Aplikácie teória hromadnej obsluhy

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

11. decembra 2013

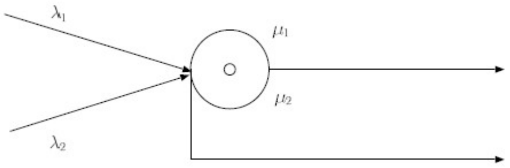
Ak prichádzajúci zákazníci nie sú rovnocenní ale niektorí sú upredností ovaní, hovoríme o linke s prioritnými zákazníkmi. Rozoznávame nasledujúce typy priorít zákazníkov:

- absolútna s odmietaním – prioritný zákazník ukončí obsluhu neprioritného zákazníka, ktorý musí opustiť obsluhu,
- absolútna s opakovaním – prioritný zákazník preruší obsluhu neprioritného zákazníka, ktorý je neskôr doobsluhovaný alebo začne jeho obsluha od začiatku,
- relativna – prioritný zákazník čaká na ukončenie obsluhy neprioritného zákazníka.

Prichádzajúci zákazníci môžu vytvárať front čakajúcich prioritných zákazníkov. Prichádzjúci neprioritný zákazníci sú okamžite obsluhovaní len ak nájdu voľnú linku, inak môžu vytvárať front neprioritných zákazníkov.

$M|M|1|1$ s absolútnou prioritou a odmietaním

Do jednolinkového systému prichádzajú dva elementárne toky zákazníkov. Vstupný tok zákazníkov s absolútnou prioritou má intenzitu λ_1 a tok neprioritných zákazníkov má intenzitu λ_2. Doba obsluhy prioritného resp. neprioritného zákazníka má exponenciálne rozdelenie s parametrami μ_1 resp. μ_2.



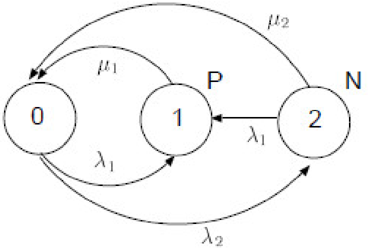
Obr. 1: *Systém $M|M|1|1$ s absolútnou prioritou a odmietaním*

Ak príde do systému prioritný zákazník a najde linku prázdnu, začne jeho obsluha. Ak nájde v systéme iného prioritného zákazníka, bude odmietnutý. Voči obsluhovanému neprioritnému zákazníkovi uplatní absolútnu prioritu a donúti ho ukončiť obsluhu a opustiť systém.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov proces $\{\mathbb{N}(t)\}_{t \in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2\}$, kde

- 0 - v systéme nie je žiaden zákazník, je prázdny,
- 1 - (P), linka obsluhuje prioritného zákazníka,
- 2 - (N), linka obsluhuje neprioritného zákazníka.

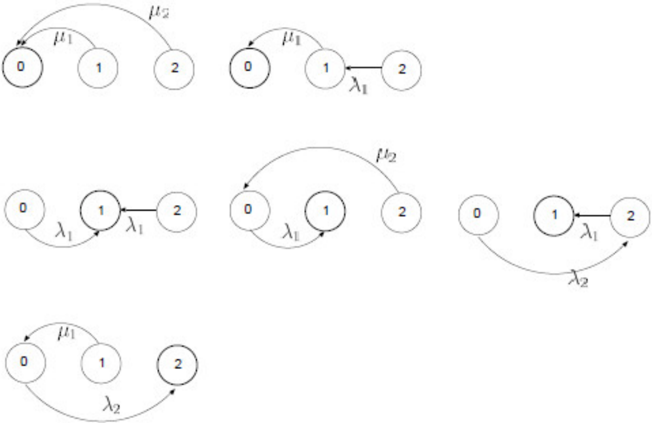
Markovovu vlastnosť zabezpečujú exponeciálne rozdelenia nezávislých medzier medzi príchodmi a nezávislých dôb obslúch.



Obr. 2: *Prechodový graf $M|M|1|1$ s absolútnou prioritou a odmietaním*

Stacionárne rozdelenie stavov

Proces je regulárny a jeho jediné stacionárne rozdelnie môžeme hľadať grafovou metódou.



Obr. 3: *Ohodnotené orientované koreňové kostry prechodového grafu*

Stacionárne rozdelnie stavov (π_0, π_1, π_2) systému

$$\pi_0 = \frac{B_0}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_2)}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)}, \qquad (1)$$

$$\pi_1 = \frac{B_1}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \qquad (2)$$

$$\pi_2 = \frac{B_2}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)}. \qquad (3)$$

Pravdepodobnosť obsluhy prioritného zákazníka π_1 nazávisí od parametrov λ_2, μ_2 neprioritného zákazníka, čo je v zhode so správaním zákazníka s absolútnou prioritou.

Charakteristiky $M|M|1|1$ s abs. prioritou a odmietaním

- κ – využitie systému, linka je využívaná ak nie je prázdna

$$\kappa = 1 - \pi_0. \tag{4}$$

- P_{O1} – pp. odmietnutia prioritného zákazníka. Prioritný zákazník bude odmietnutý len ak nájde v systéme iného prioritného zákazníka.

$$P_{O1} = \pi_1. \tag{5}$$

- P_{O2} – pp. odmietnutia neprioritného zákazníka. Neprioritný zákazník bude odmietnutý ak nastane jav A a nájde linku obsadenú alebo nastane jav B a počas jeho obsluhy príde do systému prioritný zákazník t.j.

$$\mathcal{P}(B) = \pi_0 \int_0^\infty \lambda_1 t e^{-\lambda_1 t} e^{-\mu_2 t} dt.$$

$$P_{O2} = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) = 1 - \pi_0 + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_2)^2} \pi_0. \tag{6}$$

Príklad 4.1

Do stabilizovaného jednolinkového systému s odmietaním prichádzajú elementárne vstupné toky prioritných a neprioritných zákazníkov. Bolo zistené, že je systém využívaný na 80%, z toho 20% zákazníkov nájde v systéme v čase príchodu neprioritného zákazníka. Koľko percent prioritných zákazníkov bude odmietnutých?

Sú známe $\kappa = 0.8, \pi_2 = 0.2$ a hľadá sa P_{01}. Zo vzťahu (2) po substitúcii $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ máme $\pi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}$ a tak

$$\kappa = \pi_1 + \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1} + \pi_2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\kappa - \pi_2}{1 + \pi_2 - \kappa} = \frac{3}{2}.$$

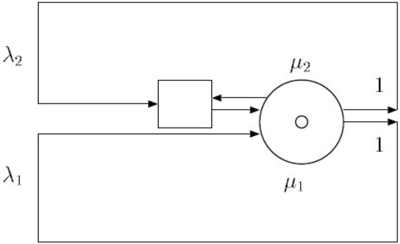
Po dosadení dostaneme

$$P_{O1} = \pi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1} = 0.6,$$

takže 60% prioritných zákazníkov bude odmietnutých.

Uzavretý $M|M|1|2$ s abs. prioritou a opakovanou obsluhou

V jednolinkovom uzavretom syténe cirkulujú dvaja zákazníci, jeden prioritný a druhý neprioritný. Doby pobytu a obsluhy prioritného resp. neprioritného zákazníka mimo systému má exponeciálne rozdelenia s parametrami λ_1, μ_1 resp λ_2, μ_2.



Obr. 4: *Uzavretý systém s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou*

Ak príde do systému prioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá skončí v priemere za dobu $\frac{1}{\mu_1}$.

Ak prioritný zákaznik nájde v linke neprioritného zákazníka, preruší jeho obsluhu a začne obluha prioritného zákazníka, neprioritný zákazník sa vracia do frontu. Keď príde neprioritný zákazník na rad, vykoná sa jeho zvyšková doba obsluhy, ktorá má exponenciálne rozdelnie s parametrom μ_2. Táto doba môže byť opäť prerušená príchodom prioritného zákazníka. Keď prioritný zákazník ukončí obsluhu, opustí systém a po priemernej dobe $\frac{1}{\lambda_1}$ sa do neho vráti a požaduje obsluhu.

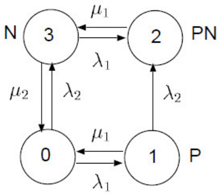
Ak príde do systému neprioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá v prípade neprerušenej exponenciálnej doby obsluhy skončí priemerne za čas $\frac{1}{\mu_2}$. Ak ale nájde v linke prioritného zákazníka, zaradí sa do frontu kde čaká na uvoľnenie linky. Po ukončení obsluhy pobudne mimo systému exponecionálnu dobu v priemernej dĺžke $\frac{1}{\lambda_2}$.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov proces $\{\mathbb{N}(t)\}_{t \in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, kde

- 0 - systém je prázdny, obaja zákazníci sú mimo systému,
- 1 - (P), linka obsluhuje prioritného zákazníka a neprioritný zákazník je mimo systému,
- 2 - (PN), linka obsluhuje prioritného zákazníka a neprioritný zákazník čaká na obsluhu,
- 3 - (N), linka obsluhuje neprioritného zákazníka a prioritný zákazník je mimo systému.

Markovovu vlastnosť procesu zabezpečujú bezpamaťové exponenciálne rozdelnia dôb obslúh a dôb strávených mimo systému.

Prechodový graf a stacionárne rozdelenie stavov



Obr. 5: *Prechodový graf uzavretého $M|M|1|2$ s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou*

Proces je regulárny, stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\frac{B_0}{B}, \frac{B_1}{B}, \frac{B_2}{B}, \frac{B_3}{B})$ nájdeme grafovou metódou, kde

$$B_0 = \mu_1\mu_2(\lambda_2 + \mu_1), \ B_1 = \mu_1\mu_1\lambda_1,$$

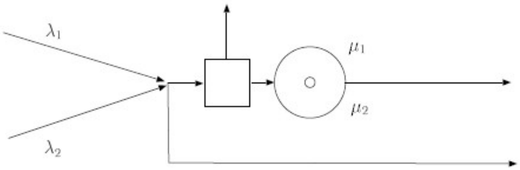
$$B_2 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2), \ B_3 = \mu_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1),$$

$$B = B_0 + B_1 + B_2 + B_3.$$

Pravdepodobnosť pobytu prioritného zákazníka v linke obsluhy $\pi_1 + \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}$ nezávisí na parametroch neprioritného zákazníka.

$M|M|1|2$ s relatívnou prioritou a čakaním

Do jednolinkového sytému prichádzajú dva elementárne toky zákazníkov, jeden prioritný a druhý neprioritný s parametrami λ_1 a λ_2. Doby obslúch prioritného a neprioritného zákazníka sú exponenciálne s parametrami μ_1 a μ_2.



Obr. 6: *Jednolinkový systém s relatívnou prioritou a čakaním*

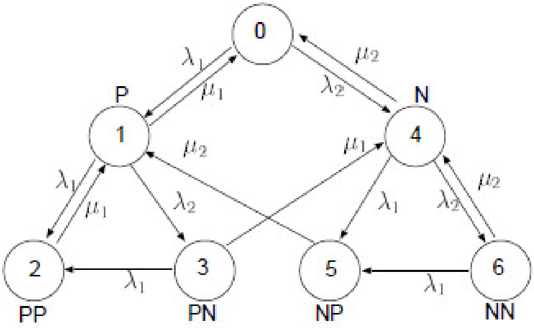
Neprioritný zákaznik bude odmietntý jednak ak nájde systém plný alebo v čase čakania na obsluhu príde prioritný zákazník. Ak však počas obsluhy neprioritného zákazníka príde prioritný zákazník, ktorý nebude odmietnutý, počká na ukončenie obsluhy neprioritného zákazníka.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov proces $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$, kde

- 0 - systém je prázdny,
- 1 - (P), linka obsluhuje prioritného zákazníka a žiaden zákazník nečaká,
- 2 - (PP), linka obsluhuje prioritného zákazníka a jeden prioritný zákazník čaká,
- 3 - (PN), linka obsluhuje prioritného zákazníka a jeden neprioritný zákazník čaká,
- 4 - (N), linka obsluhuje neprioritného zákazníka a žiaden zákazník nečaká,
- 5 - (NP), linka obsluhuje neprioritného zákazníka a jeden prioritný zákazník čaká,
- 6 - (NN), linka obsluhuje neprioritného zákazníka a jeden neprioritný zákazník čaká.

Prechodový graf

Markovovu vlastnosť procesu opäť zabezpečuje bezpamäťová vlastnosť exponenciálnych rozdelení medzier a dôb obslúh.



Obr. 7: *Prechodový graf jednolinkového systému s relatívnou prioritou a čakaním*

Relatívna priorita sa uplatňuje pri prechodoch $6 \longrightarrow 5$ a $3 \longrightarrow 2$.

Stacionárne rozdelenie

Proces je regulárny ale jeho stacionárne rozdelenie už nie je výhodne hľadať grafovou metódou ale riešením systému lineárnych rovníc.

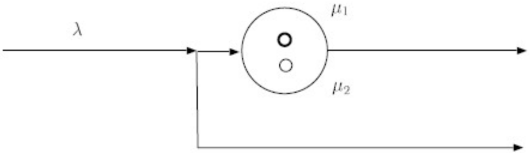
$$
\begin{aligned}
0 &= -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi_0 + \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_4, \\
0 &= \lambda_1\pi_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)\pi_1 + \mu_1\pi_2 + \mu_2\pi_5, \\
0 &= \lambda_1\pi_1 - \mu_1\pi_2 + \lambda_1\pi_3, \\
0 &= \lambda_2\pi_1 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_3, \\
0 &= \lambda_1\pi_4 - \mu_2\pi_5 + \lambda_1\pi_6, \\
1 &= \sum_{i=0}^{6} \pi_i.
\end{aligned}
$$

V prípade nekonečného frontu, $M|M|1|\infty$, sa relatívna priorita uplatňuje len predbiehaním neprioritných zákazníkov. V prípade konečného frontu, $M|M|1|m$, dochádza naviac aj k odmietaniu posledného neprioritného zákazníka.

$M|M|2|2$ s absolútne prioritnou linkou

V prípade obslužných liniek sa uplatňuje v praxi najmä absolutná priorita liniek, ktorá spočíva v uprednostńovaníe prioritnej linky keď je to možné. Ak začne obsluhu zákazníka neprioritná linka, potom ju ukončí aj v prípade uvolnenia prioritnej linky.

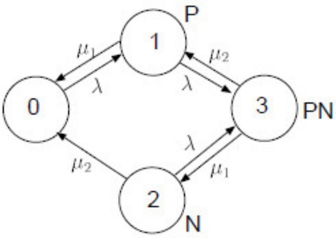
Do systému $M|M|2|2$ prichádza elementárny tok zákazníkov s parametrom λ. Doba obsluhy prioritnej resp. nepriritnej linky je exponeciálna s parametrom μ_1 resp. μ_2. Zákazníci si prednostne vyberajú prioritnú linku ak je to možné. Zákazníci ktorí nájdu obe linky obsadené sú odmietnutí.



Obr. 8: *Dvojlinkový systém s absolútne prioritnou linkou*

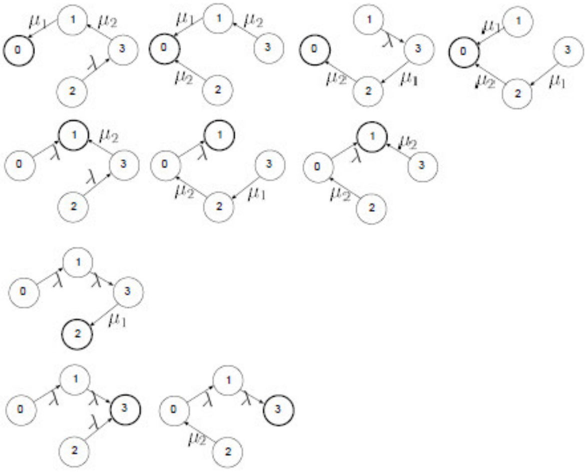
Systém možno modelovať ako homogénny Markovov proces $\{\mathbb{N}(t)\}_{t \in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, kde

- 0 - systém je prázdny,
- 1 - (P), len prioritná linka obsluhuje zákazníka,
- 2 - (N), len neprioritná linka obsluhuje zákazníka,
- 3 - (PN), obe linky sú obsadené.



Obr. 9: *Prechodový graf dvojlinkového systému s odmietaním a absolútne prioritnou linkou*

Proces je regulárny a jeho stacionárne riešenie môžeme hľadať grafovou metódou.



Obr. 10: *Ohodnotené koreňové kostry grafovej metódy*

Zo súčtov ohodntení koreňových kostier vo vrcholoch

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2),\\
B_1 &= \lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2),\\
B_2 &= \lambda\mu_1,\\
B_3 &= \lambda^2(\lambda+\mu_2),\\
B &= B_0+B_1+B_2+B_3.
\end{aligned}
$$

dostaneme stacionárne rozdelenie stavov $\boldsymbol{\pi} = (\frac{B_0}{B}, \frac{B_1}{B}, \frac{B_2}{B}, \frac{B_3}{B})$

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\beta_1\beta_2(2+\beta_1+\beta_2)}{\beta},\\
\pi_1 &= \frac{\beta_2(1+\beta_1+\beta_2)}{\beta},\\
\pi_2 &= \frac{\beta_1}{\beta}, \quad \pi_3 = \frac{1+\beta_2)}{\beta},
\end{aligned}
$$

kde $\beta_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, i = 1,2$ a $\beta = (1+\beta_1+\beta_2)(1+\beta_2+\beta_1\beta_2)+\beta_1\beta_2$.

Charakteristiky $M|M|2|2$ s absolútne prioritnou linkou

- P_Z – pp. zamietnutia zákazníka

$$P_Z = \pi_3. \tag{7}$$

- κ_1 – využitie prioritnej linky

$$\kappa_1 = \pi_1 + \pi_3. \tag{8}$$

- κ_2 – využitie neprioritnej linky

$$\kappa_2 = \pi_2 + \pi_3. \tag{9}$$

- κ – využitie sytému

$$\kappa = \frac{\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3}{2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \tag{10}$$

Príklad 4.2

Do stabilizovaného systému $M|M|2|2$ prichádzajú s intenzitou $\lambda_1 = 18$ zák./hod. pri intezite prioritnej linky $\mu_1 = 12$ zák./hod. a nepriorietnej linky $\mu_2 = 6$ zák./hod.

Pri akej intezite obsluhy μ systému $M|M|2|2$ s neprioritnými linkami budú mať oba systémy rovnaké využitie? Porovnajte pravdepodobosti zamietnutia zákazníkov v oboch systémoch.

Príklad 4.3

Vytvorte prechodový graf systému $M|M|2|2$ s prioritnou linkou a tokom prioritných zákazníkov s absolútnou prioritou. Odvoďte stacionárne rozdelnie stavov a základné charakteristiky takéhoto systému.

Mnohé reálne SHO nespĺňajú predpoklady markovových modelov. Medzery medzi príchodmi nie sú nezávislé a nemajú to isté exponenciálne rozdelenie, alebo doby obslúch nemajú exponenciálne rozdelenie. Exponenciálne rozdelenie týchto veličín je nahradené Erlangovým rozdelením $E(n, \gamma)$ s parametrami n (prirodzené číslo) a $\gamma, (\gamma > 0)$, ktoré je určené hustotou

$$f_{n,\gamma}(t) = \frac{\gamma^n t^{n-1} e^{-\gamma t}}{(n-1)!} \; pre \; t \in \langle 0, \infty). \tag{11}$$

Poznámka

Erlangovo rozdelenie $E(n, \gamma)$ je špeciálny prípad gamma rozdelenia $\Gamma(a, \gamma)$, kde parameter a je prirodzené číslo.

Náhodnú veličinu $\xi \sim E(n, n\beta)$ možno chápať ako súčet n nezávislých náhodných veličín ξ_i s tým istým exponenciálnym rozdelením $\xi_i \sim Exp(n\beta)$

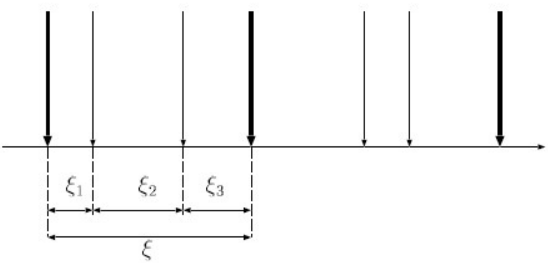
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Výhodou modelovania pomocou dvojparametrovej n.v. ξ je interpretácia jej charakteristík $E(\xi) = \frac{1}{\beta}$ a $D(\xi) = \frac{1}{n\beta^2}$.

- Vstupný tok zákazníkov má medzery medzi príchodmi zákazníkov $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ tvorené náhodnými veličinamis tým istým Erlangovým rozdelením s parametrami $r, r\lambda$ t.j. $\tau_k \sim E(r, r\lambda)$. Takýto vstupný tok sa nazýva Erlangov vstupný tok $E_r(\lambda)$.
- Doba obsluhy každej linky obsluhy τ má zhodné Erlangovo rozdelenie s parametrami $s, s\mu$ t.j. $\tau \sim E(s, s\mu)$.

Riedenie elementárneho toku

Erlangov tok $E_r(\lambda)$ môžeme získať riedením elemetárneho toku takto: Z elemetárneho toku s intenzitou $r\lambda$ vyberieme každého $(r+1)$ - tého zákazníka. Vzniknuté medzery medzi nimi sú súčtom r medzier elementárneho toku.

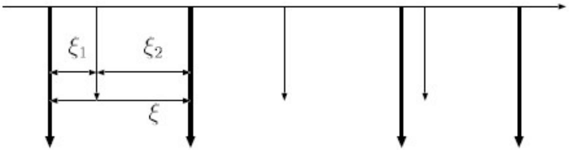


Obr. 11: *Vznik Erlangovho toku $E_3(\lambda)$ riedením elementárneho toku s parametrom λ*

Uvedený postup však neznamená, že Erlangov tok vzniká výlučne riedením elementárneho toku.

Vstup zákazníkov v Erlagovom toku $E_r(\lambda)$ si môžeme predstaviť tak, že jeho príchod je zložený z r fáz vstupu zákazníka, pričom zákazník príde do systému až v okamihu ukončenia r-tej fázy vstupu. Intenzita jednej fázy vstupu je $r\lambda$. Takýto tok sa tiež nazýva r-fázový Erlangov tok.

Aj Erlangovu dobu obsluhy $E_s(\mu)$ so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$ si môžeme obdobne rozfázovať. Namiesto vykonania Erlangovskej doby obsluhy sa vykoná s exponenciálnych fáz obsluhy so strednou dobou $\frac{1}{s\mu}$.



Obr. 12: *Fázy Erlangovej doby obsluhy* $E_2(\mu)$

Ak teda vstup a obsluhu zákazníka rozfázujeme a za udalosť považujeme absolvovanie ktorejkoľvek fázy, dostávame markovov model. To je aj dôvod prečo hovoríme o semimarkovových SHO.

Analýza viaclinkových semimarkovových systémov je pomerne zložitá, preto sa ďalej obmedzíme len na základné jednolinkové systémy.

Poznámka

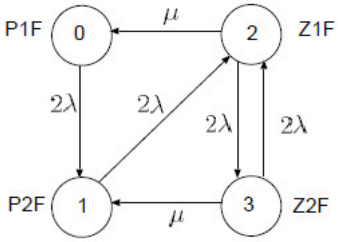
Môžeme písať $E_1 = M$, pretože $E(1, \beta) = Exp(\beta)$.

Do jednolinkového systému so stratami prichádza dvojfázový Erlangov vstupný tok zákazníkov s intenzitou λ, doba obsluhy jedinej linky obsluhy má exponeciálne rozdelenie s parametrom μ.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov proces $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, kde

- 0 (P1F) - systém je prázdny pred prvou fázou príchodu zákazníka,
- 1 (P2F) - systém je prázdny pred druhou fázou príchodu zákazníka,
- 2 (Z1F) - linka obsluhuje zákazníka pre prvou fázou príchodu ďalšieho zákazníka,
- 3 (Z2F) - linka obsluhuje zákazníka pre druhou fázou príchodu ďalšieho zákazníka.

Pravdepodobnosť prechodu $p_{32}(\Delta t) = 2\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ zodpovedá situácii, keď sa v časovom intervale Δt nestihne uvolniť linka a je ukončená druhá fáza príchodu zákazníka.



Obr. 13: *Prechodový graf systému* $E_2|M|1|1$

Stacionárne rozdelenie $E_2|M|1|1$

Proces je regulárny a tak jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ získame z riešenia systému rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= -2\lambda\pi_0 + \mu\pi_1, \\ 0 &= 2\lambda\pi_0 - 2\lambda\pi_1 + \mu\pi_3, \\ 0 &= -(2\lambda + \mu)\pi_3 + 2\lambda\pi_2, \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, \end{aligned}$$

odkiaľ pri zaťažení sytsému $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{2(1+2\alpha)}, \quad \pi_1 = \frac{1+4\alpha}{2(1+2\alpha)^2}, \\ \pi_2 &= \frac{\alpha}{1+2\alpha}, \qquad \pi_3 = \frac{2\alpha^2}{(1+2\alpha)^2}. \end{aligned}$$

- P_{0Z} – pp. že systém je prázdny

$$P_{0Z} = \pi_0 + \pi_1. \tag{12}$$

- P_{1Z} – pp. že linka obsluhuje zákazníka, ale tiež pp. že zákazník bude odmietnutý

$$P_{1Z} = \pi_2 + \pi_3. \tag{13}$$

- κ – využitie systému (linky obsluhy). Linka je využívaná pokiaľ systém nie je prázdny

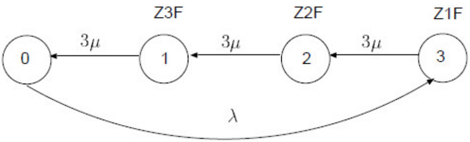
$$\kappa = 1 - P_{0Z} = P_{1Z}. \tag{14}$$

$M|E_3|1|1$

Do jednolinkového systému so stratami prichádza elementárny tok zákazníkov s parametrom λ, doba obsluhy jedinej linky obsluhy trojfázové Erlangovo rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\mu}$.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov proces $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, kde

- 0 - systém je prázdny ,
- 1 (Z3F) - linka je v tretej fáze obsluhy zákazníka,
- 2 (Z2F) - linka je v druhej fáze obsluhy zákazníka,
- 3 (Z1F) - linka je v prvej fáze obsluhy zákazníka.



Obr. 14: *Prechodový graf systému $M|E_3|1|1$*

Proces je regulárny a tak jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ získame grafovou metódou

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{\alpha}{3(1+\alpha)}.$$

- P_{0Z} – pp. že systém je prázdny

$$P_{0Z} = \pi_0 = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{15}$$

- P_{1Z} – pp. že linka obsluhuje zákazníka, ale tiež pp. že zákazník bude odmietnutý

$$P_{1Z} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{16}$$

- κ – využitie systému (linky obsluhy). Linka je využívaná pokiaľ systém nie je prázdny

$$\kappa = 1 - P_{0Z} = P_{1Z}. \tag{17}$$

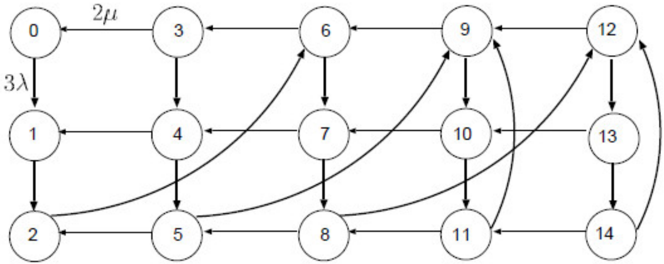
$E_3|E_2|1|2$

Do jednolinkového systému s jednnomiestnym frontom prichádza trojfázový Erlangov vstupný tok zákazníkov s intenzitou λ, doba obsluhy jedinej linky obsluhy má dvojfázové Erlangovo rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\mu}$.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov proces $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, 14\}$, kde stav $k \in S$ interpretujeme takto

- $k \in \{0, 1, 2\}$ - systém je prázdny pred $(k+1)$-tou fázou vstupu zákazníka,
- $k \in \{3, 4, 5\}$ - v systém je jeden zákazník pred 3-ťou fázou obsluhy a $(k-2)$-tou fázou vstupu zákazníka
- $k \in \{6, 7, 8\}$ - v systém je jeden zákazník pred 2-ťou fázou obsluhy a $(k-5)$-tou fázou vstupu zákazníka
- $k \in \{9, 10, \dots, 14\}$ - v systéme sú dvaja zákazníci s fázami ako v stavoch $\{3, 4, \dots, 8\}$.

Prechodový graf



Obr. 15: *Prechodový graf systému* $E_3|E_2|1|2$

Proces je regulárny a stacionárne rozloženie stavov $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{14})$ možno získať algebraickou metódou.

Charakteristiky $E_3|E_2|1|2$

- P_{0Z} – pp. že systém je prázdny

$$P_{0Z} = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2. \tag{18}$$

- P_{1Z} – pp. že linka obsluhuje zákazníka

$$P_{1Z} = \pi_3 + \pi_4 + \cdots + \pi_8. \tag{19}$$

- P_{2Z} – pp. že linka obsluhuje zákazníka a jeden zákazník čaká, ale tiež pp. že zákazník bude odmietnutý resp. stredný počet zákazníkov čakajuci vo fronte

$$P_{2Z} = E(\mathbb{N}_Q) = \pi_9 + \pi_{10} + \cdots + \pi_{14}. \tag{20}$$

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbb{W}_Q) = \frac{E(\mathbb{N}_Q)}{\lambda(1 - P_{2Z})}. \tag{21}$$

Nemarkovove systémy hromadnej obsluhy

V praktických aplikáciách sa často stretávame so situáciami, keď je nevyhnutné upustiť od makovových resp. semimarkovových predpokladov na medzery medzi príchodmi či doby obslúh.

V inžinierskej praxi sa takéto nemarkovove modeli riešia simulačnými metódami, keď sa štatisticky vyhodnocujú realizácie náhodných procesov príchodov a odchodov zákazníkov. Výsledkom sú tabuľky, nie vzorce, ktoré môžu sťažiť hlavne následnú optimalizáciu niektorých charakteristík SHO.

To však neznamená, že nie sú známe niektoré analytické výsledky v špeciálnych prípadoch.

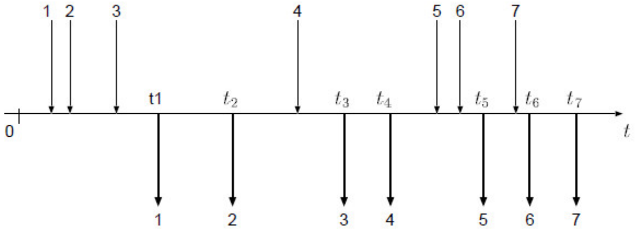
V tomto jednolinkovom systéme s neohraničeným frontom predpokladáme, že vstupný tok zákazníkov je elementárny s parametrom λ a doba obsluhy linkou má všobecné rozdelenie určené distribučnou funkciou $G(t)$ s konečnou strednou dobou obdluhy τ a konečným rozptylom σ^2, t.j. v prípade spojitej náhodnej veličiny určenej hustotou $g(t)$ je

$$\tau = \int_0^{\infty} t\, g(t)\, dt, \quad \sigma^2 = \int_0^{\infty} (t-\tau)^2 g(t)\, dt. \tag{22}$$

Predpokladá sa, že zákazníci sú obsluhovaní v poradí prichodov t.j. podľa disciplíny frontu **FIFO**.

Problémom tohoto modelu je, že doba obsluhy a teda ani zvyšková doba obsluhy nemá bezpamäťovú vlastnosť a tak nemožno tento systém modelovať Markovovým procesom. Ale podľa predpokladu majú medzery medzi príchodmi bezpamäťové exponenciálne rozdelenie.

Systém tak možno modelovať vloženým Markovovým reťazcom $\{\mathbb{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, \ldots\}$, ktorého stav n interpretujeme ako počet zákazníkov v čase odchodu n-tého zákazníka $t_n \in T$.



Obr. 16: *Simulácia systému $M|G|1|\infty$*

Maticu prechodu **P** vloženého reťazca možno popísať pomocou náhodnej veličiny $\mathbb{Y}_n$ udávajúcej počet príchodov zákazníkov počas obsluhy n-tého zákazníka, pričom

$$f_k = \mathcal{P}(\mathbb{Y}_n = k) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} g(t)\, dt \tag{23}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_3 & f_4 & \dots \\ f_0 & f_1 & f_3 & f_4 & \dots \\ 0 & f_0 & f_1 & f_3 & \dots \\ 0 & 0 & f_0 & f_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & f_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Chinčin-Polatzekova formula

Ak $\rho = \lambda\tau < 1$ potom je reťazec $\{\mathbb{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ regulárny a jeho stacionárne riešenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ by sme mohli vypočítať z riešenia nekonečného systému lineárnych rovníc $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ s normalizačnou podmienkou $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$.

- $E(\mathbb{N})$ – stredný počet zákazníkov v systéme. Vzorec je známy ako Chinčin-Polatzekova formula

$$E(\mathbb{N}) = \frac{\lambda^2(\tau^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)} + \rho. \tag{24}$$

- $E(\mathbb{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte

$$E(\mathbb{N}_Q) = \frac{\lambda^2(\tau^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)}. \tag{25}$$

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbb{W}_Q) = \frac{\lambda(\tau^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)}. \tag{26}$$

V prípade systému s deterministickou dobou obsluhy τ dostávame charakteristiky

- $E(\mathbb{N})$ – stredný počet zákazníkov v systéme.

$$E(\mathbb{N}) = \frac{\lambda^2\tau^2}{2(1-\rho)} + \rho = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}. \tag{27}$$

- $E(\mathbb{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte

$$E(\mathbb{N}_Q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}. \tag{28}$$

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbb{W}_Q) = \frac{\tau\rho}{2(1-\rho)}. \tag{29}$$

A to je koniec ;-)