Elementárne systémy hromadnej obsluhy

Teória hromadnej obsluhy

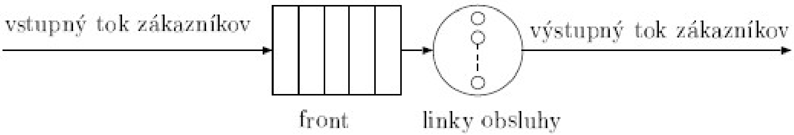
doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

19. októbra 2015

Elementárne systémy hromadnej obsluhy

Do systému v ktorom sa nachádzajú linky obsluhy (obslužné kanály) prichádza vstupný tok zákazníkov požadujúci obsluhu svojich požiadaviek. Obsluha zákazníka trvá istý čas, počas ktorého blokuje linku, ktorá obsluhuje jeho požiadavky. Zákazníci po ukončení obsluhy uvolňujú linku a vytváraju výstupný tok zákaznkov.



Obr. 1: *Základná štruktúra elementárneho SHO*

Ak v okamihu príchodu zákazníka nie je voľná žiadna linka obsluhy, zákazník môže čakať v rade (na ukončenie obsluhy niektorej linky obsluhy), ktorý sa nazýva front.

Charakteristika prvkov SHO

- Vstupný tok zákazníkov je postupnosť príchodov zákazníkov, ktoré nasledujú jedna za druhou v nejakých časových intervaloch. Zákazníci môžu prichádzať jednotlivo alebo v skupinách. Ich počet môže byť ne/obmedzený. Medzery medzi príchodmi môžu byť pravidelné alebo náhodné - vyžadujúce charakteristiky vstupného toku.
- Front je miesto, kde čakajú zákazníci, ktoré nemohli byť ihneď obsluhovaní. Najznámejšie disciplíny čakania vo fronte sú
  - **FIFO** - prvý vstupuje prvý obslúžený,
  - **LIFO** - posledný vstupuje prvý obslúžený,
  - **SIRO** - výber v náhodnom poradí,
  - **PRI** - výber podľa priority.

  Ak je počet miest frontu obmedzený, potom sú neumiestniteľní zákazníci odmietnutí.

- Linka obsluhy poskytuje obsluhu realizáciou požiadaviek zákazníkov. Môže byť poskytovaná jednou alebo viacerými linkami obsluhy, pričomn iektoré linky múžu by špecializované. Doba obsluhy (čas trvania obsluhy) môže byť rovnaká pre všetkých zákazníkov alebo závislá od typu zákazníka alebo náhodná - vtedy vyžadujúce niektoré pravdepodobnostné charakteristiky.
- Výstupný tok zákazníkov je postupnosť okamihov odchodov zákazníkov zo systému. Vo všeobecnosti sú vlastnosti výstupného toku závislé od vstupného toku a režimu frontu a doby obsluhy. Výstupným tokom je potrebné sa zaoberať najmä ak je vstupným tokom ďalšieho SHO.

Poznámka

Efektívnosť činnosti SHO býva charakterizovaná napr. priemerným počtom (priemernou dobou) čakajúcich zákazníkov vo fronte, pomerom odmietnutých a prichádzajúcich zákazníkov ale i ďalšími nákladovými hľadiskami.

Klasifikácie elementárnych SHO

Podľa možnosti vzniku frontu rozlišujeme systémy

- s odmietnutím - bez čakania zákazníka v rade,
- s konečným frontom - s obmedzeným počtom miest v rade,
- s obmedzeným čakaním - s ohraničenou dobou čakania zákazníka v rade,
- s nespoľahlivými linkami - s prerušovnou dobou obluhy zákazníka,
- s nekonečným frontom - neobmedzenou dobou čakania zákazníka v rade.

Podľa typu modelov rozoznávame systémy

- Markovove - nezávislé exponenciálne medzery medzi príchodmi a pdchodmi zákazníkov,
- semimarkovove - s erlangovskými medzerami prichádzajúcich zákazníkov,
- nemarkovove - so všeobecným vstupným tokom zákaznikov a ich dobou obsluhy.

Podľa zdroja vstupného toku zákazníkov rozlišujeme

- otvorené systémy - s neobmedzeným počtom zákazníkov
- uzavreté systémy - s konečným počtom cirkulujúcich zákazníkov,
- zmiešané systémy - kombinácia otvorených a uzavretých systémov,
- siete - zložené z viacerých prepojených systémov elementárnych hromadnej obsluhy, pričom výstupný tok z jedného systému môže byť vstupným tokom druhého systému.

Poznámka

Uvedené delenie sytémov nie je úplné. Ďalšími špecifickými kritériami sú napr. usporiadanie liniek v obsluhe - sériové systémy alebo rôzne druhy priorít liniek alebo zákazníov - prioritné systémy.

Kendallova klasifikácia (1954)

Písmeno	X	Y
M	elementárny tok	exponenciálne rozdelenie
E_r	Erlangov vstupný tok	Erlangovo rozdelenie
D	konštantné medzery toku	konštantná doba
G	všeobecné rozdelenie medzier	všeobevné rozdelenie

Tabuľka 1: *Základné parametre Kendallovej klasifikácie*

Systémy sú označené kombináciou písmen a číslic

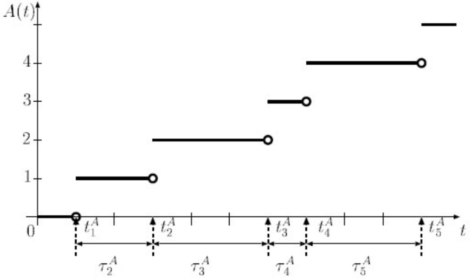
$$\mathbf{X}|\mathbf{Y}|\mathbf{n},$$

kde **X** popisuje vstupný tok zákazníkov, **Y** popisuje dobu obsluhy a **n** udáva počet paralelných liniek obsluhy. V súčasnosti je zaužívaná v anglosaskej literatúre rozšrená Kendallova klasifikácia

$$\mathbf{X}|\mathbf{Y}|\mathbf{n}|\mathbf{m},$$

kde **m** udáva maximálny počet zákazníkov v systéme.

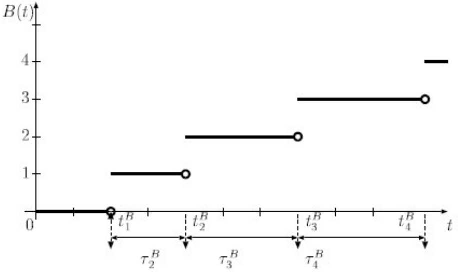
Markovovými systémami budeme rozumieť také SHO, koré možno modelovať homogénnym Markovovým procesom. Nech je S množina stavov homogénneho Markovovho procesu $\{\mathbb{N}(t)\}_{t \in T}$. Stavy procesu tu interpretujeme ako počty zákazníkov v systéme.



Obr. 2: *Realizácia vstupného toku zákazníkov v SHO*

Nech $\{\mathbb{A}(t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces, kde n.v. $\mathbb{A}(t)$ udáva počet príchodov zákazníkov do systému za čas t.

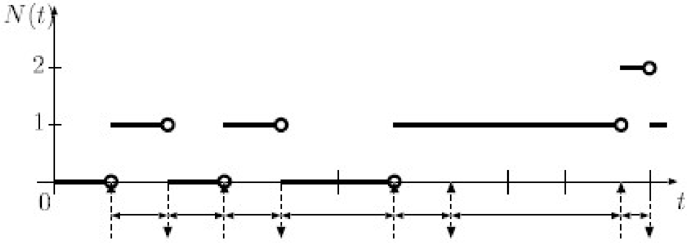
Nech $\{\mathbb{B}(t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces, kde n.v. $\mathbb{B}(t)$ udáva počet odchodov zákazníkov zo systému za čas t.



Obr. 3: *Realizácia výstupného toku zákazníkov v SHO*

Vidme, že n.v. $\mathbb{A}(t)$ resp. $\mathbb{B}(t)$ zväčšujú svoju hodnotu o 1 v práve v čase $\mathbf{t}_i^A$ príchodu / $\mathbf{t}_i^B$ odchodu i-teho zákazníka do/zo systému a platí $\mathbf{t}_i^A \leq \mathbf{t}_i^B$. Ak $\mathbf{t}_i^A = \mathbf{t}_i^B$ potom je i-ty zákazník odmietnutý.

Počet zákazníkov v systéme je tak v čase $t \in T$ modelovaný n.v. $\mathbb{N}(t) = \mathbb{A}(t) - \mathbb{B}(t)$. Tento vzťah sa výhodne využíva pri simulácii SHO, keď vieme základné charakteristiky systému vypočítať len numericky a nie analyticky.



Obr. 4: *Vývoj počtu zákazníkov v SHO*

Pri analytickom riešení chápeme $p_j(t) = \mathcal{P}(\mathbb{N}(t)) = j)$ ako pp. že je v systéme v čase $t \in T$ práve $j \in S$ čakajúcich a obsluhovaných zákazníkov.

Systém považujeme za stabilizovaný ak od istého okamihu je ďalší vývoj systému nezávislý na čase.

Veta 3.1 (Littlova)

Majme stabilizovaný SHO. Nech je λ stredný počet zákazníkov prijatých do systému, $E(\mathbb{N})$ je stredný počet zákazníkov v systéme a $E(\mathbb{T})$ je stredná doba strávená zákazníkom v systéme. Potom platí

$$\lambda = \frac{E(\mathbb{N})}{E(\mathbb{T})}. \tag{1}$$

•

Poznámka

Parameter λ v Littlovej formule je intenzitou vstupného toku prijatých zákazníkov.

Príklad 3.1 pokračovanie 2.8

Majiteľ potravín zistil, že v rannej špičke prichádzajú priemerne do predajne 4 zákazníci za minútu. Majiteľova manželka odhaduje, že priemerný počet zákazníkov v tomto čase je 30 zákazníkov. Aká je priemerná doba strávená zákazníkom v predajni?

Systém budeme považovať v rannej špičke za stabiliovaný. Ak predpokladáme, že všetci zákazníci prichádzajúci do predajne budú obslúžení, potom môžeme modelovať vstupný tok zákazníkov elementárnym tokom s parametrom $\lambda = 4$ zák./min.
Podľa vety 2.9 však možeme modelovať tento proces ako Poissonov proces s parametrom λ a tak stredný počet zákazníkov v predajni je $E(\mathbb{N}) = 30$ zák. Strednú dobu strávenú zákazníkom v predajni $E(\mathbb{T})$ vypočítame podľa (1)

$$E(\mathbb{T}) = \frac{E(\mathbb{N})}{\lambda} = \frac{30\ [zak.]}{4\ [zak./min.]} = 7.5\ [min.]$$

Čo však v prípade keď 5% zákazníkov odchádza znechutených vidiac dlhý rad čakajúcich zákazníkov pri pokladni?

Do jednolinkového SHO prichádzajú zákazníci modelovaní Poissonovým vstupným tokom s parametrom λ a požadujú obsluhu. Doba obsluhy linky má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ. Zákazníci, ktorí nájdu linku obsadenú sa postavia do radu na ktorý sa nekladú žiadne obmedzenia. Predpokladá sa, že zákaznici budú obsluhovaní v poradí prichodov t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Tento systém je príkladom systémov s neohraničeným frontom čo tiež znamená, že doba čakania v takomto systéme je neobmedzená.

Systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbb{N}(t)\}_{t \in T}$ s nekonečnou množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stavy systému interprujeme takto

- 0 - v systéme nie je žiaden zákazník, je prázdny,
- 1 - v systéme je jeden zákazník obsluhovaný linkou obsluhy,
- i - v systéme je 1 obsluhovaný zákazník a $i - 1$ zákazníkov čaká v rade na obsluhu.

V Poissonovom vstupnom toku majú dĺžky medzier $\boldsymbol{\tau}_1$ medzi príchodmi to isté exponenciálne rozdelenie s parametrom λ. Doba obluhy $\boldsymbol{\tau}_2$ má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ a je nezávislá od dĺžok medzier $\boldsymbol{\tau}_1$ elementárneho toku. Spolu s bezpamäťovou vlastnosťou exponenciálneho rozdelenia nám zaručujú Markovovu vlastnosť systému.

Zvyšková doba obsluhy od nejakej udalosti (odchod/príchod zákazníka) má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ.
Prečkaná doba na začatie obluhy nemá vplyv na dobu čakania!
A tak $\boldsymbol{\tau}_1 \sim Exp(\lambda)$ a $\boldsymbol{\tau}_2 \sim Exp(\mu)$.

$M|M|1|\infty$ - výpočet $p_{ij}(\Delta t)$

Vypočítame pp. prechodu za nejaký dostatočne malý časový interval Δt. Vstupný tok zákazníkov je Poissonovým procesom a tak pp. príchodu k zákazníkov je

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = k) = \begin{cases} e^{-\lambda \Delta t} & = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } k = 0 \\ \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} & = \lambda \Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } k = 1 \\ \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t} & = o(\Delta t) & \text{ak } k > 1. \end{cases}$$

Pravdepodobnosť ukončenia obsluhy zákazníka je rovná pp., že doba obsluhy resp. zvyškovej obsluhy $\boldsymbol{\tau}$ je nanajvýš rovná Δt t.j.

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Ďalej sa sústredíme len na zmeny stavu vyvolané príchodom alebo odchodom zákazníka. Zmeny stavu vyvolané viac než jednou takouto udalosťou nastávajú s pp.

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t), |i - j| > 1, i, j \in S.$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a nepríde zákazník je rovná pp. že v priebehu Δt nepríde žiaden zákazník

$$p_{00}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a príde jeden zákazník je rovná pp. že v priebehu Δt príde jeden zákazník

$$p_{01}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a obsluhovaný zákazník opustí systém je rovná pp. že v priebehu Δt žiaden zákazník nepríde a jeden odíde

$$p_{i,i-1}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a práve jeden príde je rovná pp.

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 1)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a žiaden nepríde ani neodíde je rovná pp.

$$p_{ii}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t) = 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t).$$

Dostávame špeciálnu maticu intenzít $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ procesu vzniku a zániku, kde

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i + 1, i \geq 0 \\ \mu & \text{ak } j = i - 1, i > 0 \\ -\lambda & \text{ak } j = i = 0 \\ -(\lambda + \mu) & \text{ak } j = i, i > 0 \\ 0 & \text{ak } |i - j| > 1. \end{cases}$$

$M|M|1|\infty$ - Erlangove vzorce (1909)

Z praktického hľadiska je zaujímavý prípad, keď sa SHO stabilizuje t.j. proces je regulárny, čo podľa vety 2.12 nastáva keď je splnená podmienka (15)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \tag{2}$$

a stacinárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi}$ stavov procesu vypočítame z (16) a (17) v tvare

$$\pi_j = \rho^j(1-\rho). \tag{3}$$

$M|M|1|\infty$ - charakteristiky I.

- $E(\mathbb{N})$ – stredný počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbb{N}) = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j = \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1} =$$

$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) =$$

$$= \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}. \tag{4}$$

- $E(\mathbb{W})$ – stredná doba čakania zákazníkov v systéme, z Littlovej formule máme

$$E(\mathbb{W}) = \frac{E(\mathbb{N})}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}. \tag{5}$$

$M|M|1|\infty$ - charakteristiky II.

- $E(\mathbb{W}_S)$ – stredná doba obsluhy, z definície systému

$$E(\mathbb{W}_S) = \frac{1}{\mu}. \tag{6}$$

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbb{W}_Q) = E(\mathbb{W}) - E(\mathbb{W}_S) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{E(\mathbb{N})}{\mu}. \tag{7}$$

- $E(\mathbb{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich vo fronte, z Littlovej formuly

$$E(\mathbb{N}_Q) = \lambda E(\mathbb{W}_Q) = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \rho E(\mathbb{N}). \tag{8}$$

$M|M|1|\infty$ - charakteristiky III.

- p_S – pp., že zákazník najde voľnú linku

$$p_S = \pi_0 = 1 - \rho. \tag{9}$$

- p_Q – pp., že zákazník bude čakať vo fronte

$$p_Q = 1 - \pi_0 = \rho. \tag{10}$$

- $E(\mathbb{N}_S)$ – stredný počet obsluhovaných zákazníkov

$$E(\mathbb{N}_S) = E(\mathbb{N}) - E(\mathbb{N}_Q) = \rho. \tag{11}$$

- κ – využitie systému

$$\kappa = \rho. \tag{12}$$

Príklad 3.2 – u lekára

K ortopédovi prichádza priemerne 16 pacientov za 8 hodín jeho pracovnej doby. Stredná doba ošetrenia pacienta je 20 minút. Predpokladajme, že pacienti trpezlivo čakajú na ošetrenie a predčasne neodchádzajú. Zistite, či sa takýto systém môže stabilizovať ak je vstupný tok elementárny a doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte využitie lekára, strednú dobu strávenú u lekára a srednú dobu čakania v čakárni.

Vstupný tok pacientov je elementárny to s parametrom $\lambda = \frac{16}{8} = 2$ pacienti za hodinu. Stredná doba obsluhy má exponeciálne rozdelenie a tak je rovná $\frac{1}{\mu} = 20$ [min.] $= \frac{1}{3}$ [hod.]. Nakoľko je $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} < 1$, systém sa po istom čase stabilizuje. Lekár je využitý na $\kappa = \rho = 0.67 = 67\%$. Pacient strávi u lekára priemerne $E(\mathbb{W}) == \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{3-2} = 1$ [hod.] pričom v čakárni čaká priemerne $E(\mathbb{W}_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$ [hod.] $= 40$ minút.

Optimalizačná úloha I.

Nech sú známe tieto náklady na prevádzku obslužného systému za isté obdobie

- c_0 – náklady na údržbu prázdneho systému,
- c_1 – náklady na chod linky obsluhy,
- c_2 – náklady na reklamné akcie na udržanie zákazníka.

Cieľom je nájsť také využitie systému, pri ktoro sú celkové priemerné naklady minimálne.

Kriteriálna funkcia $C(\kappa)$ je funkciou využitia systému κ

$$C(\kappa) = c_0 \cdot \pi_0 + c_1 \cdot (1 - \pi_0) + c_2 \cdot E(\mathbb{N}), \tag{13}$$

ktorá je zložená z priemerných nákladov na údržbu prázdneho systému a chod linky a priemerných nákladov na reklamu. Po dosadení dostávame

$$C(\kappa) = c_0 \cdot (1 - \kappa) + c_1 \cdot \kappa + c.\frac{\kappa}{1 - \kappa}.$$

Optimalizačná úloha I.

Ďalej postupujeme ako je bežné pri hľadaní voľného extrému funkcie jednej premennej

$$\frac{dC(\kappa)}{d\kappa} = -c_0 + c_1 + \frac{c_3}{(1-\kappa)^2} = 0,$$

odkiaľ dostaneme

$$\kappa = 1 - \sqrt{\frac{c_2}{c_0 - c_1}}. \tag{14}$$

Pomocou znamienka druhej derivácie $\frac{d^2C(\kappa)}{d^2\kappa} > 0$ sa môžeme presvedčiť, že sme našli minimum kriteriálnej funkcie. Z prirodzenej podmienky $0 < \kappa < 1$ dostaneme obmedzenie

$$0 < \frac{c_2}{c_0 - c_1} < 1$$

na parametre úlohy c_0, c_1, c_2.

Príklad 3.3 – stavebná firma

Malá stavebná firma, ktorá sa špecializuje na prestavbu bytových jadier, očakáva nasledujúce náklady na svoju prevádzku. Penalizácia úverovou bankou za nečinnosť je 150 tis.Eur, náklady na mzdy zamestnancov sú 50 tis.Eur a náklady na reklamu sú 10 tis.Eur. Za akých podmienok môže firma očakávať minimálne priemerné náklady?

Ak modelujeme firmu ako SHO typu $M|M|1|\infty$, potom môžeme riešiť optimaizačnú úlohu s kriteriálnou funkciou (13) pri nákladoch

$$c_0 = 150\ 000, c_1 = 50\ 000, c_2 = 10\ 000.$$

Po dosadení do (14) dostaneme $\kappa = 0.683 = 68.3\%$ pri ktorých má firma minimálne náklady vo výške $C(\kappa) = 103\ 245.55$ Eur.

Do viaclinkového SHO prichádzajú zákazníci modelovaní Poissonovým vstupným tokom s parametrom λ a požadujú obsluhu na jednej z n liniek obsluhy. Doba obsluhy každej linky má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ. Zákazníci, ktorí nájdu všetky linky obsadené sa postavia do radu. V opačnom prípade začne ich obsluha na niektorej z voľných liniek. Predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní podľa disciplíny čakania **FIFO**.

Systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ s nekonečnou množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stavy systému interprujeme takto

- 0 - v systéme nie je žiaden zákazník, je prázdny,
- $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ - v systéme je obsluhovaných i zákazníkov,
- $i \in \{n+1, n+2, \dots, \infty\}$ - v systéme je obsluhovaných n zákazníkov a $i - n$ zákazníkov čaká v rade na obsluhu.

$M|M|n|\infty$ - výpočet $p_{ij}(\Delta t)$

Viaclinkový systém $M|M|n|\infty$ sa líši od jednolinkového $M|M|1|\infty$ len počtom nezávislých paralelných liniek a tak rozdelenie medzier medzi príchodmi $\boldsymbol{\tau}_1 \sim Exp(\lambda)$ a doby obsluhy resp zvyškovej obsluhy $\boldsymbol{\tau} \sim Exp(\mu)$.

Pri výpočte postupujeme rovnako ako pri jednolinkovom systéme, opäť sústredíme len na prechody vyvolané príchodom alebo odchodom zákazníkov.

Opäť sa sústredíme len na zmeny stavu vyvolané príchodom alebo odchodom zákazníka. Zmeny stavu vyvolané viac než jednou takouto udalosťou nastávajú s pp.

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t), |i - j| > 1, i, j \in S.$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a nepríde zákazník je rovná pp. že v priebehu Δt nepríde žiaden zákazník

$$p_{00}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a príde jeden zákazník je rovná pp. že v priebehu Δt príde jeden zákazník

$$p_{01}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov obsluhovaných $i, 0 < i \leq n$ linkami obsluhy a jeden z nich opustí systém je rovná pp. že v priebehu Δt žiaden zákazník nepríde a jeden odíde

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\Delta t) &= i\mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t)^{i-1} = \\ &= i(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t))(\mu \Delta t + o(\Delta t))(1 - (i-1)\mu \Delta t + \dots) \\ &= i\mu \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov obsluhovaných n linkami obsluhy a jeden z nich opustí systém je rovná pp.

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\Delta t) &= n\mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t)^{i-1} = \\ &= n\mu\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a práve jeden príde je rovná pp.

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 1)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a žíaden zákazník nepríde ani neodíde je rovná pp.

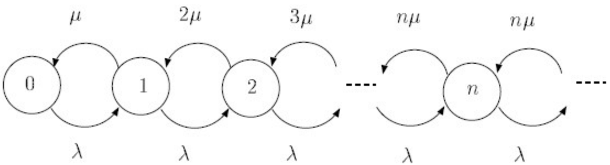
$$p_{ii}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t)^{n} = 1 - (\lambda + i\mu)\Delta t + o(\Delta t)$$

pre $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ a

$p_{ii}(\Delta t) = p_{nn}(\Delta t)$ pre $i \in \{n+1, n+2, \dots\}$.

Dostávame špeciálnu maticu intenzít $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ procesu vzniku a zániku, kde

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i+1, i \geq 0 \\ i\mu & \text{ak } j = i-1, 0 < i \leq n \\ n\mu & \text{ak } j = i-1, i > n \\ -\lambda & \text{ak } j = i = 0 \\ -(\lambda + i\mu) & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n \\ -(\lambda + n\mu) & \text{ak } j = i, i > n \\ 0 & \text{ak } |i-j| > 1. \end{cases}$$



Obr. 5: *Prechodový graf systému $M|M|n|\infty$*

$M|M|n|\infty$ - Erlangove vzorce I.

Z praktického hľadiska je zaujímavý prípad, keď sa SHO stabilizuje t.j. proces je regulárny, čo podľa vety 2.12 nastáva keď je splnená podmienka

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1 \tag{15}$$

a stacinárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi}$ stavov procesu vypočítame z (16) a (17) v tvare

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{(n\rho)^j}{j!}\pi_0, & \text{ak } 0 < j \leq n, \\ \frac{n^n}{n!}\rho^j\pi_0, & \text{ak } j \geq n, \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}\right)^{-1}, & \text{ak } j = 0. \end{cases} \tag{16}$$

$M|M|n|\infty$ - charakteristiky I.

- P_Q – pp. že prichádzajúci zákazník bude čakať v rade

$$P_Q = \sum_{j=n}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi_0 = \pi_0 \frac{n^n}{n!} \frac{\rho^n}{1-\rho} = \frac{\pi_n}{1-\rho}. \tag{17}$$

- $E(\mathbb{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov v rade

$$\begin{aligned} E(\mathbb{N}_Q) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{n^n}{n!} \rho^{n+k} \pi_0 = \frac{n^n}{n!} \rho^n \pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k = \\ &= \frac{n^n}{n!} \pi_0 \rho^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{n^n \rho^{n+1} \pi_0}{n!(1-\rho)^2} = \\ &= P_Q \frac{\rho}{1-\rho}. \end{aligned} \tag{18}$$

$M|M|n|\infty$ - charakteristiky II.

- α – zaťaženie systému

$$\alpha = n\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{19}$$

- $E(\mathbb{N}_S)$ – stredný počet obsadených liniek

$$\begin{aligned} E(\mathbb{N}_S) &= \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_k = 1\frac{\alpha}{1!}\pi_0 + 2\frac{\alpha^2}{2!}\pi_0 + \cdots + n\frac{\alpha^n}{n!}\pi_0 + \\ &+ n\frac{\alpha^n}{n!}\rho\pi_0 + n\frac{\alpha^n}{n!}\rho^2\pi_0 + n\frac{\alpha^n}{n!}\rho^3\pi_0 + \cdots = \\ &= \alpha(\pi_0 + \pi_2 + \ldots \pi_n + \pi_{n+1} + \pi_{n+2} + \pi_{n+3} + \ldots) = \\ &= \alpha. \end{aligned} \tag{20}$$

- κ – využitie systému

$$\kappa = \frac{E(\mathbb{N}_S)}{n} = \frac{\alpha}{n} = \rho. \tag{21}$$

$M|M|n|\infty$ - Erlangove vzorce II.

Vzorce (16) sú aj pre numerický výpočet nepohodlné, preto sa výhodne zavedie substitúcia

$$q_j = \frac{\pi_j}{\pi_0}$$

po ktorej

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0, \\ \frac{\alpha^j}{j!} & \text{ak } 0 < j \leq n, \\ \frac{\alpha^n}{n!}\rho^{j-n} & \text{ak } j > n. \end{cases} \tag{22}$$

a tak

$$\pi_j = \begin{cases} (q_0 + q_1 + q_2 + \dots)^{-1} & \text{ak } j = 0, \\ q_j \pi_0 & \text{ak } j > n. \end{cases} \tag{23}$$

$M|M|n|\infty$ - charakteristiky III.

Pomocou Littlovej formule

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbb{W}_Q) = \frac{E(\mathbb{N}_Q)}{\lambda} = \frac{P_Q \rho}{\lambda(1-\rho)}. \tag{24}$$

- $E(\mathbb{W}_S)$ – stredná doba obsluhy v systéme

$$E(\mathbb{W}_S) = \frac{1}{\mu}. \tag{25}$$

- $E(\mathbb{T})$ – stredná doba pobytu v systéme

$$E(\mathbb{T}) = E(\mathbb{W}_Q) + E(\mathbb{W}_S) = \frac{P_Q \rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}. \tag{26}$$

- $E(\mathbb{N})$ – stredná počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbb{N}) = \lambda E(\mathbb{T}) = E(\mathbb{N}_Q) + E(\mathbb{N}_S). \tag{27}$$

Pokračovanie nabudúce...