Spojité rozdelenia pravdepodobnosti

Pomôcka k predmetu PaŠ

RNDr. Aleš Kozubík, PhD.

26. marca 2013

Obsah

Zoznam obrázkov

1. Rovnomerné rozdelenie Ro (a, b)

1.1. Definícia

Náhodná premenná sa riadi *rovnomerným rozdelením*, ak nadobúda dve hodnoty z konečného intervalu $(a; b)$, $a < b$. a predstavuje spojité rozdelenie, ktoré je analógom rovnomerného výberu z konečnej množiny.

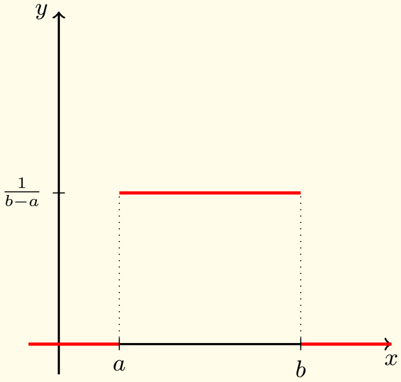
Hustota
Náhodná premenná X, ktorá nadobúda hodnoty $x \in (a; b)$, $a < b$ sa riadi rovnomerným rozdelením, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in (a; b), \\ 0 & x \notin (a; b). \end{cases} \tag{1}$$

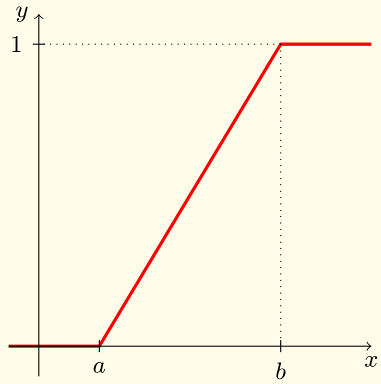
Význam rozdelenia
Rozdelenie rovnomernej náhodnej premennej charakterizujú dva parametre a a b, ktoré je možné interpretovať ako dolné a horné ohraničenie hodnôt, ktoré môže náhodná premenná nadobúdať. Rovnomerným rozdelením sa riadia napr. malé chyby merania. V Bayesovských štatistikách sa rovnomerné rozdelenie vyskytuje ako rozdelenie neznámeho parametra.

Distribučná funkcia
Náhodná premenná X, ktorá nadobúda hodnoty $x \in (a; b)$ a riadi sa rovnomerným rozdelením má distribučnú funkciu tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \le b, \\ 1 & x > b. \end{cases} \tag{2}$$



Obr. 1: Hustota rovnomerného rozdelenia s parametrami a a b.



Obr. 2: Distribučná funkcia rovnomerného rozdelenia s parametrami a a b.

1.2. Číselné charakteristiky

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(X) &= \frac{a+b}{2},\\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{a^2+ab+b^2}{3},\\
\mathbb{D}\,(X) &= \frac{(b-a)^2}{12},\\
\rho(X) &= 0\\
\varepsilon(X) &= -\frac{6}{5}.
\end{aligned}
$$

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strana 3 z 27
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

1.3. Charakteristické funkcie

Momentová vytvárajúca funkcia

$$M_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{(b-a)t}. \tag{3}$$

Charakteristická funkcia

$$\chi_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,bt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,at}}{\mathrm{i}\,t(b-a)}. \tag{4}$$

2. Exponenciálne rozdelenie E (λ)

2.1. Definícia

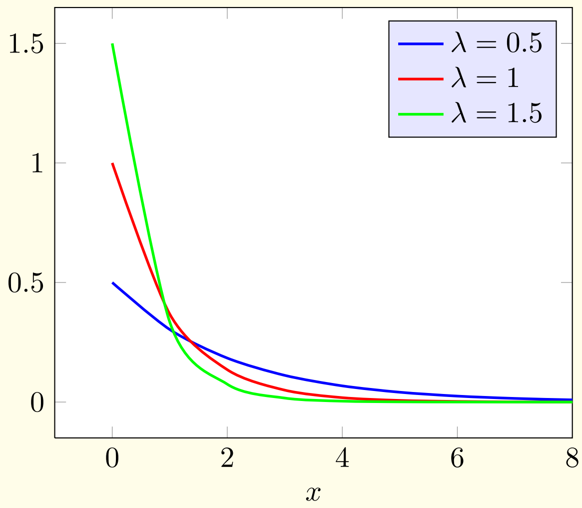
Hustota
Náhodná premenná X, ktorá nadobúda nezáporné hodnoty sa riadi exponenciálnym rozdelením, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases} \tag{5}$$

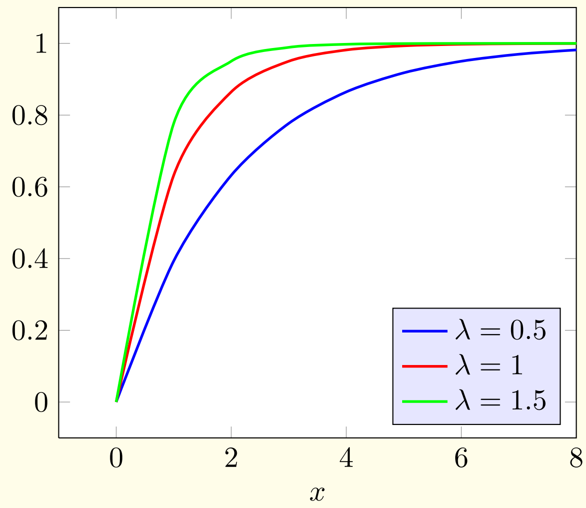
Význam rozdelenia
Rozdelenie rovnomernej náhodnej premennej charakterizuje parameter λ. Tento parameter sa obvykle interpretuje ako doba čakania na nejakú udalosť, na zlyhanie systému a pod. Exponenciálne rozdelenie zodpovedá rozdeleniu časových intervalov medzi udalosťami, ktorých výskyt sa riadi Poissonovým rozdelením s parametrom $\frac{1}{\lambda}$.

Distribučná funkcia
Náhodná premenná X, ktorá nadobúda nezáporné hodnoty a riadi sa exponenciálnym rozdelením má distribučnú funkciu tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{\lambda x} & x > 0. \end{cases} \tag{6}$$



Obr. 3: Hustota exponenciálneho rozdelenia pre rôzne hodnoty parametra λ.



Obr. 4: Distribučná funkcia exponenciálneho rozdelenia s rôznymi hodnotami parametra λ.

2.2. Číselné charakteristiky

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\lambda},\\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{2}{\lambda^2},\\
\mathbb{D}(X) &= \frac{1}{\lambda^2},\\
\rho(X) &= 2\\
\varepsilon(X) &= 6.
\end{aligned}
$$

2.3. Charakteristické funkcie

Momentová vytvárajúca funkcia

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - \lambda t}. \tag{7}$$

Charakteristická funkcia

$$\chi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\,\lambda t}. \tag{8}$$

Kvantilová funkcia

$$F^{-1}(p, \lambda) = \frac{\ln(1-p)}{\lambda}. \tag{9}$$

3. Normálne rozdelenie N (μ, σ)

3.1. Definícia

Hustota
Náhodná premenná X, ktorá nadobúda reálne hodnoty sa riadi *normálnym rozdelením* $N(\mu, \sigma)$ a píšeme $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{10}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$ sú dané parametre.

Význam rozdelenia
Rozdelenie normálnej náhodnej premennej je charakterizované dvomi parametrami μ a σ. Ich označenie je volené tak, aby zodpovedalo ich významu, teda μ je strednou hodnotou a σ smerodajnou odchýlkou tohto rozdelenia. Normálne rozdelenie hrá kľúčovú úlohu medzi všetkými spojitými rozdeleniami. Každý empirický súbor dát býva ako prvý testovaný na normálne rozdelenie. navyše, v dôsledky centrálnej limitnej vety, náhodná premenná, ktorá je výsledkom súčtu veľkého počtu malých náhodných premenných konverguje ku normálnemu rozdeleniu. Používa sa teda ako model náhodnej premennej, ktorá je výsledkom pôsobenia veľkého počtu drobných náhodných vplyvov, a taktiež na aproximáciu iných rozdelení. Normálne rozdelenie sa nazýva tiež Gaussovo.

Vzhľadom na centrálne postavenie normálneho rozdelenia sa zavádza *štandardizované normálne rozdelenie*, čo je rozdelenie $\mathrm{N}(0, 1)$, ktoré je možné získať z bežného rozdelenia transfomáciou $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Ak $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, tak $U \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Pre funkciu hustoty štandardizovaného normálneho rozdelenia používame symbol $\varphi(x)$ a platí pre ňu:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{11}$$

Distribučná funkcia
Distribučnú funkciu normálneho rozdelenia nie je možné vyjadriť v uzavretom tvare. Distribučnú funkciu náhodnej premennej $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ teda zapíšeme v tvare:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

resp. v prípade štandardizovaného normálneho rozdelenia opäť zavádzame špecifické označenie $\Phi(x)$ a platí

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Vzhľadom na mimoriadny význam normálneho rozdelenia sú hodnoty funkcií $\varphi(x)$ resp. $\Phi(x)$ tabelované. Takisto bývajú implementované v mnohých softvérových nástrojoch v podobe tzv. *error funfcie* `erf(x)`, ktorá je definovaná ako

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t.$$

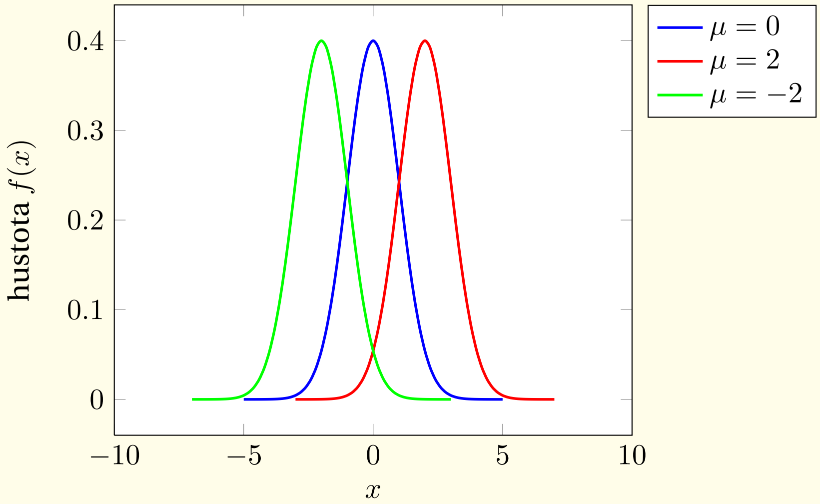
S jej pomocou je možné ľahko vyjadriť hodnoty $\Phi(x)$.

Pre potreby výpočtov je dobré poznať niektoré vlastnosti funkcií $\Phi(x)$ resp. $\varphi(x)$. Ak $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, tak platí

$$\mathbb{P}(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \forall x \quad \text{resp.} \quad \mathbb{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Vzhľadom na symetriu (hustota $\mathrm{N}(0,1)$ je párna funkcia) platí:

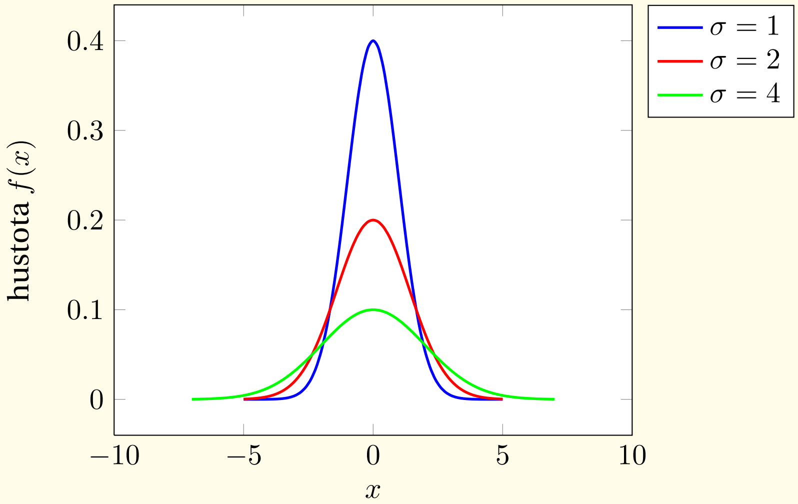
$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \text{a} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$



Obr. 5: Graf hustoty normálneho rozdelenia s rozptylom $\sigma^2 = 1$ pre rôzne hodnoty parametra μ.

3.2. Číselné charakteristiky

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X\right) &= \mu, \\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \mu^2 + \sigma^2, \\
\mathbb{D}\left(X\right) &= \sigma^2, \\
\rho(X) &= 0 \\
\varepsilon(X) &= 0.
\end{aligned}$$



Obr. 6: Graf hustoty normálneho rozdelenia so strednou hodnotou $\mu = 0$ pre rôzne hodnoty parametra σ.

3.3. Charakteristické funkcie

Momentová vytvárajúca funkcia

$$M_X(t) = \mathrm{e}^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}} . \tag{14}$$

$$M_X(t) = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} . \tag{15}$$

Charakteristická funkcia

$$\chi_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} . \tag{16}$$

Kvantilová funkcia

$$F^{-1}(p) = \mu + \sigma\Phi{-}1(p). \tag{17}$$

4. Gama rozdelenie $\Gamma(a, \delta)$

4.1. Definícia

Hustota

Náhodná premenná X, ktorá nadobúda kladné reálne hodnoty sa riadi *Gama rozdelením* $\Gamma(a, \delta)$ a píšeme $X \sim \Gamma(a, \delta)$, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\delta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \, \mathrm{e}^{-\delta x}, & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{18}$$

kde $a > 0$ a $\delta > 0$ sú dané parametre.

Význam rozdelenia

Gama rozdelenie je charakterizované dvomi parametrami a a δ. Pre celočíselnú hodnotu parametra a vzniká ako súčet a nezávislých náhodných premenných s exponenciálnym rozdelením s parametrom δ.

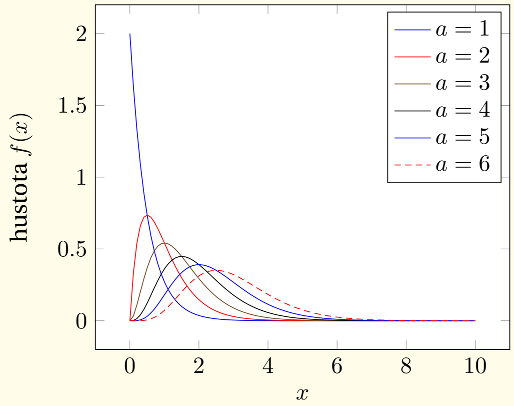
Distribučná funkcia

Distribučnú funkciu Gama rozdelenia je možné vyjadriť s pomocou tzv. *neúplnej gama funkcie*, ktorá je definovaná ako

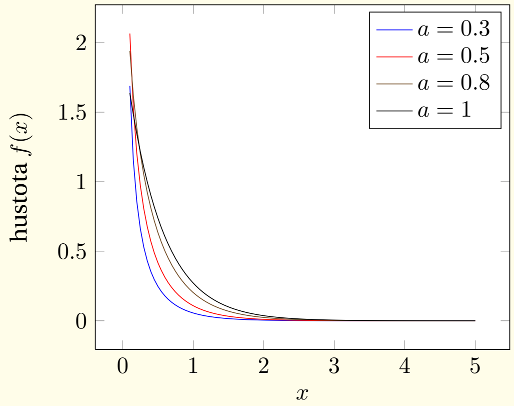
$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \, t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t.$$

Distribučnú funkciu náhodnej premennej $X \sim \Gamma(a, \delta)$ teda zapíšeme v tvare:

$$F(x) = \frac{\gamma\left(a, \frac{x}{\delta}\right)}{\Gamma(a)}. \tag{19}$$



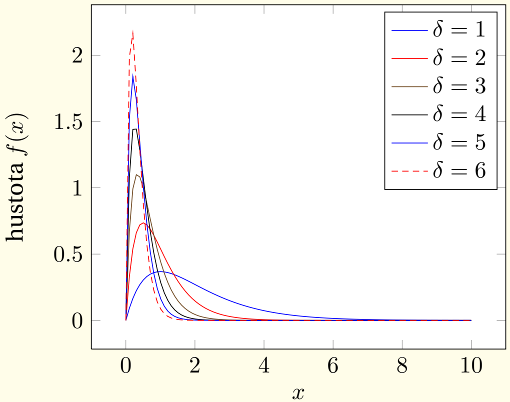
Obr. 7: Funkcia hustoty rozdelenia $\Gamma(a, 2)$ pre rôzne hodnoty parametra $a \geq 1$.



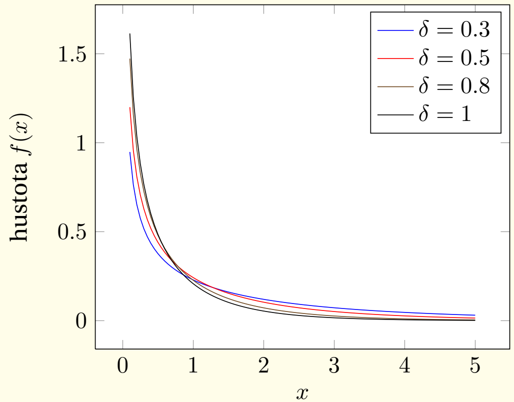
Obr. 8: Funkcia hustoty rozdelenia $\Gamma(a, 2)$ pre rôzne hodnoty parametra $a \leq 1$.

4.2. Číselné charakteristiky

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= a\delta, \\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \delta^2 a(a+1), \\
\mathbb{D}(X) &= a\delta^2, \\
\rho(X) &= \frac{2}{\sqrt{a}} \\
\varepsilon(X) &= \frac{6}{a}.
\end{aligned}
$$



Obr. 9: Funkcia hustoty rozdelenia $\Gamma(2, \delta)$ pre rôzne hodnoty parametra δ.



Obr. 10: Funkcia hustoty rozdelenia $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \delta\right)$ pre rôzne hodnoty parametra δ.

4.3. Charakteristické funkcie

Momentová vytvárajúca funkcia

$$M_X(t) = (1 - \delta t)^{-a}, \quad t < \frac{1}{\delta}. \tag{20}$$

Charakteristická funkcia

$$\chi_X(t) = (1 - \delta t\,\mathrm{i})^{-a}. \tag{21}$$

Kvantilová funkcia
Nie je vyjadriteľná v jednoduchom uzavretom tvare s pomocou elementárnych funkcií.

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strana 15 z 27
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

5. Rozdelenie $\chi^2(n)$

5.1. Definícia

Hustota

Náhodná premenná X, ktorá nadobúda kladné reálne hodnoty sa riadi *Rozdelením $\chi^2(n)$ (chí-kvadrát) s n stupňami voľnosti* a píšeme $X \sim \chi^2(n)$, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases} \tag{22}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je daný parameter, tzv. počet stupňov voľnosti.

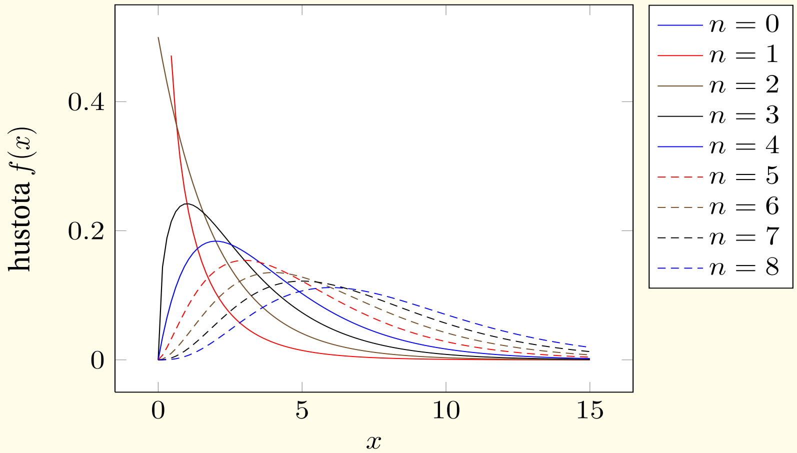
Význam rozdelenia

Rozdelenie chí-kvadrát s n stupňami voľnosti je charakterizované jedným parametrom n. Vzniká ako rozdelenie súčtu druhých mocnín (kvadrátov) nezávislých náhodných premenných so štandardizovaným normálnym rozdelením. Teda ak $X_i \sim \mathbb{N}01, i = 1, \ldots, n$ sú nezávislé, tak náhodná premenná $Y = X_1^2 + \cdots X_n^2$ má rozdelenie $\chi^2(n)$. Rozdelenie chí-kvadrát je tiež špecifickým prípadom Gama rozdelenia s parametrami $a = \frac{n}{2}$ a $\delta = \frac{1}{2}$.

Distribučná funkcia

Distribučnú funkciu rozdelenia chí-kvadrát je možné, podobne ako distribučnú funkciu Gama rozdelenia vyjadriť s pomocou neúplnej gama funkcie, v tvare:

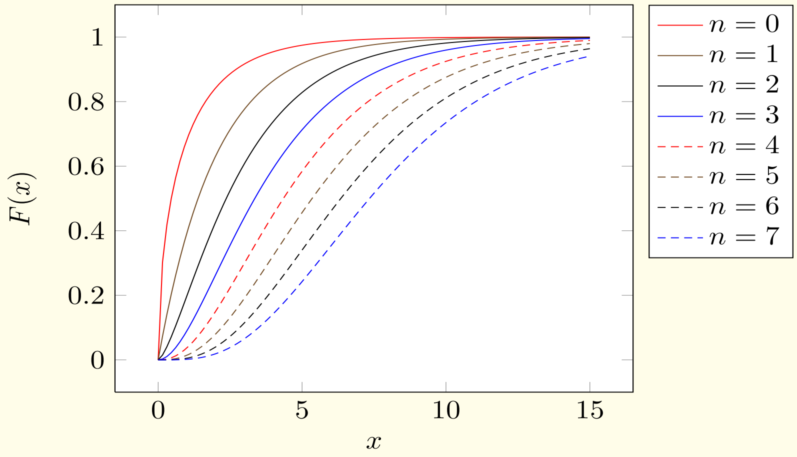
$$F(x) = \frac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{23}$$



Obr. 11: Funkcia hustoty rozdelenia $\chi^2(n)$ pre rôzne počty stupňov voľnosti n.

5.2. Číselné charakteristiky

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X\right) &= n, \\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= n^2 + 2n, \\
\mathbb{D}\left(X\right) &= 2n, \\
\rho(X) &= \sqrt{\frac{8}{n}} \\
\varepsilon(X) &= \frac{12}{n}.
\end{aligned}$$



Obr. 12: Distribučná funkcia rozdelenia $\chi^2(n)$ pre rôzne počty stupňov voľnosti n.

5.3. Charakteristické funkcie

Momentová vytvárajúca funkcia

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}, \quad t < \frac{1}{2}. \tag{24}$$

Charakteristická funkcia

$$\chi_X(t) = (1-\delta t\,\mathrm{i})^{-\frac{n}{2}}. \tag{25}$$

Kvantilová funkcia
Nie je vyjadriteľná v jednoduchom uzavretom tvare s pomocou elementárnych funkcií.

6. Beta rozdelenie B (k, n)

6.1. Definícia

Hustota
Náhodná premenná X, ktorá nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 0; 1\rangle$ sa riadi *Beta rozdelením B (k, n)* a píšeme $X \sim \mathrm{B}\,(k, n)$, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{k-1}(1-x)^{n-1}}{B(k,n)} & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \tag{26}$$

kde $k > 0$ a $n > 0$ sú dané parametre.

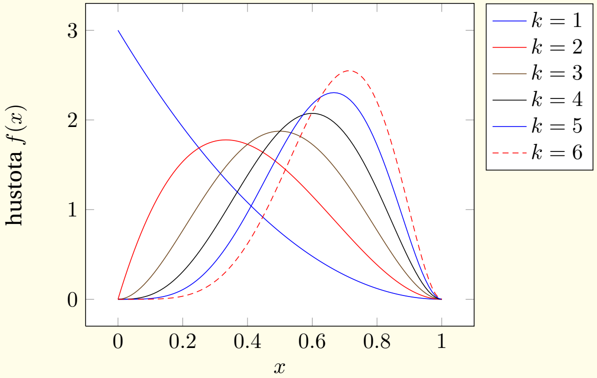
Význam rozdelenia
Beta rozdelenie patrí medzi najpoužívanejšie rozdelenia pre náhodné premenné ktoré nadobúdajú hodnoty z intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Je charakterizované dvomi parametrami k a n, čo mu dáva veľkú flexibilitu. Práve táto flexibilita tvaru funkcie hustoty je príčinou jeho širokého použitia. Beta rozdelenie je zovšeobecnením rovnomerného rozdelenia Ro $(0, 1)$.

Distribučná funkcia
Distribučnú funkciu Beta rozdelenia je možné vyjadriť s pomocou tzv. *neúplnej beta funkcie*, ktorá je definovaná ako

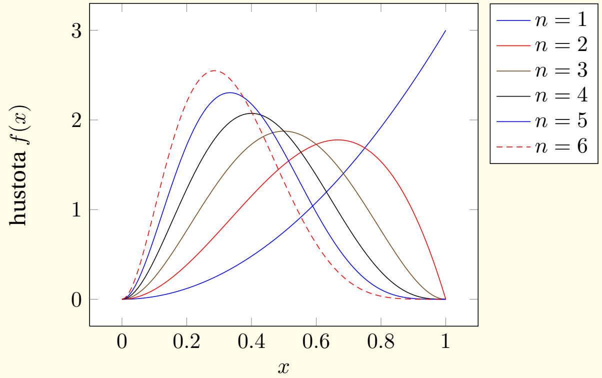
$$B_x(k, n) = \int_0^x t^{k-1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Distribučnú funkciu náhodnej premennej $X \sim \mathrm{B}\,(k, n)$ teda zapíšeme v tvare:

$$F(x) = \frac{B_x(k, n)}{B(k, n)}. \tag{27}$$



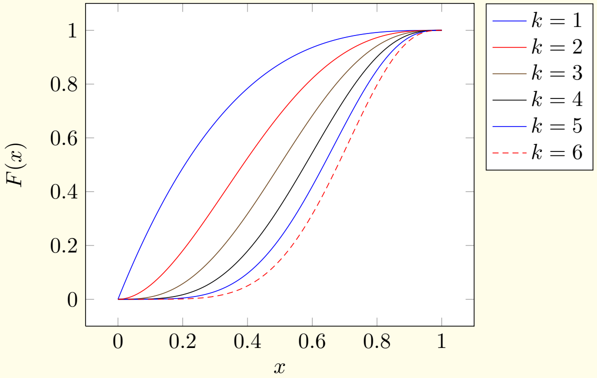
Obr. 13: Funkcia hustoty rozdelenia $\mathrm{B}\,(k,3)$ pre rôzne hodnoty parametra k.



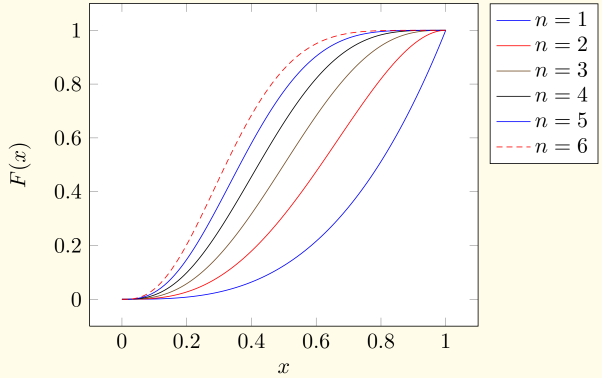
Obr. 14: Funkcia hustoty rozdelenia $\mathrm{B}\,(3,n)$ pre rôzne hodnoty parametra n.

6.2. Číselné charakteristiky

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(X) &= \frac{k}{k+n},\\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{\Gamma(k+2)\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+n+2)\Gamma(k)},\\
\mathbb{D}\,(X) &= \frac{nk}{(k+n)^2(k+n+1)},\\
\rho(X) &= \frac{2(n-k)\sqrt{k+n+1}}{(k+n+2)\sqrt{kn}}\\
\varepsilon(X) &= \frac{6[(k-n)^2(k+n+1)-nk(k+n+2)]}{kn(k+n+2)(k+n+3)}.
\end{aligned}
$$



Obr. 15: Distribučná funkcia rozdelenia B $(k, 3)$ pre rôzne hodnoty parametra k.



Obr. 16: Distribučná funkcia rozdelenia B $(3, n)$ pre rôzne hodnoty parametra n.

6.3. Charakteristické funkcie

Momentová vytvárajúca funkcia

$$M_X(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \prod_{j=0}^{i-1} \frac{k+j}{k+n+j} \right) \frac{t^i}{i!}. \tag{28}$$

Charakteristická funkcia
Vyjadrenie je príliš zložité, využíva tzv. hypergeometrické funkcie.
Kvantilová funkcia
Nie je vyjadriteľná v jednoduchom uzavretom tvare s pomocou elementárnych funkcií.

7. Studentovo rozdelenie $\mathrm{t}\,(n)$

7.1. Definícia

Hustota
Náhodná premenná X, ktorá nadobúda hodnoty z $\mathbb{R}$sa riadi *Studentovým rozdelením* $\mathrm{t}\,(n)$ *s* n *stupňami voľnosti* a píšeme $X \sim \mathrm{t}\,(n)$, ak jej funkcia hustoty má tvar

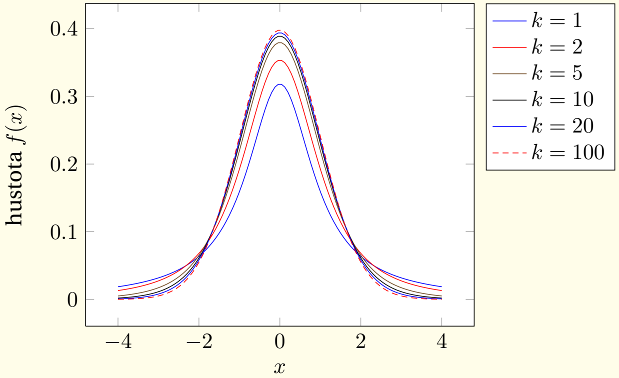
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

kde parameter $n \in \mathbb{N}$ je parameter, tzv. počet stupňov voľnosti.

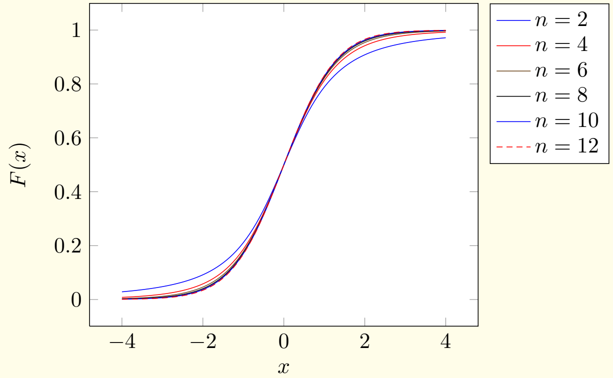
Význam rozdelenia
Studentovo rozdelenie $\mathrm{t}\,(n)$ je významným rozdelením v matematickej štatistike, hrá významnú úlohu pri testoch štatistických hypotéz. Vzniká ako rozdelenie podielu náhodnej premennej $X \sim \mathrm{N}\,(0,1)$ a náhodnej premennej $\sqrt{\frac{Y}{n}}$, kde $Y \sim \chi^2\,(n)$. Jeho odvodenie sa pripisuje Williamovi Gossetovi, ktorý bol v oblasti štatistiky samoukom a bol preto známy pod prezývkou „student“.

Distribučná funkcia
Distribučnú funkciu Studentovho rozdelenia nie je možné vyjadriť v jednoduchom uzavretom tvare pomocou elementárnych funkcií. Môžeme ju zapísať iba v integrálnom tvare:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{d}t. \tag{30}$$



Obr. 17: Funkcia hustoty Studentovho rozdelenia $\mathrm{t}\,(n)$ pre rôzne počty stupňov voľnosti n.



Obr. 18: Distribučná funkcia Studentovho rozdelenia $\mathrm{t}\,(n)$ pre rôzne počty stupňov voľnosti n.

7.2. Číselné charakteristiky

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(X) &= 0,\\
\mathbb{D}\,(X) &= \frac{n}{n-2}, \quad n > 2, \quad \infty, n \leq 2\\
\rho(X) &= 0, \quad n > 3, \quad \text{inak nedefinované}\\
\varepsilon(X) &= \frac{6}{n-4} \quad n > 4, \quad \text{inak nedefinované.}
\end{aligned}
$$

7.3. Charakteristické funkcie

Momentová vytvárajúca funkcia
Momentová vytvárajúca funkcia nie je definovaná.

Charakteristická funkcia

$$\chi_X(t) = \frac{K_n\left(\sqrt{n}|t|\right) \cdot \left(\sqrt{n}|t|\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}-1}}, \tag{31}$$

kde $K_n(x)$ je tzv. modifikovaná Besselova funkcia definovaná vzťahom

$$K_n(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x \cosh t} \cosh(nt) \, \mathrm{d}t.$$

Kvantilová funkcia
Nie je vyjadriteľná v jednoduchom uzavretom tvare s pomocou elementárnych funkcií.

Z obrázku 17 je vidieť, že s rastúcim počtom stupňov voľnosti sa už priebeh funkcie hustoty veľmi nemení. Perto je zvykom pre hodnoty $n > 30$ toto rozdelenie aproximovať štandardným rormálnym rozdelením $\mathrm{N}(0, 1)$.

8. Fisherovo rozdelenie $\mathrm{F}(n_1, n_2)$

8.1. Definícia

Hustota

Náhodná premenná X, ktorá nadobúda nezáporné reálne hodnoty sa riadi *Fisherovým rozdelením* $\mathrm{F}(n_1, n_2)$ *s* n_1 *a* n_2 *stupňami voľnosti* a píšeme $X \sim \mathrm{F}(n_1, n_2)$, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{32}$$

kde $n_1 \in \mathbb{N}$ a $n_2 \in \mathbb{N}$ sú dané parametre.

Význam rozdelenia

Fisherovo rozdelenie má veľký význam v matematickej štatistike. Využíva sa pri testoch hypotéz na rovnosť rozptylov dvoch súborov (nazývané F–testy) alebo v analýze rozptylu. Vzniká ako rozdelenie podielu dvoch nezávislých náhodných premenných $\frac{X}{n_1}$ a $\frac{Y}{n_2}$, pričom $X \sim \chi^2(n_1)$ a $Y \sim \chi^2(n_2)$

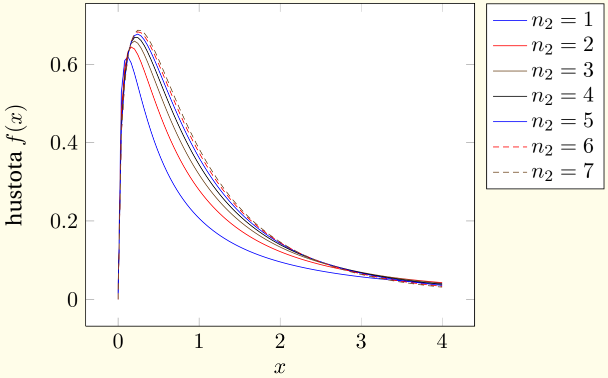
Distribučná funkcia

Distribučnú funkciu Fisherovho rozdelenia je možné vyjadriť s pomocou neúplnej beta funkcie

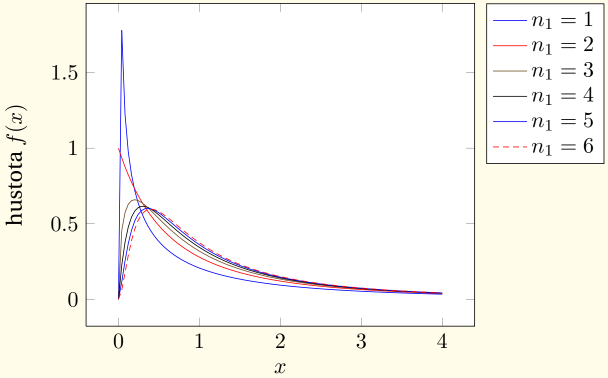
$$B_x(k, n) = \int_0^x t^{k-1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Distribučnú funkciu náhodnej premennej $X \sim \mathrm{F}(n_1, n_2)$ teda zapíšeme v tvare:

$$F(x) = \frac{B_x\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)}. \tag{33}$$



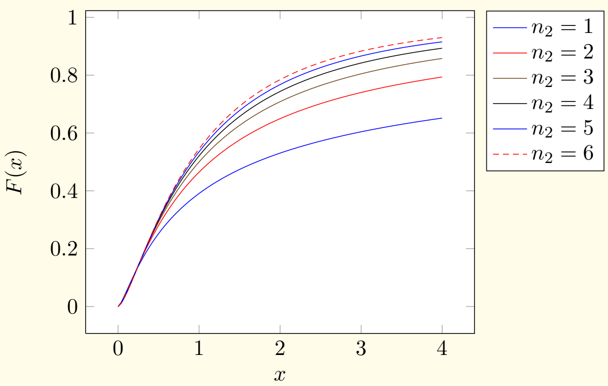
Obr. 19: Funkcia hustoty rozdelenia $\mathrm{F}\,(3, n_2)$ pre rôzne počty stupňov voľnosti n_2.



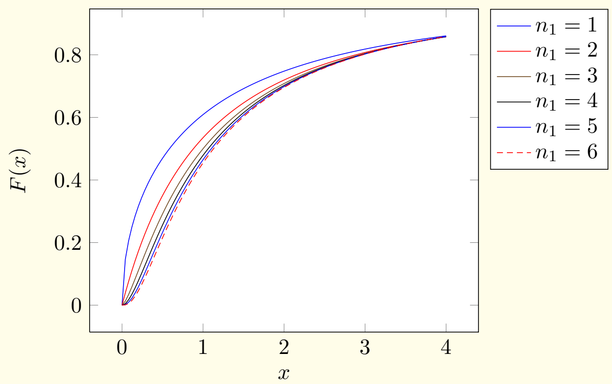
Obr. 20: Funkcia hustoty rozdelenia $\mathrm{F}\,(n_2, 3)$ pre rôzne počty stupňov voľnosti n_1.

8.2. Číselné charakteristiky

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(X) &= \frac{n_2}{n_2 - 2}, \quad n_2 > 2 \\
\mathbb{D}\,(X) &= \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}, \quad n_2 > 4, \\
\rho(X) &= \frac{(2n_1 + n_2 - 2)\sqrt{8(n_2 - 4)}}{(n_2 - 6)\sqrt{n_1(n_1 + n_2 - 2)}} \\
\varepsilon(X) &= 12\frac{n_1(5n_2 - 22)(n_1 + n_2 - 2) + (n_2 - 4)(n_2 - 2)^2}{n_1(n_2 - 6)(n_2 - 8)(n_1 + n_2 - 2)}
\end{aligned}
$$



Obr. 21: Distribučná funkcia Fisherovho rozdelenia $\mathrm{F}\,(3, n_2)$ pre rôzne počty stupňov voľnosti n_2.



Obr. 22: Distribučná funkcia Fisherovho rozdelenia $\mathrm{F}\,(n_1, 3)$ pre rôzne počty stupňov voľnosti n_1.

8.3. Charakteristické funkcie

Momentová vytvárajúca funkcia
Momentová vytvárajúca funkcia nie je definovaná. Začiatočné momenty ν_k existujú a sú konečné len ak $2k < n_2$ a platí

$$\nu_k = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2} + k\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2} - k\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$$

Charakteristická funkcia
Nie je vyjadriteľná v jednoduchom uzavretom tvare s pomocou elementárnych funkcií.

Kvantilová funkcia
Nie je vyjadriteľná v jednoduchom uzavretom tvare s pomocou elementárnych funkcií.

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strana 27 z 27
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec