Antagonistický konflikt

Štefan Peško

Katedra matematických metód, FRI ŽU

25. február 2014

Matematickým modelom **antagonistického konfliktu** je hra 2 hráčov s konštantným súčtom. Stratégie hráčov sú tu založená na zásade:

Kto sa odchýli nemôže si prilepšiť.

Žiadna odchylka od garantovanej stratégie hráča nemôže priniesť hráčom výhodu za predpokladu, že aj súper zachováva túto stratégiu.

Definícia 2.1

Nech

$$\mathcal{H}_K = (Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M_1(x,y), M_2(x,y)) \tag{1}$$

je hra s konštantným súčtom. Stratégie $x^* \in \mathcal{X}$ a $y^* \in \mathcal{Y}$ nazveme **rovnovážne**, ak pre $\forall x \in \mathcal{X}$ a $\forall y \in \mathcal{Y}$ je

$$M_1(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*), \tag{2}$$

$$M_2(x^*, y) \leq M_2(x^*, y^*). \tag{3}$$

Dvojicu (x^*, y^*) budeme nazývať **rovnovážna stratégia hry**.

Definícia 2.1 (pokračovanie)

Ak je

$$\mathcal{H}_0 = (Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M(x,y)) \tag{4}$$

hra s nulovým súčtom, potom nerovnosti prepíšeme

$$M(x,y^*) \le M(x^*,y^*) \le M(x^*,y). \tag{5}$$

Číslo $M(x^*,y^*)$ nazývame **cena hry**.

Príklad 2.1

Máme nekonečnú hru 2 hráčov s nulovým súčtom

$$\mathcal{H}_0 = (\{1,2\}, <0,1>, \{-1,0,1\}, x+y).$$

Rovnovážne stratégie hráčov $x^* = 1, y^* = -1$ *vyhovujú*

$$x + y^* \le x^* + y^* \le x^* + y.$$

V hre $\mathcal{H}_0$ je rovnovážna stratégia $(x^*, y^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ je **sedlovým bodom** funkcie $M(x, y)$ s definičným oborom $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Možno ukázať, že potom platí

$$x^* = arg \max_{x \in \mathcal{X}} M(x, y^*),$$

$$y^* = arg \min_{y \in \mathcal{Y}} M(x^*, y).$$

Veta 2.1

Majme hru s konštantným súčtom K

$$\mathcal{H}_K = \big(Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M_1(x,y), M_2(x,y)\big) \tag{6}$$

a hru s nulovým súčtom

$$\mathcal{H}_0 = \big(Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M_1(x,y) - M_2(x,y)\big). \tag{7}$$

Potom (x^*, y^*) *je rovnovážnou stratégiou hry* $\mathcal{H}_K$ *práve vtedy keď je aj rovnovážnou stratégiou hry* $\mathcal{H}_0$.

Dôkaz vety 2.1 ($\Rightarrow$)

Nech (x^*, y^*) rovnovážna stratégia v hre $\mathcal{H}_K$. Potom po odčítani $M_2(x, y^*)$ od oboch strán nerovnosti (2) dostaneme

$$M_1(x, y^*) - M_2(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*) - M_2(x, y^*).$$

Z podmienky (2) a predpokladu že ide o hru so súčtom K

$$-M_2(x, y^*) \leq -M_2(x^*, y^*).$$

Po úpravach z odvodených nerovností

$$M_1(x, y^*) - M_2(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*) - M_2(x^*, y^*).$$

Analogicky sa z (3) odvodí

$$M_1(x^*, y^*) - M_2(x^*, y^*) \leq M_1(x^*, y) - M_2(x^*, y)$$

a tak je (x^*, y^*) rovnovážna stratégia v hre $\mathcal{H}_0$.

Dôkaz vety 2.1 ($\Leftarrow$)

Nech (x^*, y^*) rovnovážna stratégia v hre $\mathcal{H}_0$ t.j.

$$M_1(x, y^*) - M_2(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*) - M_2(x^*, y^*) \leq M_1(x^*, y) - M_2(x^*, y)$$

Hra $\mathcal{H}_K$ je hra s konštantným súčtom K a tak po dosadení do ľavej časti nerovnosti

$$M_1(x, y^*) - (K - M_1(x, y^*)) \leq M_1(x^*, y^*) - (K - M_1(x^*, y^*))$$

dostaneme pre 1. hráča

$$M_1(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*).$$

Podobne z pravej časti nerovnosti dostaneme pre 2. hráča

$$M_2(x^*, y) \leq M_2(x^*, y^*)$$

a tak je (x^*, y^*) rovnovážna stratégia aj v hre $\mathcal{H}_K$.

Príklad 2.1 (O trhoch – 1. pokračovanie)

Dve firmy A a B súťažia o trhy v n krajinách. Firmy A,B už investovali čiastky $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$ a chcú ešte investovať do reklamy a rozvoja služieb čiastky a, b. Predpokladá sa, že obe firmy investujú rovnako efektívne a tak celkový objem objednávok i-tej krajiny s_i sa rozdelí proporcionálne k investovaným sumám. Ako majú firmy optimálne investovať čiastky a, b ?

$$\mathcal{H}_K = \big(Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M_A(x,y), M_B(x,y)\big),$$

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in E_n : \sum_{j=1}^{n} x_j = a, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},\ \mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in E_n : \sum_{j=1}^{n} y_j = b, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\},$$

$$M_A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + x_i)s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i},\ M_B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(b_i + y_i)s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i},$$

$$\mathcal{H}_0 = \left(Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + x_i - b_i - y_i)s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}\right).$$

Definícia 2.2

Hra s nulovým súčtom

$$\mathcal{H}_S = \big(Q = \{1, 2\}, \mathcal{X}, \mathcal{X}, M(x, y)\big) \tag{8}$$

pre ktorú pre všetky $x \in \mathcal{X}$ a $y \in \mathcal{X}$

$$M(x, y) = -M(y, x) \tag{9}$$

sa nazýva **symetrická hra**.

Príklad 2.2 (O trhoch – 2. pokračovanie)

Ak obe firmy ešte neinvestovali do trhov žiadne čiastky a plánujú investovať zhodne čiastku a potom sa jedná o symetrickú hru so zhodnými priestormi stratégií oboch firiem

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in E_n : \sum_{j=1}^{n} x_j = a, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},\ M(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - y_i)s_i}{x_i + y_i}.$$

Potom sú rovnovážne stratégie hráčov zhodné $\mathbf{x}^* = \left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}\right)$

Veta 2.2

Ak má symetrická hra rovnovážnu stratégiu, potom sú stratégie oboch hráčov rovnaké a cena hry je nulová.

Pre každdú stratégiu (x, y) hry $\mathcal{H}_S$ je $M(x, y) = -M(y, x)$. Ak existuje rovnovážna stratégia (x^*, y^*) tejto hry potom

$$M(x, y^*) \leq M(x^*, y^*) \leq M(x^*, y),$$

čo možno prepísať

$$-M(y^*, x) \leq -M(y^*, x^*) \leq -M(y, x^*),$$

odkiaľ

$$M(y, x^*) \leq M(y^*, x^*) \leq M(y^*, x),$$

a (y^*, x^*) je tiež rovnovážna stratégia hry.

Cena hry je $M(x^*, x^*) = 0$ lebo $M(x^*, x^*) = -M(x^*, x^*)$.

Príklad 2.2 (Symetrická hra sudoku)

Máme hracie pole sudoku 9×9*, ktoré obsahuje aspoň* N *voľných polí pričom ostatné sú prípustne vyplnené. Dvaja hráči majú (sudoku) prípustne doplniť* $N-1$ *čísel, každý s daným súčtom* S*. Doplňané čísla* $1,\ldots,9$ *sa môžu opakovať. Ziskom hráča je, po súčasnom zverejnení voľby, rozdiel medzí súčtom ním a súčtom súperom prípustne doplnených čísel. Prípustne doplnené číslo hráčmi do hracieho poľa je len také, ktoré neprekýva súperovú voľbu a neporušuje prípustnosť čiastočne vyplneného puzzle sudoku.*

Priestory stratégií oboch hráčov, doplnenenie $N-1$ čísel so súčtom S, sú tu zhodné a konečné. Výhra jedného hráča ide na úkor druhého hráča takže ide o hru s nulovým súčtom. Ak by si vymenily zvolené stratégie nezmení sa výška výhry ale zmení sa vyhrávajúci hráč a tak máme konečnú symetrickú hru.