebudeme zaoberať.

Veta 2.7

Nech $\{\mathbb{X}(t)\}_{t \in T}$ je Poissonov proces s parametrom λ . Potom

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \quad \forall j \in S. \quad (7)$$

Dôkaz: Matica intenzít Poissonovho procesu má tvar

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Zo vzťahu $\mathbf{p}(t) = (1, 0, 0, \dots) \cdot e^{\mathbf{Q}t}$ možno pri ;-)) dostatočnej trpezlivosti odvodiť tvrdenie. •

Veta 2.8

Nech $\{\mathbb{X}(t)\}_{t \in T}$ je Poissonov proces s parametrom λ . Potom

$$E(\mathbb{X}(t)) = \lambda t. \quad (8)$$

Dôkaz: Z definície strednej hodnoty a vety 2.7 dostaneme

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}(t)) &= \sum_{j=0}^{\infty} j \mathcal{P}(\mathbb{X}(t) = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} = \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{(j-1)!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} = \\ &= e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot e^{\lambda t} = \lambda t. \end{aligned}$$

•

Poznámka

Parameter λ možno interpretovať ako stredný počet udalostí (zmien stavu) za jednotku času a nazvať **intenzitou Poissonovho procesu**.

Elementárnym tokom udalostí rozumieme náhodnú postupnosť udalostí

$$\{\mathbf{t}_n\}_{n=0}^{\infty} \quad 0 \leq \mathbf{t}_0 \leq \mathbf{t}_1 \leq \mathbf{t}_2 \leq \mathbf{t}_3 \leq \dots,$$

ktorá má nasledujúce vlastnosti:

- 1 **stacionárnosť** – pp., že v intervale $(t, t + \Delta t)$ nastane k udalostí je rovnaké pre každé $t \geq 0$ pri ľubovoľnom $\Delta t \geq 0$ a celočíselnom $k \geq 0$,
- 2 **beznáslednosť** – udalosti nemajú dodatočné pôsobenie, takže pp. výskytu udalosti v intervale $(t, t + \Delta t)$ nezávisí na počte koľkokrát sa udalosti vyskytli do okamihu t ,
- 3 **ordinárnosť** – pp., že sa v časovom intervale $(t, t + \Delta t)$ dĺžky $\Delta t \rightarrow 0$ vyskytnú aspoň dve udalosti je rádu $o(\Delta t)$.

Veta 2.9

Elementárny tok udalostí so stredným počtom udalostí za jednotku času λ je Poissonovým procesom s parametrom λ .

Poznámka

Ak z pozorovania nejakého toku udalostí zistíme, že je stacionárny, beznásledný a ordinárny, vieme že sa jedná o Poissonov proces.

Príklad 2.8

Majiteľ potravín zistil, že v rannej špičke prichádza do potravín priemerne 20 zákazníkov za 5 minút. Majiteľova manželka sa domnieva, že v priebehu 10 minút môžu očakávať príchod 30-tich zákazníkov. Optimistický majiteľ však v priebehu 10 minút očakáva príchod 40-tich zákazníkov. Kto z manželov má presnejší odhad?

Budeme predpokladať, že príchody zákazníkov sú náhodné udalosti a tok zákazníkov je elementárny tok. Zodpovedajúci Poissonov proces má intenzitu $\lambda = \frac{20}{5} = 4$ zák./min. Pp. 30-tich príchodov za 10 minút je rovná

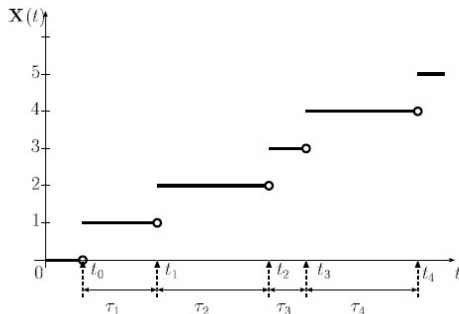
$$p_{30}(10) = \frac{(4 \cdot 10)^{30}}{30!} e^{-4 \cdot 10} = 0.01847$$

a pp. 40-tich príchodov za 10 minút je rovná

$$p_{40}(10) = \frac{(4 \cdot 10)^{40}}{40!} e^{-4 \cdot 10} = 0.06297$$

a tak je odhad majiteľa pravdepodobnejší než odhad jeho manželky.

Medzery elementárneho toku udalostí



Obr. 6: Realizácia elementárneho toku udalostí ako Poissonov proces

Doba medzi dvoma po sebe nasledujúcimi udalosťami sa nazýva **medzera**, medzery budeme modelovať náhodnými veličinami

$$\tau_k = t_k - t_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Veta 2.10

Nech $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ sú medzery elementárneho toku udalostí s intenzitou λ . Potom

$$\mathcal{P}(\tau_k > \tau) = e^{-\lambda\tau} \quad \forall \tau > 0 \quad (10)$$

Dôkaz:

Z definície medzier na obr.6 vidíme že počas trvania medzery k žiadnej ďalšej udalosti nedochádza. Pravdepodobnosť, že τ_k nepresiahne nejakú hodnotu $\tau > 0$ je rovná pp., že počas intervalu dĺžky τ k žiadnej ďalšej udalosti nedôjde. Z homogenity Poissonovho procesu máme

$$\mathcal{P}(\tau_k > \tau) = \mathcal{P}(\mathbb{X}(\tau) = 0 | \mathbb{X}(0) = 0) = \mathcal{P}(\mathbb{X}(\tau) = 0) = p_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}.$$



Dôsledok vety 2.10

Nech $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ sú medzery elementárneho toku udalostí s intenzitou λ . Potom

$$\mathcal{P}(\tau_k > t + \tau | \tau_k > t) = \mathcal{P}(\tau_k > \tau) \quad \forall t, \tau > 0 \quad (11)$$

$$E(\tau_k) = \frac{1}{\lambda}. \quad (12)$$

Dôkaz: Z definície podmienenej pravdepodobnosti a (10)

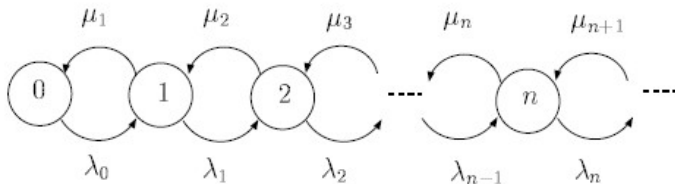
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tau_k > t + \tau | \tau_k > t) &= \frac{\mathcal{P}(\tau_k > t + \tau, \tau_k > t)}{\mathcal{P}(\tau_k > t)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\tau} = \mathcal{P}(\tau_k > \tau). \end{aligned}$$

$$E(\tau_k) = \int_0^\infty t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \dots = \frac{1}{\lambda}.$$



Proces vzniku a zániku

Procesom vzniku a zániku rozumieme homogénny Markovov proces s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ s počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ a s nasledujúcim prechodovým grafom



Obr. 7: Prechodový graf procesu vzniku a zániku

Poznámka

Jedná sa o model populácie, v ktorej z niektorých jedincov vznikajú noví jedinci a iní jedinci postupne zanikajú - odtiaľ tiež alternatívny názov **proces rodenia a úmrťí**.

- 1 **lineárny proces vzniku a zániku** – intenzity prechodu sú lineárnymi funkciami stavov, v ktorých bol systém v predošlom okamihu napr. $\lambda_i = (i + 1)\lambda, \lambda > 0$ pre $i = 0, 1, 2, \dots$ a $\mu_i = i\mu, \mu > 0$ pre $i = 1, 2, \dots$,
- 2 **proces rastu** – keď počet jedincov v systéme s časom len rastie t.j. $\lambda_i > 0$ pre $i = 0, 1, 2, \dots$,
- 3 **proces zániku** – keď počet jedincov v systéme s časom len klesá t.j. $\mu_i > 0$ pre $i = 1, 2, \dots$,
- 4 **konečný proces vzniku a zániku** – u ktorého je množina stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ konečná, a tak $\lambda_i > 0$ pre $i \in S - \{n\}$ a $\mu_i > 0$ pre $i \in S - \{0\}$.

Veta 2.11

Konečný proces vzniku a zániku je regulárny a má stacionárne rozdelenie $\pi = (\pi_j)_{j \in S}$ určené

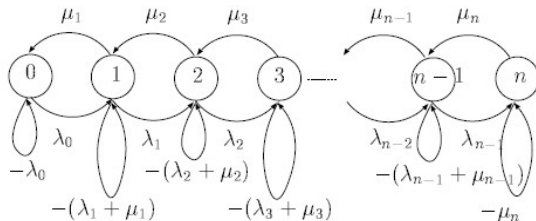
$$\pi_j = \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \quad j \in S - \{0\}, \quad (13)$$

kde

$$\pi_0 = \left(1 - \sum_{j \in S - \{0\}} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Dôkaz:

Ľahko sa presvedčíme, že v prechodovom grafe na obr.8 existuje medzi každou dvojicou vrcholov $i, j \in S, i \neq j$ orientovaný sled dĺžky $n = |S| - 1$. Najkratší sled dĺžky n je $0 \rightarrow n$. Pre ostatné sledy $i \rightarrow j, |i - j| < n$ môžeme využiť slučky na dorovnanie dĺžok. Podľa Markovovej vety 2.5 je proces regulárny.



Obr. 8: Prechodový graf konečného procesu vzniku a zániku

Podľa Marklovej vety 2.6 stačí nájsť všetky koreňové kostry vo vrchoch, no tu existuje pre každý vrchol $j \in S$ jediná kostra s ohodnotením B_j

$$B_0 = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n, \quad B_1 = \lambda_0 \mu_2 \dots \mu_n, \quad \dots$$

$$B_j = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1} \mu_{j+1} \dots \mu_n, \quad \dots, \quad B_n = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$$

Po dosadení do vzorca (6) máme vzťah (13) a z $\frac{\pi_j}{\pi_0} = \frac{B_j}{B_0}$ vzťah (14). ●

Príklad 2.9

Vrátime sa k 5-tim guľičkám. Bude predpokladať, že doba pobytu guľičky v 1. urne má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\mu, \mu > 0$ a v 2. urne má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda, \lambda > 0$. Udalosťou v tomto systéme je preskočenie niektorej guľičky medzi urnami. Stabilizuje sa systém a aký bude stredný počet guľičiek v 1. a 2. urne?

Množinou stavov v takomto systéme je počet guľičiek v 1. urne, teda $S = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$. Ďalej využijeme bezpamäťovú vlastnosť exponenciálneho rozdelenia ktorá zabezpečuje Markovovu vlastnosť modelujúceho procesu. Ak $\tau_1 \sim \text{Exp}(\mu)$ a $\tau_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$ sú doby pobytu guľičiek v 1. a 2. urne, Parametre oboch rozdelení nezávisia na čase a tak sa jedná o homogénny proces.

Vypočítame pp. prechodu pre nejaký dostatočne malý časový interval dĺžky Δt , pričom sa sústredíme len na zmeny stavu vyvolané zmenou polohy **nanajvýš jednej** guľičky. Zmeny polohy viac než jednej guľičky v tomto intervale nastávajú s pp. $o(\Delta t)$.

Príklad 2.9 - pokračovanie I.

Teda $p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$ pre stavy $i, j \in S : |i - j| > 1$.

Pravdepodobnosť, že 1. urna je prázdna a žiadna guľička do nej preskočí je rovná súčinu pp., že guľičky v priebehu časového intervalu dĺžky Δt nezmenia svoju polohu

$$\begin{aligned} p_{00}(\Delta t) &= \mathcal{P}(\tau_2 > \Delta t)^5 + o(\Delta t) = e^{-5\lambda\Delta t} + o(\Delta t) = \\ &= 1 - 5\lambda\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že 1. urna je prázdna a 1 guľička do nej preskočí je rovná súčinu pp., že 1 z 5-tich guľičku v priebehu časového intervalu dĺžky Δt zmení 1 svoju polohu ale ostatné 4 nezmenia

$$\begin{aligned} p_{01}(\Delta t) &= 5\mathcal{P}(\tau_2 \leq \Delta t)\mathcal{P}(\tau_2 > \Delta t)^4 + o(\Delta t) = \\ &= 5(1 - e^{-\lambda\Delta t})(e^{-\lambda\Delta t})^4 + o(\Delta t) = \\ &= 5\lambda\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Potom ak je 1. urne i guľičiek ($1 \leq i \leq 5$) potom analogicky máme

$$\begin{aligned}p_{i,i-1}(\Delta t) &= i(\mathcal{P}(\tau_1 \leq \Delta t)(\mathcal{P}(\tau_1 > \Delta t))^{i-1}\mathcal{P}(\tau_2 > \Delta t)^{5-i} + \dots \\&= i(1 - e^{-\mu\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^{i-1}(e^{-\lambda\Delta t})^{5-i} + o(\Delta t) = \\&= i\mu\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{i,i+1}(\Delta t) &= (5-i)(\mathcal{P}(\tau_2 \leq \Delta t)\mathcal{P}(\tau_1 > \Delta t))^i\mathcal{P}(\tau_2 > \Delta t)^{4-i} + \dots \\&= (5-i)(1 - e^{-\lambda\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^i(e^{-\lambda\Delta t})^{4-i} + o(\Delta t) = \\&= (5-i)\lambda\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{i,i}(\Delta t) &= \mathcal{P}(\tau_1 > \Delta t)^i\mathcal{P}(\tau_2 > \Delta t)^{5-i} + o(\Delta t) = \\&= (e^{-\mu\Delta t})^i(e^{-\lambda\Delta t})^{5-i} + o(\Delta t) = \\&= 1 - (i\mu + (5-i)\lambda)\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

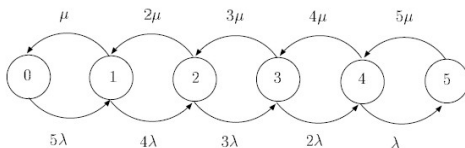
Príklad 2.9 - pokračovanie III.

Pravdepodobnosť že 1. urna je plná a jedna z jej guľičiek preskočí je

$$\begin{aligned}p_{54}(\Delta t) &= 5\mathcal{P}(\tau_1 \leq \Delta t)\mathcal{P}(\tau_1 > \Delta t)^4 + o(\Delta t) \\&= 5(1 - e^{-\mu\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^4 + o(\Delta t) = 5\mu\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

Konečne pp. že 1. urna zostane plná je

$$\begin{aligned}p_{55}(\Delta t) &= \mathcal{P}(\tau_1 > \Delta t)^5 + o(\Delta t) \\&= (e^{-\mu\Delta t})^5 + o(\Delta t) = 1 - 5\mu\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$



Teraz už ľahko zostrojíme prechodový graf a tak sa podľa vety 2.11 systém stabilizuje a výpočet stredného počtu guľičiek v urnách ;-)
môžeme ponechať na cvičenie.

Veta 2.12

Nech pre proces vzniku a zániku s nekonečnou množinou stavov platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} < \infty. \quad (15)$$

Potom je proces regulárny a má stacionárne rozdelenie

$\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j=0}^{\infty}$ určené

$$\pi_j = \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \quad j \geq 1, \quad (16)$$

kde

$$\pi_0 = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \right)^{-1}. \quad (17)$$